

УДК 681.586.621.37:543.275.1

В.В. Езерский, В.А. Пронин, О.В. Спиркина**АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ АМПЛИТУДЫ СИГНАЛА В ЧАСТОТНОМ ДАЛЬНОМЕРЕ БЛИЖНЕГО ДЕЙСТВИЯ**

Рассматриваются три возможных алгоритма поиска экстремума спектральной плотности амплитуды (СПА) по критериям точности оценки методической погрешности и скорости вычислений.

Ключевые слова: оценка частоты сигнала, квадратичная аппроксимация, метод золотого сечения, минимум среднего квадрата отклонения.

Введение. В частотном дальномере ближнего действия с несущей частотой f_0 и диапазоне перестройки частоты при частотной модуляции (ЧМ) Δ_F обработка сигнала разностной частоты (СРЧ) чаще всего производится в спектральной области. [1]. Основной операцией, определяющей погрешность измерения расстояния R , является оценка частоты F_p путём поиска положения на частотной оси максимума спектральной плотности амплитуды (СПА) гармонического СРЧ ограниченной длительности T . Как правило, такой поиск предполагает использование двухэтапной процедуры [1].

На первом этапе производится грубая оценка нормированной частоты $x_{гр} = F_{гр} T$ максимума СПА, полученной с использованием K -точечного быстрого преобразования Фурье (БПФ) по отсчётам СРЧ, взвешенным некоторой весовой функцией (ВФ). При этом погрешность такой оценки приводит к ошибке измерения расстояния δ_R , являющейся ошибкой дискретности (ОД) частотного дальномера:

$$\delta_R = c/(4\Delta_F), \quad (1)$$

где c – скорость распространения электромагнитной волны.

Величина этой погрешности слишком велика для практических применений, однако она позволяет попасть в область глобального максимума СПА, т.е. в её главный лепесток.

На втором этапе выполняется уточнение положения максимальной спектральной составляющей $x_{макс}$. Производится поиск положения максимума модуля непрерывно-дискретного преобразования Фурье [2, 3]:

$$\left| \dot{S}(x) \right| = \left| \sum_{k=0}^{K-1} u_p(k) w(k) \exp(-j2\pi x k) \right|, \quad (2)$$

где $0 \leq x \leq 1$; $u_p(k)$ – цифровые отсчёты СРЧ; $w(k)$ – цифровые отсчёты ВФ; K – общее число отсчётов СРЧ.

При этом используется какой-либо итерационный алгоритм численного поиска экстремума.

Затем производится вычисление расстояния:

$$R = 2x_{макс} \delta_R. \quad (3)$$

Свойства погрешности измерения расстояния зависят от выбора алгоритма поиска экстремума на втором этапе.

Целью данной работы является сравнительный анализ характеристик трёх возможных алгоритмов поиска положения экстремума СПА $x_{макс}$ для второго этапа оценки частоты СРЧ в частотном дальномере ближнего действия.

Возможные алгоритмы поиска экстремума

Первый алгоритм поиска экстремума СПА основан на использовании функции `fminbnd` из библиотеки системы программирования MatLab. Эта функция выполняет итеративную процедуру последовательного поиска минимума заданного выражения с помощью метода параболической аппроксимации главного лепестка СПА:

$$f(x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3, \quad (4)$$

где a_1, a_2, a_3 – коэффициенты параболической аппроксимирующей функции.

Коэффициенты выражения (4) определяют с использованием трёх отсчётов спектра, показанных на рисунке 1. Центральный отсчёт соответствует частоте, найденной на предыдущей итерации. Два боковых отсчёта задают на основе принципа золотого сечения.

В связи с тем, что процедура `fminbnd` разработана для поиска минимума, для отсчётов спектра, найденных по выражению (2), находят модуль комплексного числа и используют его в этой процедуре с отрицательным знаком. Соответственно и формулу (4) также умножают на минус единицу.

Положение экстремума этой параболы принимается за положение искомой частоты:

$$x_{max} = -a_2 / 2a_1. \quad (5)$$

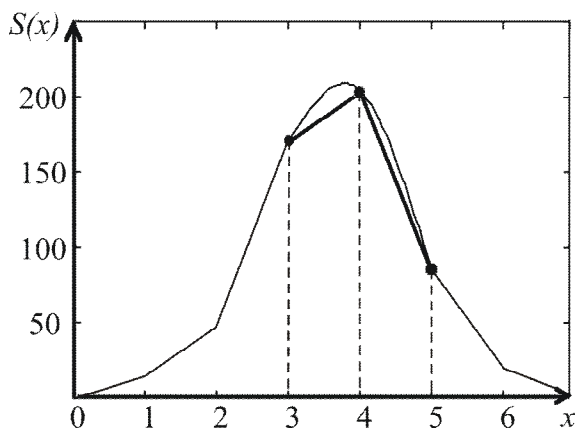


Рисунок 1 – Параболическая аппроксимация главного лепестка СПА по трём точкам

В процедуре `fminbnd` предусмотрена опция задания точности вычислений. При достижении заданной точности процедура возвращает найденное значение положения минимума, которое в нашей задаче соответствует x_{max} .

Второй алгоритм также основан на аппроксимации главного лепестка спектральной плотности параболической функцией (4), однако при этом коэффициенты a_1, a_2, a_3 подбираются так, чтобы обеспечить минимум среднеквадратического отклонения (СКО) аппроксимирующей функции от вычисленных по (2) модулей отсчётов спектра $S(x_k)$:

$$F(a_1, a_2, a_3) = \sum_{k=1}^N [S(x_k) - f(x_k)]^2, \quad (6)$$

где N – число выбранных точек в выбранном диапазоне аппроксимации.

Точное значение частоты x_{max} , соответствующей максимуму СПА, находится в диапазоне значений $[x_{rp} - 0,5; x_{rp} + 0,5]$. Если оно выходит за эти пределы, то величина x_{rp} , определённая на первом этапе, изменяется на единицу в сторону увеличения или уменьшения. Поэтому на каждой итерации именно этот диапазон разбивается на $N - 1$ отрезков с шагом $d = 1/(N - 1)$. Причём число отрезков является чётным числом, чтобы отрезки разместились симметрично относительно предыдущей оценки

частоты. Пример расположения аппроксимирующих точек показан на рисунке 2 для $N = 7$.

На границах отрезков в выбранных точках (x_1, x_2, \dots, x_N) вычисляются модули отсчётов спектра $S_k = S(x_k)$ с помощью непрерывно-дискретного преобразования Фурье (2).

В соответствии с принципом минимума СКО выражение (6) необходимо дифференцировать по коэффициентам a_1, a_2, a_3 , приравнять производные к нулю и решить полученную систему линейных алгебраических уравнений.

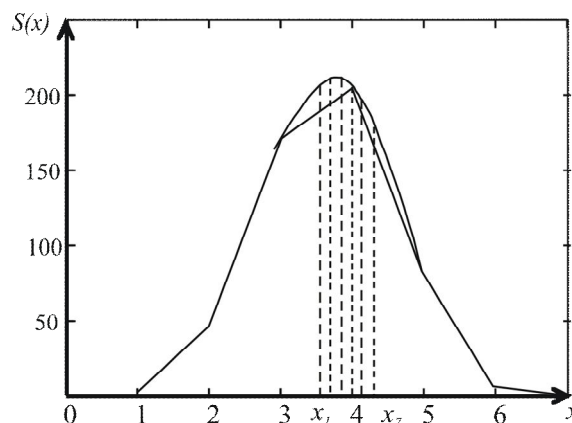


Рисунок 2 – Параболическая аппроксимация по семи точкам на основе минимума СКО

В результате решения получены выражения для коэффициентов формулы (4):

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{A - B - C + D}{U - V + W - Z}, \\ a_2 &= \frac{F - a_1 G}{E}, \\ a_3 &= \frac{\sum_{k=1}^N S_k - a_1 \sum_{k=1}^N x_k^2 \sum_{k=1}^N x_k}{N}, \end{aligned} \quad (7)$$

где: $A = EN \sum_{k=1}^N (x_k^2 S_k)$; $B = F \sum_{k=1}^N x_k^3$;

$C = E \sum_{k=1}^N x_k^2 \sum_{k=1}^N S_k$; $D = F \sum_{k=1}^N x_k^2 \sum_{k=1}^N x_k$;

$U = EN \sum_{k=1}^N x_k^4$; $V = GN \sum_{k=1}^N x_k^3$; $W = G \sum_{k=1}^N x_k^2 \sum_{k=1}^N x_k$;

$Z = E \left(\sum_{k=1}^N x_k^2 \right)^2$; $E = N \sum_{k=1}^N x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^N x_k \right)^2$;

$F = N \sum_{k=1}^N (x_k S_k) - \sum_{k=1}^N x_k \sum_{k=1}^N S_k$;

$G = N \sum_{k=1}^N x_k^3 - \sum_{k=1}^N x_k^2 \sum_{k=1}^N x_k$;

$x_k = x_{rp} + \left[k - 1 - \frac{(N - 1)}{2} \right] d$.

Однократное вычисление по формулам (7), (5) и (3) не позволяет получить точное значение погрешности измерения расстояния, приведённое в [1]. Однако полученное значение гораздо ближе к точному значению, чем первоначальное $x_{гр}$. Поэтому можно повторить вычисления, но с заменой в (7) значения $x_{гр}$ на найденное из (5) значение $x_{макс}$. И так можно продолжать до тех пор, когда разница между вновь полученным значением $x_{макс i}$ и предыдущим значением $x_{макс (i-1)}$ станет меньше некоторой заранее заданной величины Δ_x :

$$|x_{макс i} - x_{макс (i-1)}| \leq \Delta_x. \quad (8)$$

Третий алгоритм предназначен для снижения влияния конечной разрядности численных вычислений на точность получаемых результатов. Для аппроксимации также используем параболическую функцию, только запишем её в центрированном виде относительно положения предыдущей грубой оценки максимума спектра.

$$f(x) = a(x - x_{гр})^2 + b(x - x_{гр}) + c. \quad (9)$$

По-прежнему для поиска коэффициентов аппроксимирующей функции используем метод минимума СКО. В результате могут быть получены более простые, чем (7), формулы для коэффициентов аппроксимирующей функции (9), которые в частном случае $N = 7$ имеют вид:

$$a = \frac{\sum_{k=1}^7 [S_k(k-4)^2] - 4 \sum_{k=1}^7 S_k}{84d^2},$$

$$b = \frac{3(S_7 - S_1) + 2(S_6 - S_2) + S_5 - S_3}{28d}, \quad (10)$$

$$c = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^7 S_k - 4ad^2.$$

Получаемый при этом результат оценки положения максимума параболы является уточнением $\hat{\Delta}_x$ ранее вычисленного значения:

$$x_{max} = x_{гр} + \hat{\Delta}_x, \quad (11)$$

где $\hat{\Delta}_x = -\frac{b}{2 \cdot a}$.

Эти вычисления, как и в предыдущем случае, можно повторять, но при этом снижать на каждой итерации шаг d до снижения $|\hat{\Delta}_x|$ ниже требуемой точности вычислений, т.е. заданной величины Δ_x .

Сравнение алгоритмов между собой выполнено по критериям точности измерения расстояния и быстродействия с помощью численного моделирования процесса измерения расстоя-

ния. Моделирование СРЧ производилось по выражению [1]:

$$u_p(k) = U_m \cos \left[2\pi \left(f_0 + \Delta_F \frac{k}{K} t_3 \right) \right], \quad (12)$$

где U_m – амплитуда СРЧ, принятая равной единице; $f_0 = 10$ ГГц; $\Delta_F = 1$ ГГц; $K = 1024$ – число отсчётов СРЧ; $k = 0, 1, \dots, K-1$; $t_3 = 2R/c$.

Расчёты проводились с использованием ВФ Блэкмана [3] в диапазоне расстояний от 0,4 м до 30 м с шагом 1 мм. На каждом задаваемом расстоянии R по формуле (12) производилось формирование реализации СРЧ, оценка его частоты с помощью указанной двухэтапной процедуры с использованием на втором этапе трёх алгоритмов поиска максимума СПА и расчёт оценки расстояния \hat{R} по формуле (3).

На малых расстояниях все три алгоритма обеспечивают одинаковую мгновенную погрешность измерения $\Delta_R = \hat{R} - R$, представленную на рисунке 3.

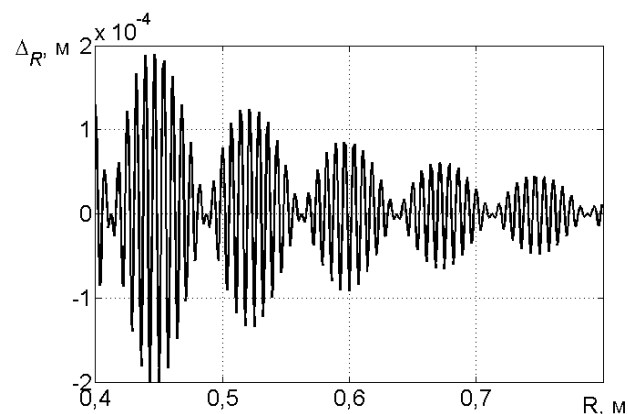


Рисунок 3 – Погрешность измерения расстояния

Для каждого алгоритма принято $\Delta_x = 10^{-8}$.

График полностью соответствует теоретической зависимости методической погрешности измерения расстояния, представленной в [1].

При увеличении расстояния графики, соответствующие разным алгоритмам второго этапа оценки частоты СПА, постепенно начинают отличаться. У двух первых алгоритмов, начиная с некоторого расстояния, индивидуального для каждого алгоритма, наблюдается некая хаотичность результатов. Третий алгоритм по-прежнему обеспечивает систематический характер графика с формой, соответствующей теоретическим расчётам. На рисунке 4 для примера показано поведение погрешностей при измерении расстояний в районе $R = 30$ м для второго и третьего алгоритмов второго этапа. Здесь и да-

лее цифры у графиков на поле рисунка соответствуют номеру алгоритма.

По графикам мгновенных погрешностей сложно количественно сравнивать между собой эти алгоритмы.

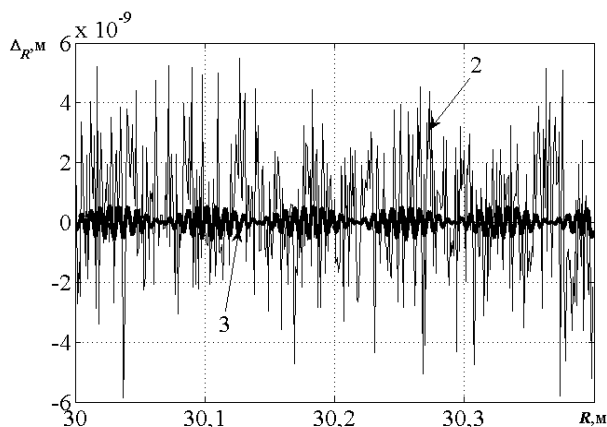


Рисунок 4 – Погрешность измерения расстояния

Поэтому воспользуемся предложенным в [1] вариантом сравнения средних квадратических отклонений (СКО) σ_R результатов измерений, вычисленных на диапазонах расстояний, равных ОД.

Вычисления для каждого диапазона расстояний производились по формуле:

$$\sigma_R^2(m) = \frac{\sum_{k=1}^{N_R} (\bar{R}_{k,m} - R_{k,m})^2}{N_R}, \quad (13)$$

где: $N_R = 100$ – количество расчётных точек на диапазоне расстояний, равном ОД δ_R ; $R_{k,m} = R_n + (m-1)\delta_R + (k-1)\Delta$ – заданное расстояние в k -й точке на m -м диапазоне; Δ – шаг по расстоянию; $\bar{R}_{k,m}$ – оценка расстояния в k -й точке на m -м диапазоне.

На рисунке 5 жирными сплошными линиями, обозначенными цифрами 1, 2 и 3, изображены графики СКО, полученные по (13) на диапазоне измеряемых расстояний от 0,4 м до 30 м для трёх указанных алгоритмов.

У первых двух алгоритмов при увеличении расстояния наблюдается некоторое предельное значение погрешности, ниже которой она не может опуститься. Для первого алгоритма это ограничение наступает на 5 м и равно примерно $3 \cdot 10^{-6}$ м. У второго алгоритма это ограничение наблюдается на расстоянии 20 м и равно примерно 10^{-9} м. Третий алгоритм на больших расстояниях (более 20 м) обеспечивает наивысшую точность определения методической погрешности. Это связано с тем, что при каждой итерации по мере увеличения точности вычислений в пер-

вом и втором алгоритмах производится уточнение достаточно больших чисел, отличающихся цепочками младших разрядов разрядной сетки.

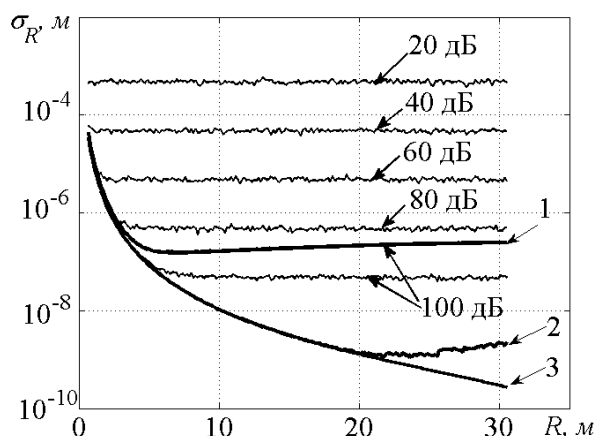


Рисунок 5 – СКО для трёх алгоритмов

Поэтому при значительном отличии абсолютного значения результата измерения и величины погрешности происходит потеря точности вычислений. В третьем алгоритме выполняется оценка разности между новым значением и предыдущим значением. Вследствие этого потери точности не происходит.

Быстродействие алгоритмов определялось с использованием счётчика MatLab tic/toc. Команда tic запускает счётчик и ставится в программе там, где начинается расчёт расстояния – перед началом второго этапа оценки частоты. Команда toc завершает работу счётчика и ставится после вычисления оценки расстояния. Результаты расчётов представлены на рисунке 6.

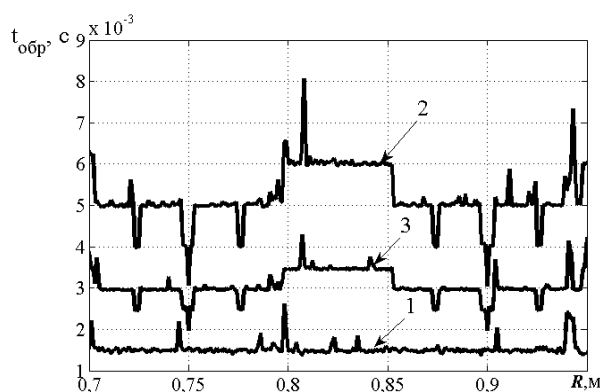


Рисунок 6 – Время обработки

Видно, что при условии достижения минимальной (потенциальной) погрешности измерения минимальное время обработки обеспечивает первый алгоритм. Второй и третий алгоритмы в среднем работают медленнее соответственно в 3,3 раза и в 2 раза.

На практике не всегда стараются добиться потенциальной величины методической погрешности и чаще ограничиваются некоторой вели-

чиной, удовлетворяющей современным требованиям пользователей. Это связано с тем, что существует много других составляющих погрешности измерения [4-6] (например, шумы и помехи), которые не позволяют достигнуть потенциального значения.

Оценить влияние уровня шума на величину результирующей погрешности измерения расстояния можно с помощью моделирования процесса определения расстояния по СРЧ (12) с добавленным аддитивным белым нормальным шумом. Добавление шума производилось с помощью процедуры `awgn` из библиотеки системы программирования `MatLab`. Результаты моделирования показывают, что шум оказывает одинаковое влияние на три рассматриваемых алгоритма. На рисунке 5 тонкими сплошными линиями приведены зависимости СКО, вычисленные по (13), от измеряемого расстояния для разных отношений сигнал-шум q , которые отмечены у графиков соответствующими цифрами в дБ.

Видно, что шумовая составляющая погрешности измерения расстояния превышает методическую погрешность до уровня шума 80 дБ. Причём отметим, что графики для всех алгоритмов практически совпадают. Уменьшение уровня шума на 20 дБ приводит к уменьшению шумовой составляющей погрешности в 10 раз. При уровне шума 100 дБ график, соответствующий на рисунке 5 первому алгоритму, сливается с графиком, полученным без шума и обозначенном цифрой 1. Это означает, что методическая погрешность стала больше, чем шумовая и она определяет общий уровень погрешности. Для двух других алгоритмов шумовая составляющая по-прежнему больше методической погрешности.

Добавление шума практически не влияет на соотношение времён обработки.

Моделирование влияния помехи, вызванной наличием мешающего отражателя в рабочей зоне дальномера, показывает, что для всех трёх алгоритмов в районе помехи возникает одинаковая зона повышенной погрешности измерения расстояния. График зависимости погрешности измерения полностью совпадает с результатами, полученными в [1], и поэтому здесь не приводится. Соотношение времени обработки для всех трёх алгоритмов остаётся примерно таким, как отмечено выше.

По этим причинам нецелесообразно в практических задачах добиваться снижения методической погрешности значительно меньше чем остальные составляющие.

Если ограничить величину погрешности измерения снизу практически значимой и реально достижимой величиной 0,5 мм, которая харак-

терна для современных прецизионных ЧМ уровнемеров [1], то результаты оценки времени обработки изменяются. Теперь третий алгоритм работает быстрее первого алгоритма примерно в 1,5 раза и быстрее второго алгоритма примерно в 1,75 раза. При этом шумовая составляющая погрешности уравнивается по величине с методической погрешностью при уровне шума 45 дБ, легко достижимом на практике.

Выводы. Из рассмотренных алгоритмов наилучшую потенциальную точность измерения расстояния имеет третий алгоритм. Ему незначительно уступает второй. Первый алгоритм существенно уступает этим двум. Однако у любого из них достижимая точность намного лучше любых практических требований. При этом первый алгоритм обеспечивает наивысшее быстродействие.

Поэтому именно его целесообразно использовать в ситуациях, когда необходимо добиться самого высокого быстродействия при жёстких требованиях к допустимой погрешности измерения. При этом обязательным должно быть условие отсутствия существенного влияния других мешающих факторов.

Если достаточно ограничить погрешность на уровне, задаваемом практическими требованиями при работе на фоне аддитивного белого нормального шума, то целесообразно использовать третий алгоритм.

Библиографический список

1. Атаянц Б.А., Давыдовкин В.М., Езерский В.В. и др. Прецизионные системы ближней частотной радиолокации промышленного применения. – М.: Радиотехника, 2012. 512 с.
2. Марпл.-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
3. Хэррис Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье. // ТИИР. – 1978. – Т. 66. № 1. – С. 60-96.
4. Паршин В.С., Езерский В.В., Баранов И.В., Гусев В.С., Багдадюлян А.А. Сравнительный анализ помехоустойчивости алгоритмов измерения дальности ЧМ дальномером в спектральной области // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2004. № 15. С. 40 – 45.
5. Езерский В.В., Давыдовкин В.М. Влияние отражённых волн на погрешность измерения расстояния частотным дальномером // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2005. № 16. С. 40 – 45.
6. Езерский В.В. Влияние шума на точность определения расстояния дальномером с адаптивной частотной модуляцией // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2008. № 24. С. 55 – 59.