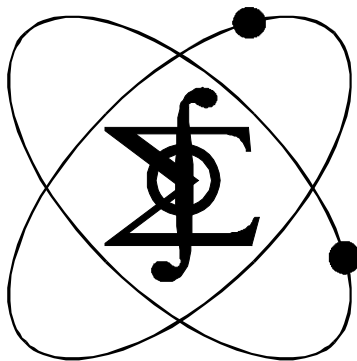


**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**К.В. БУХЕНСКИЙ,
Н.В. ЕЛКИНА, Г.С. ЛУКЪЯНОВА**

**ОПОРНЫЕ КОНСПЕКТЫ
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ**

Часть 3



Рязань 2011

УДК 517

Опорные конспекты по высшей математике. Часть 3: учеб. пособие / К.В. Бухенский, Н.В. Елкина, Г.С. Лукьянова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2011. – 220 с.

Акцент сделан на сообщении студентам сведений, необходимых для практического применения математического аппарата в профессиональной деятельности. Приведены необходимые примеры решения типовых задач.

Предназначено для студентов всех специальностей, изучающих дисциплину «Математика».

Табл. 6. Ил. 41. Библиогр.: 12 назв.

Оригинал, изображение, двойной, тройной, криволинейный, поверхностный интеграл, скалярное, векторное поле, градиент, поток, циркуляция, ротор, дивергенция, числовой, функциональный ряд

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (доцент кафедры высшей математики А.Б. Дюбуа)

Б у х е н с к и й Кирилл Валентинович
Е л к и н а Наталья Викторовна
Л у к ь я н о в а Галина Сергеевна

Опорные конспекты по высшей математике
Часть 3

Редактор Р.К. Мангутова
Корректор С.В. Макушина

Подписано в печать 17.05.2011. Формат бумаги 60×84 1/16.

Бумага газетная. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 13,75.

Тираж 100 экз. Заказ 2359

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.

©Рязанский государственный
радиотехнический университет, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Условные обозначения.....	6
ГЛАВА 1. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	8
§ 1. Преобразование Лапласа и его свойства.....	9
1.1. Основные понятия.....	9
1.2. Свойства преобразования Лапласа.....	12
1.3. Таблица оригиналов и изображений.....	19
§ 2. Решение ДУ и СДУ с помощью операционного исчисления.....	23
ГЛАВА 2. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.....	29
§ 1. Двойной интеграл (ДИ).....	29
1.1. Понятие ДИ.....	29
1.2. Свойства ДИ.....	30
1.3. Вычисление ДИ.....	31
1.4. Приложения ДИ.....	35
1.5. Примеры решения задач.....	37
§ 2. Тройной интеграл (ТИ).....	45
2.1. Понятие ТИ.....	45
2.2. Свойства ТИ.....	46
2.3. Вычисление ТИ.....	46
2.4. Приложения ТИ.....	49
2.5. Примеры решения задач.....	51
ГЛАВА 3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.....	56
§ 1. Криволинейный интеграл (КИ) 1-го рода (по длине дуги).....	56
1.1. Понятие КИ 1-го рода.....	56
1.2. Свойства КИ 1-го рода	57
1.3. Вычисление КИ 1-го рода.....	58
1.4. Приложения КИ 1-го рода.....	59
1.5. Примеры решения задач.....	60
§ 2. Криволинейный интеграл (КИ) 2-го рода (по координатам).....	64
2.1. Понятие КИ 2-го рода	64
2.2. Свойства КИ 2-го рода	65
2.3. Вычисление КИ 2-го рода	65
2.4. Связь между КИ 1-го рода и 2-го рода.....	66

2.5. Формула Грина.....	67
2.6. Условия независимости КИ 2-го рода от пути интегрирования.....	68
2.7. Интегрирование полных дифференциалов.....	69
2.8. Приложения КИ 2-го рода.....	70
2.9. Примеры решения задач.....	71
§ 3. Поверхностный интеграл (ПИ) 1-го рода.....	74
3.1. Понятие ПИ 1-го рода.....	74
3.2. Свойства ПИ 1-го рода.....	75
3.3. Вычисление ПИ 1-го рода.....	75
3.4. Приложения ПИ 1-го рода.....	77
3.5. Примеры решения задач.....	78
§ 4. Поверхностный интеграл (ПИ) 2-го рода.....	83
4.1. Понятие ПИ 2-го рода.....	83
4.2. Свойства ПИ 2-го рода.....	86
4.3. Вычисление ПИ 2-го рода.....	86
4.4. Формула Остроградского – Гаусса.....	90
4.5. Формула Стокса.....	90
4.6. Приложения ПИ 2-го рода.....	91
4.7. Примеры решения задач.....	91
ГЛАВА 4. СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПОЛЯ.....	102
§ 1. Скалярное поле (СП).....	102
1.1. Определение СП. Линии и поверхности уровня.....	102
1.2. Производная по направлению. Градиент СП.....	103
§ 2. Векторное поле (ВП).....	105
2.1. Определение ВП. Векторные линии.....	105
2.2. Поток и дивергенция ВП (векторная запись формулы Остроградского – Гаусса).....	107
2.3. Циркуляция и ротор ВП (векторная запись формулы Стокса).....	113
ГЛАВА 5. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.....	122
§ 1. Понятие числового ряда. Действия с рядами.....	123
1.1. Определение числового ряда и его суммы.....	123
1.2. Условия сходимости числовых рядов.....	126
1.3. Простейшие свойства сходящихся ЧР.....	128
§ 2. Теоремы сравнения для рядов с положительными членами.....	129

§ 3. Признаки сходимости рядов с положительными членами.....	138
§ 4. Знакопеременяющиеся числовые ряды.....	147
§ 5. Знакопеременные числовые ряды.....	152
ГЛАВА 6. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ	157
§ 1. Функциональные последовательности и ряды.....	157
1.1. Функциональная последовательность и функциональный ряд	157
1.2. Равномерная сходимость и ее признаки	160
1.3. Свойства равномерно сходящихся рядов.....	163
§ 2. Степенные ряды и их свойства.....	164
2.1. Степенной ряд и его интервал сходимости.....	164
2.2. Область сходимости степенного ряда.....	167
2.3. Свойства степенных рядов.....	170
§ 3. Разложение функции в ряд Тейлора.....	172
3.1. Определение ряда Тейлора.....	172
3.2. Ряд Маклорена для некоторых элементарных функций.....	175
§ 4. Приложение степенных рядов.....	183
4.1. Приближенное вычисление значений функции.....	183
4.2. Приближенное вычисление определенных интегралов.....	187
4.3. Приближенное решение ДУ.....	189
ГЛАВА 7. РЯДЫ ФУРЬЕ.....	195
§ 1. Тригонометрический ряд Фурье для 2π -периодической функции.....	195
§ 2. Разложение в ряд Фурье 2π -периодических четных и нечетных функций.....	202
§ 3. Общий случай разложения в тригонометрический ряд Фурье.....	205
3.1. Разложение в ряд Фурье 2ℓ -периодических функций.....	205
3.2. Разложение в ряд Фурье непериодической функции.....	208
§ 4. Ряд Фурье в комплексной форме.....	215
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.....	219

Условные обозначения

\blacktriangleleft	– начало решения примера
\blacktriangleright	– решение примера завершено
\emptyset	– пустое множество
$A \Rightarrow B$	– из высказывания A следует высказывание B
$A \Leftrightarrow B$	– высказывания A и B равносильны
\mathbf{N}	– множество натуральных чисел
\mathbf{Z}	– множество целых чисел
\mathbf{Q}	– множество рациональных чисел
\mathbf{R}	– множество действительных чисел
$x \in X$	– элемент x принадлежит множеству X
$i = \overline{1, n}$	– число i принимает последовательно все значения от 1 до n из множества \mathbf{N}
\forall	– квантор всеобщности (любой, для всякого)
\exists	– квантор существования (существует)
$f(x) \equiv 0$	– $f(x)$ тождественный ноль
$\{u_n(x)\} \Rightarrow f(x)$	– последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $f(x)$
Опр.	– определение
ДИ	– двойной интеграл
ТИ	– тройной интеграл
КИ	– криволинейный интеграл
ПИ	– поверхностный интеграл
ПСК	– полярная система координат
ДСК	– декартова система координат
ЦСК	– цилиндрическая система координат
ССК	– сферическая система координат
СП	– скалярное поле
ВП	– векторное поле

ЧР	– числовой ряд
ЗЧР	– знакопеременный числовой ряд
ФП	– функциональная последовательность
ФР	– функциональный ряд
ТР	– тригонометрический ряд
сл. обр.	– следующим образом
сл–но	– следовательно
т. и т.т.	– тогда и только тогда
т.о.	– таким образом
т.е.	– то есть
т.к.	– так как
т.д.	– так далее

ГЛАВА 1. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Операционное исчисление является одной из глав современного математического анализа. Интегральное преобразование Лапласа и построенное на его базе операционное исчисление – эффективный аппарат решения дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и в частных производных), дифференциально-разностных и интегральных уравнений, к которым приводятся задачи электротехники, радиотехники, электроники, теории автоматического регулирования, теплотехники, механики и других областей науки и техники. Заметим, что операционное исчисление строится и на других преобразованиях, например Фурье, Ханкеля, Меллина и др.

Идея применения операционного метода заключается в следующем. Пусть требуется найти функцию $f(t)$ из некоторого уравнения, содержащего эту функцию под знаком производных и интегралов. От искомой функции $f(t)$ (ее называют *оригиналом*) переходят к другой функции $F(p)$ (ее называют *изображением*), являющейся результатом преобразования $f(t)$. В соответствии с правилами операционного исчисления операции над оригиналом заменяют соответствующими операциями над изображением, которые являются более простыми, например дифференцированию $f(t)$ соответствует умножение $F(p)$ на p , интегрированию – деление на p и т. д. Это позволяет перейти от сложного уравнения относительно $f(t)$ к более простому уравнению относительно $F(p)$, называемому операторным, например от дифференциального уравнения – к алгебраическому. Решив операторное уравнение, от изображения $F(p)$ переходят к оригиналу $f(t)$ – искомой функции. Таким образом, решение задачи операционным методом связано с двумя этапами: нахождением изображения искомого решения и обратным переходом к оригиналу.

Применение операционного метода можно сравнить с логарифмированием, которое позволяет сложные действия над числами заменить более простыми действиями над их логарифма-

ми, после чего от найденного логарифма снова переходят к искомому числу. Здесь роль оригиналов играют числа, а роль изображений – их логарифмы.

§ 1. Преобразование Лапласа и его свойства

1.1. Основные понятия

Опр. 1. Функция $f : t \rightarrow f(t)$ называется *оригиналом*, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) функция f определена на \mathbf{R} , причем $\forall t < 0 : f(t) = 0$;
- 2) функция f непрерывна или кусочно-непрерывна на \mathbf{R} (это значит, что она или непрерывна, или имеет точки разрыва первого рода, число которых конечно на любом конечном интервале);
- 3) $\exists M > 0 \exists s_0 \geq 0 \forall t \in \mathbf{R} : |f(t)| < Me^{s_0 t}$ (то есть функция $f(t)$ возрастает медленнее экспоненциальной функции. При этом s_0 называется *показателем роста* функции $f(t)$. Для ограниченных функций можно принять $s_0 = 0$).

Рассмотрим эти условия несколько подробнее. Условия 1 и 3 выполняются для большинства функций, отвечающих физическим процессам, в которых t понимается как время. Условие 2 оправдано тем, что при изучении процесса безразлично, как ведут себя рассматриваемые функции до некоторого начального момента времени, который, разумеется, можно принять за момент $t = 0$.

В связи с условием 2 в дальнейшем изложении, где это потребуется, будем записывать для краткости лишь то выражение функции $f(t)$, которое она имеет для $t \geq 0$, подразумевая, что для $t < 0$ $f(t) = 0$. Например, запись $f(t) = t^2$ должна пони-

маться так:
$$f(t) = \begin{cases} t^2, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Аналогично, если дано выражение $f(t-a)$, где $a \geq 0$, то оно имеет место лишь для $t \geq a$, тогда как для $t < a$ функция $f(t-a) = 0$.

Заметим, что если функция $f(t)$ не удовлетворяет хотя бы одному из указанных трех условий, то она не является оригиналом. Так, для функции $f(t) = \frac{1}{t}$ нарушено условие 1 (в точке

$t = 0$ она терпит разрыв второго рода), для функции $f(t) = te^{t^2}$ не выполняется условие 3 (она растет быстрее показательной функции); поэтому эти функции не могут быть оригиналами.

Отметим также, что необязательно считать оригинал $f(t)$ действительной функцией. Функция $f(t)$ может быть и комплексно-значной, то есть иметь вид $f(t) = u(t) + iv(t)$. При этом действительная и мнимая части $u(t)$ и $v(t)$ должны быть оригиналами, то есть удовлетворять условиям 1,2,3.

Опр. 2. Функция комплексной переменной $p = \alpha + i\beta$ ($\alpha > 0$)

$$F : p \rightarrow F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (1)$$

называется *изображением* (L -изображением) оригинала f .

Операцию перехода от оригинала к изображению в соответствии с формулой (1) называют *прямым преобразованием Лапласа*. Оригиналу и изображению обозначаются как $F(p) = L\{f(t)\}$, $F(p) \rightarrow f(t)$, $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$.

Для оригинала и изображения выполняется соотношение

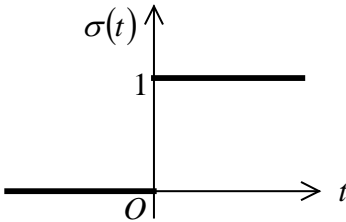
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(p)e^{pt} dt,$$

которое называется *обратным преобразованием Лапласа* (отыскание оригинала по изображению).

Теорема. Несобственный интеграл $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$

является абсолютно сходящимся при $\alpha > s_0$, $\alpha = \operatorname{Re} p$ (s_0 из опр. 1 оригинала).

Опр. 3. Функция $\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ называется *единичной функцией Хевисайда*.



Другие обозначения единичной функции – это $1(t)$ или 1 .

Очевидно, эта функция является оригиналом, так как она удовлетворяет условиям 1,2,3 опр. 1. Найдём изображение функции Хевисайда по определению 2:

$$F(p) = L\{1(t)\} = \int_0^{+\infty} 1(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}.$$
 Та-

ким образом, $\frac{1}{p} \rightarrow 1$.

В связи с введением функции Хевисайда отметим следующее. Когда идет речь о некоторой функции – оригинале, например e^t , $\sin t$ и т.п., то всегда подразумевается, что

$$f(t) = \begin{cases} e^t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad f(t) = \begin{cases} \sin t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

С помощью функции $\sigma(t)$ можно записать:

$$f_1(t) = \sigma(t)e^t, \quad f_2(t) = \sigma(t)\sin t.$$

Роль множителя $\sigma(t)$ состоит в том, что он «гасит» (обращает в нуль) функцию при $t < 0$. Однако для сокращения записи множитель $\sigma(t)$ иногда опускают.

Найдем изображение показательной функции $f(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$ по определению. В результате вычислений

$$F(p) = L\{e^{\alpha t}\} = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-p)t} dt = \frac{1}{\alpha-p} e^{(\alpha-p)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-\alpha}$$

получим $\frac{1}{p-\alpha} \rightarrow e^{\alpha t}$.

1.2. Свойства преобразования Лапласа

1. Свойство линейности.

Теорема линейности. Если функции f_1, f_2, \dots, f_n являются оригиналами, то $L\left\{\sum_{i=1}^n c_i f_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n c_i L\{f_i(t)\}$, $c_i \in \mathbf{R}$

(то есть линейной комбинации оригиналов соответствует такая же линейная комбинация изображений).

Следствие. Так как $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, то

$$L\{\cos t\} = \frac{1}{2} (L\{e^{it}\} + L\{e^{-it}\}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i} \right) = \frac{p}{p^2+1},$$

$$\frac{p}{p^2+1} \rightarrow \cos t.$$

Аналогично

$$\frac{1}{p^2+1} \rightarrow \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad \frac{p}{p^2-1} \rightarrow \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

$$\frac{1}{p^2-1} \rightarrow \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

2. Изображение оригинала с изменённым масштабом независимой переменной.

Теорема подобия. Если $f(t) \leftarrow F(p)$, то

$$f(at) \leftarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad a > 0$$

(то есть умножение аргумента оригинала на положительное число a приводит к делению аргумента изображения и самого изображения $F(p)$ на это число).

Следствие. В силу того, что $\sin t \leftarrow \frac{1}{p^2 + 1}$,

$$\sin \beta t \leftarrow \frac{1}{\beta} \frac{1}{\left(\frac{p}{\beta}\right)^2 + 1} = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}. \text{ Так же}$$

$$\frac{p}{p^2 + \beta^2} \rightarrow \cos \beta t, \quad \frac{p}{p^2 - \beta^2} \rightarrow \operatorname{ch} \beta t,$$

$$\frac{b}{p^2 + \beta^2} \rightarrow \operatorname{sh} \beta t.$$

3. Смещение изображения.

Теорема смещения. Если $f(t) \leftarrow F(p)$, то $F(p - p_0) \rightarrow e^{p_0 t} f(t)$

(то есть умножение оригинала на функцию $e^{p_0 t}$ влечет за собой «смещение» аргумента изображения на p_0).

Следствие. $\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2} \rightarrow e^{\alpha t} \cos \beta t,$

$$\frac{b}{(p - \alpha)^2 + \beta^2} \rightarrow e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 - \beta^2} \rightarrow e^{\alpha t} \operatorname{ch} \beta t,$$

$$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 - \beta^2} \rightarrow e^{\alpha t} \operatorname{sh} \beta t.$$

Пример 1. Для изображения $F(p) = \frac{7}{p^2 + 10p + 41}$ найти

оригинал.

◀ Выполнив преобразования, получим

$$F(p) = \frac{7}{(p+5)^2 + 16} = \frac{7}{4} \cdot \frac{4}{(p+5)^2 + 4^2}.$$

Тогда $F(p) \rightarrow f(t) = \frac{7}{4} e^{-5t} \sin 4t$. ►

4. Запаздывание аргумента оригинала.

Теорема запаздывания. Если $f(t) \leftarrow F(p)$, то $f(t - \tau) \leftarrow e^{-p\tau} F(p)$, где $\tau > 0$

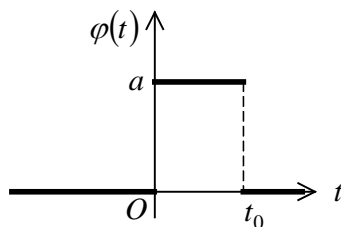
(то есть запаздывание аргумента оригинала на положительную величину τ приводит к умножению изображения оригинала без запаздывания на $e^{-p\tau}$).

Теорема запаздывания является удобным способом для нахождения изображений кусочно-непрерывных функций, которыми, как правило, описываются импульсные процессы.

Часто встречающиеся в технических приложениях кусочно-непрерывные и периодические функции имеют различные аналитические выражения в различных промежутках значений аргумента. С помощью функции Хевисайда они могут быть записаны единым аналитическим выражением, после чего успешно применяется теорема запаздывания для получения изображений ступенчатых и периодических функций.

Пример 2. Найти изображение импульса

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ a, & \text{если } 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & \text{если } t > t_0, \end{cases}$$



действующего в течение промежутка времени t_0 .

◀ С помощью функции Хевисайда данную функцию можно записать единым аналитическим выражением

$$\varphi(t) = a[\sigma(t) - \sigma(t - t_0)].$$

Воспользовавшись соответствием $\sigma(t) \leftarrow \frac{1}{p}$ и теоремой запаздывания, найдем $L\{\sigma(t-t_0)\} = \frac{e^{-pt_0}}{p}$. И, наконец, по свойству линейности получаем

$$L\{\varphi(t)\} = a \left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-pt_0}}{p} \right) = \frac{a}{p} (1 - e^{-pt_0}). \blacktriangleright$$

5. Теорема единственности.

Если для оригиналов f_1 и f_2 $L\{f_1(t)\} = L\{f_2(t)\}$, то оригиналы f_1 и f_2 равны.

6. Дельта-функция (δ -функция).

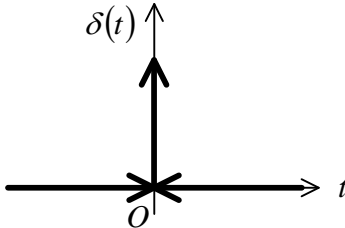
Рассмотрим функцию

$$\delta_1(t) = \frac{1}{t_0} (\sigma(t) - \sigma(t-t_0)) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{t_0}, & 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & 0 < t_0 < t. \end{cases}$$

Изображение

$$L\{\delta_1(t)\} = \frac{1}{t_0} (L\{\sigma(t)\} - L\{\sigma(t-t_0)\}) = \frac{1}{t_0} \left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-t_0 p}}{p} \right).$$

Опр. 4. δ -функцией называется $\delta(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \delta_1(t)$.



Найдём изображение δ -функции:

$$L\{\delta(t)\} = \lim_{t_0 \rightarrow 0} L\{\delta_1(t)\} = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t_0} \left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-t_0 p}}{p} \right) \right) = 1, \quad \delta(t) \leftarrow 1.$$

7. Изображение производной оригинала.

Теорема дифференцирования оригинала. Если оригинал f имеет изображение $L\{f(t)\} = F(p)$, то

$$L\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$$

(то есть дифференцирование оригинала сводится к умножению его изображения на параметр p и вычитанию $f(0)$, где под $f(0)$ следует понимать $\lim_{t \rightarrow +0} f(t)$).

Замечание. Если функция оригинала f n раз дифференцируема, то

$$\begin{aligned} f'(t) &\leftarrow pF(p) - f(0), \\ f''(t) &\leftarrow p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0), \\ f'''(t) &\leftarrow p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0), \\ &\dots \\ f^{(n)}(t) &\leftarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \\ &\quad - p^{n-2} f'(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

8. Дифференцирование изображения.

Теорема дифференцирования изображения. Если оригинал f имеет изображение F , то

$$\frac{dF}{dp} \rightarrow -t f(t),$$

(то есть дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на «минус аргумент»).

Обобщение: $\frac{d^n F}{dp^n} \rightarrow (-1)^n t^n f(t), n \in \mathbf{N}.$

Следствие 1. По данной теореме из формулы $\frac{1}{p} \rightarrow 1$ сле-

дует, что $\frac{1}{p^2} \rightarrow t$, $\frac{2}{p^3} \rightarrow t^2$, ..., $\frac{k!}{p^{k+1}} \rightarrow t^k$.

2. Так как $\frac{1}{p-\alpha} \rightarrow e^{\alpha t}$, то $\frac{k!}{(p-\alpha)^{k+1}} \rightarrow t^k e^{\alpha t}$.

3. $\frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2} \rightarrow t \cos \beta t$.

4. $\frac{2\beta p}{(p^2 + \beta^2)^2} \rightarrow t \sin \beta t$.

Правило дифференцирования изображения может быть весьма эффективно использовано для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

9. Интегрирование оригиналов и изображений.

Теорема интегрирования оригинала. Если $f(t) \leftarrow F(p)$,

$$\text{то } \int_0^t f(\tau) d\tau \leftarrow \frac{F(p)}{p}$$

(то есть интегрированию оригинала в пределах от 0 до t соответствует деление изображения на параметр p).

Пример 3. Найти оригинал изображения $F(p) = \frac{1}{p^2 + p}$.

◀ Из того, что $\frac{1}{p+1} \rightarrow e^{-t}$ и $F(p) = \frac{1/(p+1)}{p}$, по теореме

интегрирования оригинала следует, что

$$F(p) \rightarrow \int_0^t e^{-\tau} d\tau = -e^{-\tau} \Big|_0^t = 1 - e^{-t}. \blacktriangleright$$

Теорема интегрирования изображения. Если

$$f(t) \leftarrow F(p) \text{ и } \int_p^{+\infty} F(p) dp \text{ сходится, то } \int_p^{+\infty} F(p) dp \rightarrow \frac{f(t)}{t}$$

(то есть интегрирование изображения в пределах от p до $+\infty$ соответствует делению оригинала на t).

Пример 4. Рассмотрим функцию $f(t) = \sin t$. Известно, что $\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1} = F(p)$. Вычислим $\int_p^{+\infty} F(z) dz$:

$$\begin{aligned} \int_p^{+\infty} F(z) dz &= \int_p^{+\infty} \frac{dz}{z^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_p^b \frac{dz}{z^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} z \Big|_p^b \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} p) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p. \end{aligned}$$

Получили, что интеграл $\int_p^{+\infty} F(z) dz$ сходится. Тогда по теореме об интегрировании изображения $\int_p^{+\infty} F(z) dz \leftarrow \frac{f(t)}{t}$. В нашем случае

$$\operatorname{arcctg} p \leftarrow \frac{\sin t}{t}.$$

Рассмотрим $\int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$. Данный интеграл является так называемым «неберущимся» интегралом, так как его нельзя вычислить с помощью конечного числа операций.

Функция $Si(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$ называется интегральным синусом. Найдём её изображение. Так как $\sin t/t \rightarrow \operatorname{arcctg} p$, то по теореме об интегрировании оригинала

$$Si(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \rightarrow \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}. \blacktriangleright$$

1.3. Таблица оригиналов и изображений

<i>Оригинал</i>	<i>Изображение</i>
$1(t)$	$\frac{1}{p}$
$\delta(t)$	1
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
t^k	$\frac{k!}{p^{k+1}}$
$t^k e^{\alpha t}$	$\frac{k!}{(p - \alpha)^{k+1}}$
$\sin \beta t$	$\frac{b}{p^2 + \beta^2}$
$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$
$\operatorname{ch} \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$
$\operatorname{sh} \beta t$	$\frac{b}{p^2 + \beta^2}$
$t \cos \beta t$	$\frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}$
$t \sin \beta t$	$\frac{2\beta p}{(p^2 + \beta^2)^2}$
$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$

Нахождение оригинала изображения, являющегося дробно-рациональной функцией

Рассмотрим изображение $F(p) = \frac{Q_m(p)}{R_s(p)}$, где $Q_m(p)$ и $R_s(p)$ – многочлены комплексной переменной p степеней m и s соответственно, $m < s$. Дробь $F(p)$ можно представить в виде суммы простых дробей четырёх типов:

$$\begin{array}{ll} \text{I тип} & \frac{A}{p-a}, & \text{II тип} & \frac{A}{(p-a)^k}, \\ \text{III тип} & \frac{Ap+B}{p^2+ap+b}, & \text{IV тип} & \frac{Ap+B}{(p^2+ap+b)^k}, \end{array}$$

где $A, B, a, b \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$, $D = a^2 - 4b < 0$.

Известны оригиналы простых дробей:

$$\frac{A}{p-\alpha} \rightarrow Ae^{\alpha t}, \quad \frac{A}{(p-\alpha)^k} \rightarrow \frac{At^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{\alpha t},$$

$$\begin{aligned} \frac{Ap+B}{p^2+ap+b} &= \frac{Ap+B}{(p+a/2)^2 + \left(\sqrt{b-a^2/4}\right)^2} = \\ &= A \cdot \frac{p+a/2}{(p+a/2)^2 + \left(\sqrt{b-a^2/4}\right)^2} + \\ &+ \frac{\left(B - \frac{Aa}{2}\right)}{\sqrt{b-a^2/4}} \cdot \frac{\sqrt{b-a^2/4}}{(p+a/2)^2 + \left(\sqrt{b-a^2/4}\right)^2} \rightarrow \\ &\rightarrow Ae^{-\frac{at}{2}} \cos\left(\sqrt{b-a^2/4}t\right) + \frac{B - \frac{Aa}{2}}{\sqrt{b-a^2/4}} e^{-\frac{at}{2}} \sin\left(\sqrt{b-a^2/4}t\right). \end{aligned}$$

Оригинал изображения $F(p)$ находится с помощью теоремы линейности.

Пример 5. По изображению $F(p) = \frac{3p+1}{p^2+4p+13}$ найти

оригинал.

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft F(p) &= \frac{3p+1}{p^2+4p+13} = \left[\begin{array}{l} \text{выделим в знаменателе} \\ \text{полный квадрат} \end{array} \right] = \\ &= \frac{3p+1}{(p+2)^2+9} = \frac{3(p+2)-5}{(p+2)^2+9} = \\ &= 3 \frac{p+2}{(p+2)^2+3^2} - \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{(p+2)^2+3^2} \quad \leftarrow \\ &\quad \leftarrow 3 \cos 3t \cdot e^{-2t} - \frac{5}{3} \sin 3t \cdot e^{-2t}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Пример 6. Найти оригинал изображения

$$F(p) = \frac{2p^2-1}{(p-3)(p^2+2p+2)}.$$

\blacktriangleleft Так как

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{2p^2-1}{(p-3)(p^2+2p+2)} = \frac{1}{p-3} + \frac{p+1}{p^2+2p+2}, \\ \frac{1}{p-3} &\rightarrow e^{3t}, \quad \frac{p+1}{p^2+2p+2} = \frac{p+1}{(p+1)^2+1} \rightarrow e^{-t} \cos t, \text{ то} \\ F(p) &\rightarrow e^{3t} + e^{-t} \cos t. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

10. Свертка (умножение) изображений.

Опр. 5. Сверткой функций f_1 и f_2 называется

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau.$$

Пример 7. Найти свертку функций $f_1(t) = t$ и $f_2(t) = e^{2t}$.

\blacktriangleleft Используя определение свертки, имеем

$$\begin{aligned}
 f_1 * f_2 &= \int_0^t \tau \cdot e^{2(t-\tau)} d\tau = e^{2t} \int_0^t \tau \cdot e^{-2\tau} d\tau = \left. \begin{array}{l} u = \tau \\ dv = e^{-2\tau} d\tau \\ du = d\tau \\ v = -\frac{1}{2} e^{-2\tau} \end{array} \right| = \\
 &= e^{2t} \left(-\frac{\tau}{2} e^{-2\tau} \Big|_0^t + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-2\tau} d\tau \right) = e^{2t} \left(-\frac{t}{2} e^{-2t} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-2\tau} \Big|_0^t \right) = \\
 &= -\frac{t}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^{2t} \cdot \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

Замечание. Свертка функций обладает свойством коммутативности, то есть

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau = f_2 * f_1.$$

Теорема свертывания. Если оригиналы f_1 и f_2 имеют изображения F_1 и F_2 соответственно, то

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \rightarrow f_1 * f_2$$

(то есть при свертке оригиналов их изображения перемножаются).

Пример 8. По изображению $F(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^2}$ найти оригинал.

нал.

$$\blacktriangleleft F(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)^2} = \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1}. \text{ Так как}$$

$\sin t \rightarrow \frac{1}{p^2 + 1}$, то по теореме о свертке оригиналов (об умножении изображений)

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \leftarrow \sin t * \sin t.$$

Вычислим

$$\begin{aligned}
\sin t * \sin t &= \int_0^t \sin \tau \cdot \sin(t - \tau) d\tau = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t (\cos(\tau - t + \tau) - \cos(\tau + t - \tau)) d\tau = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t (\cos(2\tau - t) - \cos t) d\tau = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin(2\tau - t) - \tau \cos t \right) \Big|_0^t = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin(2t - t) - t \cdot \cos t - \frac{1}{2} \sin(-t) + 0 \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin t - t \cos t + \frac{1}{2} \sin t \right) = \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t).
\end{aligned}$$

Таким образом, $\frac{1}{(p^2 + 1)^2} \leftarrow \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t)$. ►

§ 2. Решение ДУ и СДУ с помощью операционного исчисления

Рассмотрим ЛНДУ n -го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t), \quad (1)$$

где $a_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{0, n}$, функция f непрерывна на $(a; b)$.

Будем искать решение задачи Коши уравнения (1) с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)},$$

$0 \in (a; b)$. Пусть $x(t) \leftarrow X(p)$, $f(t) \leftarrow F(p)$. Умножив каждое слагаемое уравнения (1) на e^{-pt} и проинтегрировав на $[0; +\infty)$, получим

$$a_0 L\{x^{(n)}\} + a_1 L\{x^{(n-1)}\} + \dots + a_{n-1} L\{x'\} + a_n L\{x\} = L\{f(t)\}. \quad (2)$$

Применив теорему о дифференцировании оригинала и её следствие, получим уравнение, равносильное уравнению (2),

$$\begin{aligned}
& a_0(p^n X(p) - p^{n-1}x_0 - \dots - x_0^{(n-1)}) + \\
& + a_1(p^{n-1}X(p) - p^{n-2}x_0 - \dots - x_0^{(n-2)}) + \\
& + \dots + a_{n-1}(pX(p) - x_0) + a_n X(p) = F(p), \text{ или} \\
& (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) X(p) = \\
& = F(p) + (a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) x_0 + \\
& + (a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-2}) x_0' + \\
& + \dots + (a_0 p + a_1) x_0^{(n-2)} + a_0 x_0^{(n-1)}. \tag{3}
\end{aligned}$$

Опр. Уравнение (3) называется *вспомогательным уравнением* для ЛНДУ (1).

Из уравнения (3) алгебраически можно выразить $X(p)$, а затем найти $X(p) \rightarrow x(t)$. Оригинал $x(t)$ является решением задачи Коши уравнения (1) с заданными начальными условиями.

Замечание. Если $x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$, то вспомогательное уравнение (3) имеет решение

$$X(p) = \frac{F(p)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}.$$

Пример 1. Найти решение задачи Коши дифференциального уравнения $x'' + 4x = \sin 3t$ при начальных условиях $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

◀ Обозначим $L\{x(t)\} = X(p)$. Так как $\sin 3t \leftarrow \frac{3}{p^2 + 9}$,

$x''(t) \leftarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p)$, то

$$p^2 X(p) + 4X(p) = \frac{3}{p^2 + 9}, \quad \text{откуда} \quad X(p) = \frac{3}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)}.$$

Раскладываем $X(p)$ на простые дроби:

$$X(p) = \frac{3}{(p^2+4)(p^2+9)} = \frac{Ap+B}{p^2+4} + \frac{Cp+D}{p^2+9} =$$

$$= \frac{(A+C)p^3 + (B+D)p^2 + (9A+4C)p + 9B+4D}{(p^2+4)(p^2+9)}.$$

Решая систему $\begin{cases} A+C=0, \\ B+D=0, \\ 9A+4C=0, \\ 9B+4D=3, \end{cases}$ находим коэффициенты $A=0,$

$$B = \frac{3}{5}, C = 0, D = -\frac{3}{5}.$$

Следовательно,

$$X(p) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{p^2+4} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{p^2+9} \rightarrow x(t) = \frac{3}{10} \sin 2t - \frac{1}{5} \sin 3t. \blacktriangleright$$

Пример 2. Решить ДУ операторным методом:

$$x'' + 4x = \sin 3t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -2.$$

◀ Пусть $x(t) \leftarrow X(p)$. Тогда по теореме о дифференцировании оригинала получим:

$$x'(t) \leftarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$

$$x''(t) \leftarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - p + 2.$$

По таблице изображений и оригиналов: $\sin 3t \leftarrow \frac{3}{p^2+9}$.

Составим операторное уравнение, используя свойство линейности оператора Лапласа:

$$p^2 X(p) - p + 2 + 4X(p) = \frac{3}{p^2+9}.$$

Из полученного уравнения выразим изображение:

$$(p^2+4)X(p) = p - 2 + \frac{3}{p^2+9} \Rightarrow X(p) = \frac{p^3 - 2p^2 + 9p - 15}{(p^2+4)(p^2+9)}.$$

Для нахождения оригинала разложим последнюю дробь на простые дроби, а потом для каждой из них найдем оригинал:

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{p^3 - 2p^2 + 9p - 15}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)} = \frac{Ap + B}{p^2 + 4} + \frac{Cp + D}{p^2 + 9} = \\ &= \frac{(Ap + B)(p^2 + 4) + (Cp + D)(p^2 + 9)}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)} = \\ &= \frac{p^3(A + C) + p^2(B + D) + p(9A + 4C) + (9B + 4D)}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)}. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при соответствующих степенях p у первой и последней дробей, составим и решим СЛАУ:

$$\begin{cases} A + C = 1, \\ B + D = -2, \\ 9A + 4C = 9, \\ 9B + 4D = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -\frac{7}{5}, \\ C = 0, \\ D = -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

Окончательно получим вид изображения:

$$X(p) = \frac{p - \frac{7}{5}}{p^2 + 4} - \frac{\frac{3}{5}}{p^2 + 9}.$$

Для того чтобы найти оригинал, т.е. частное решение исходного ДУ, преобразуем полученные простые дроби:

$$X(p) = \frac{p}{p^2 + 4} - \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p^2 + 4} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{p^2 + 9}.$$

Далее, используя таблицу оригиналов и изображений, находим оригинал $x(t)$:

$$x(t) = \cos 2t - \frac{7}{10} \sin 2t - \frac{1}{5} \sin 3t. \blacktriangleright$$

В большей мере преимущества преобразования Лапласа проявляются при решении систем линейных дифференциальных уравнений. Каждое уравнение данной системы заменяется соответствующим операторным уравнением, тогда вместо СДУ об-

разуется СЛАУ относительно изображений искомых функций. Затем от найденных изображений переходят к искомым функциям. Операционный метод интегрирования СДУ покажем на примере.

Пример 3. Решить СДУ:

$$\begin{cases} \dot{x} + 2x + 4y = 1 + 4t, \\ \dot{y} + x - y = \frac{3}{2}t^2, \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 3.$$

Здесь $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$.

◀ Пусть $x(t) \leftarrow X(p)$, $y(t) \leftarrow Y(p)$. Тогда по теореме о дифференцировании оригинала получим:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) \leftarrow pX(p) - x(0) &= pX(p) + 1, \\ \dot{y}(t) \leftarrow pY(p) - y(0) &= pY(p) - 3. \end{aligned}$$

Используя таблицу изображений и оригиналов, находим:

$$1 \leftarrow \frac{1}{p}, \quad t \leftarrow \frac{1}{p^2}, \quad t^2 \leftarrow \frac{2}{p^3}.$$

Составим операторную систему, используя свойство линейности оператора Лапласа:

$$\begin{cases} pX(p) + 1 + 2X(p) + 4Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{4}{p^2}, \\ pY(p) - 3 + X(p) - Y(p) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{p^3}, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} (p+2) \cdot X(p) + 4Y(p) = \frac{1}{p} + \frac{4}{p^2} - 1 = \frac{-p^2 + p + 4}{p^2}, \\ X(p) + (p-1) \cdot Y(p) = \frac{3}{p^3} + 3 = \frac{3p^3 + 3}{p^3}. \end{cases}$$

Полученную систему удобно решать методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+2 & 4 \\ 1 & p-1 \end{vmatrix} = (p+2)(p-1) - 4 = p^2 + p - 6 = (p-2)(p+3),$$

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} \frac{-p^2+p+4}{p^2} & 4 \\ \frac{3p^3+3}{p^3} & p-1 \end{vmatrix} = -\frac{p^4+10p^3-3p^2+4p+12}{p^3},$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} p+2 & \frac{-p^2+p+4}{p^2} \\ 1 & \frac{3p^3+3}{p^3} \end{vmatrix} = \frac{3p^4+7p^3-p^2-p+6}{p^3},$$

$$X(p) = \frac{\Delta_X}{\Delta} = -\frac{p^4+10p^3-3p^2+4p+12}{p^3(p-2)(p+3)},$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{3p^4+7p^3-p^2-p+6}{p^3(p-2)(p+3)}.$$

Разложим полученные дроби для изображений на простые дроби:

$$X(p) = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} - \frac{13}{5} \cdot \frac{1}{p-2} + \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{p+3},$$

$$Y(p) = -\frac{1}{p^3} + \frac{13}{5} \cdot \frac{1}{p-2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{p+3}.$$

Используя таблицу изображений и оригиналов, находим частное решение исходной системы, т.е. оригиналы полученных функций:

$$x(t) = t^2 + t - \frac{13}{5}e^{2t} + \frac{8}{5}e^{-3t}, \quad y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{13}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t}. \quad \blacktriangleright$$

ГЛАВА 2. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Двойной и тройной интегралы являются обобщением определенного интеграла на случай функции двух и трех переменных соответственно. К понятию двойного интеграла приводит задача о нахождении объема цилиндрического тела, тройного интеграла – массы неоднородного тела. Также с помощью двойного интеграла рассчитываются масса плоской пластинки переменной плотности, статические моменты и центр тяжести пластинки, моменты инерции, с помощью тройного интеграла – статические моменты и моменты инерции тел.

§ 1. Двойной интеграл (ДИ)

1.1. Понятие ДИ

Рассмотрим на плоскости XOY произвольную ограниченную замкнутую область D . Пусть в этой области D задана ограниченная функция $z = f(x, y)$.

Разобьем область D произвольным образом на n частей D_1, D_2, \dots, D_n , не имеющих общих внутренних точек. В каждой такой подобласти D_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$ (рис. 1,а) и вычислим в ней значение функции $f(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, n}$ (рис. 1,б).

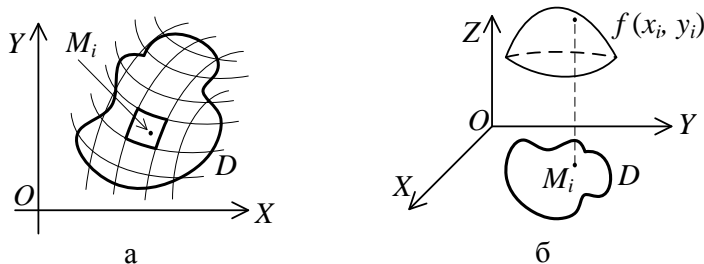


Рис. 1

Опр. 1. Сумма $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i$, где Δs_i – площадь подобласти D_i , $i = \overline{1, n}$, называется *интегральной суммой* функции

$z = f(x, y)$ в области D .

Рассмотрим предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i$ при $n \rightarrow \infty$ таким образом, что $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i \rightarrow 0$, где d_i – диаметр подобласти D_i , $i = \overline{1, n}$. Если этот предел существует (конечный) и не зависит ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора точек $M_i(x_i, y_i)$ в них, тогда он будет называться двойным интегралом от функции $z = f(x, y)$ по области D .

Опр. 2. Двойным интегралом (ДИ) от функции $z = f(x, y)$ по области D называется предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i$ при $n \rightarrow \infty$ ($d \rightarrow 0$). Обозначается:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i.$$

В этом случае функция $z = f(x, y)$ называется *интегрируемой* в области D , сама область D называется *областью интегрирования*, а $dx dy$ (или ds) – *элемент площади*.

Теорема (достаточное условие интегрируемости функции). Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D , то она интегрируема в этой области.

1.2. Свойства ДИ

ДИ обладают такими же свойствами, как и определенные интегралы (однородность, аддитивность, формулы среднего значения и т. д.). Перечислим некоторые из них.

- $\iint_D C \cdot f(x, y) dx dy = C \cdot \iint_D f(x, y) dx dy$, где $C = const$.
- $\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y)) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy \pm \iint_D g(x, y) dx dy$.

3. Если $D = D_1 \cup D_2$, а $D_1 \cap D_2$ состоит из общей для них границы, т.е. D_1 и D_2 не имеют общих внутренних точек, то:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

4. $\iint_D dx dy = S_D$, где S_D – площадь области D .

5. $\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$, если $f(x, y) \geq 0$ в области D .

1.3. Вычисление ДИ

Способ вычисления ДИ от функции $z = f(x, y)$ по области D зависит от вида области D , заданной на плоскости XOY .

Опр. 3. Область называется *правильной в направлении оси OY* , если любая прямая, параллельная оси OY и проходящая через внутреннюю точку области D , пересекает границу этой области в двух различных точках (рис. 2).

Аналогично можно определить область, *правильную в направлении оси OX* .

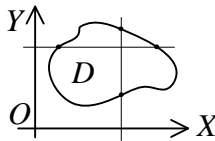


Рис. 2

1-й способ вычисления. Пусть область D ограничена линиями: $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x = a$, $x = b$, причем $y_1(x) \leq y_2(x)$, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывны, $a < b$ (рис. 3). Такая область будет правильной в направлении оси OY .

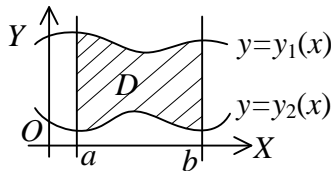


Рис. 3

Тогда будет верна формула:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy,$$

где интеграл в правой части равенства называется *повторным* (или *двукратным*) интегралом от функции $z = f(x, y)$ по области D ,

а интеграл $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ – *внутренним* интегралом.

Замечание 1. При вычислении внутреннего интеграла переменная x считается независимой от y , т.е. постоянной величиной по отношению к y .

Замечание 2. Запись $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ означает:

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

т.е. внешний интеграл вычисляется от результата внутреннего интеграла.

2-й способ вычисления. Пусть область D ограничена линиями: $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $y = c$, $y = d$, причем $x_1(y) \leq x_2(y)$ и $c < d$ (рис. 4). Такая область будет правильной в направлении оси OY .

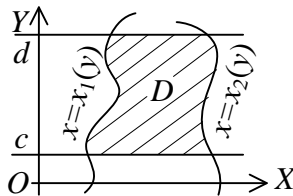


Рис. 4

Тогда будет верна формула:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

Замечание 3. Важно помнить, что внешние пределы у повторного интеграла всегда постоянны, а внутренние, как правило, зависят от переменной интегрирования.

3-й способ вычисления. Если область D не является правильной ни в направлении оси OY , ни в направлении оси OX , то ее необходимо разбить на такие части, которые являются правильными в направлении оси OY или оси OX . Далее для вычисления исходного интеграла нужно использовать свойство 3 ДИ.

4-й способ вычисления. Для упрощения вычисления ДИ часто применяют метод подстановки, т.е. вводят новые переменные.

Пусть в ДИ $\iint_D f(x, y) dx dy$ прямоугольные координаты x и y преобразуются к новым координатам u и v . Они связаны со старыми переменными x и y соотношениями:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v),$$

которые взаимно однозначно и непрерывно отображают область D в плоскости XOY на область D^* в плоскости UOV (рис. 5).

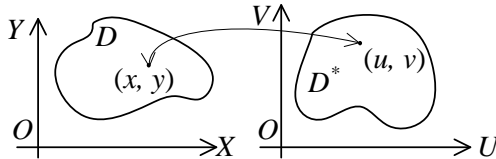


Рис. 5

Если функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$ имеют в некоторой области D^* плоскости UOV непрерывные частные производные первого порядка и ненулевой определитель

$$I(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

(этот определитель называется *определителем Якоби*^{*} или яко-

^{*} Якоби, Карл Густав, – немецкий математик (1804 – 1851).

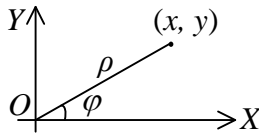
бианом), а функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области D , то имеет место формула замены переменных в ДИ:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |I(u, v)| du dv.$$

Рассмотрим частные случаи замены переменных.

Полярная система координат (ПСК) связана с декартовой системой координат с помощью соотношений:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \text{ где } \rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$



При этом можно составить якобиан:

$$\begin{aligned} I(\rho, \varphi) &= \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \\ &= \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho \geq 0. \end{aligned}$$

Поэтому формула замены переменных примет вид:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cdot \rho d\rho d\varphi,$$

где D^* – область в ПСК, получаемая из области D с помощью преобразования $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. В полученном ДИ можно расставить границы одним из предыдущих способов вычисления.

Полезно знать, что в ПСК верна формула $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Замечание 4. Переход в ПСК полезно осуществлять в случае, если область D есть круг, круговое кольцо или их часть.

Обобщенная полярная система координат (ОПСК) связана с декартовой системой координат с помощью соотношений:

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \varphi, \\ y = b\rho \sin \varphi, \end{cases} \text{ где } \rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, a, b > 0, a \neq b.$$

Для такой системы координат якобиан $|I(\rho, \varphi)| = ab\rho$. Поэтому формула замены переменных будет следующей:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(a\rho \cos \varphi, b\rho \sin \varphi) \cdot ab\rho d\rho d\varphi.$$

Замечание 5. Переход в ОПСК полезно осуществлять в случае, если область D есть эллипс (каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$), эллиптическое кольцо или их часть.

Полезно знать, что в ОПСК верна формула $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2$.

1.4. Приложения ДИ

ДИ используются при решении многих геометрических и физических задач. Рассмотрим некоторые из них.

Площадь плоской фигуры.

Пусть задана на плоскости XOY ограниченная замкнутая область D . Тогда по свойству 4 ДИ:

$$S_D = \iint_D dx dy,$$

где S_D – площадь области D .

Объем цилиндрического тела.

Рассмотрим цилиндрическое тело T , которое ограничено: сверху – поверхностью $z = f(x, y)$, причем $f(x, y) \geq 0$, снизу – замкнутой областью D на плоскости XOY , сбоку – цилиндрической поверхностью, у которой образующая параллельна оси OZ , а направляющая – граница области D (рис. 6).

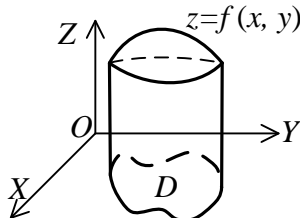


Рис. 6

Объем V_T такого цилиндрического тела равен:

$$V_T = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

В этом состоит геометрический смысл ДИ.

Если цилиндрическое тело T ограничено поверхностями $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$, причем $(x, y) \in D$ и $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$, тогда объем такого тела может быть вычислен по формуле:

$$V_T = \iint_D (z_2(x, y) - z_1(x, y)) dx dy.$$

Площадь поверхности.

Пусть задана поверхность $z = f(x, y)$, где $(x, y) \in D$, причем функция $f(x, y)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны в замкнутой области D . Тогда площадь заданной поверхности $S_{нов}$ может быть вычислена по формуле:

$$S_{нов} = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy.$$

Масса плоской фигуры.

Если плоская фигура D имеет поверхностную плотность распределения масс $\mu(x, y)$, непрерывную в D , тогда масса m_D этой фигуры D равна:

$$m_D = \iint_D \mu(x, y) dx dy.$$

В этом состоит физический смысл ДИ.

Полный заряд пластины.

Пусть электрический заряд распределен по области D в плоскости $ХОУ$ и его плотность распределения задана функцией $q(x, y)$. Тогда полный заряд пластины Q_D определяется выражением:

$$Q_D = \iint_D q(x, y) dx dy.$$

Моменты инерции плоской фигуры.

Моменты инерции J_X , J_Y и J_O плоской материальной пластины D с поверхностной плотностью $\mu(x, y)$ относитель-

но координатных осей OX , OY и начала координат $O(0; 0)$ соответственно вычисляются по формулам:

$$J_X = \iint_D y^2 \mu(x, y) dx dy, \quad J_Y = \iint_D x^2 \mu(x, y) dx dy,$$

$$J_O = J_x + J_y = \iint_D (x^2 + y^2) \cdot \mu(x, y) dx dy.$$

В случае однородной пластины ($\mu = 1$) эти формулы принимают более простой вид:

$$J_X = \iint_D y^2 dx dy, \quad J_Y = \iint_D x^2 dx dy, \quad J_O = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

Статические моменты плоской пластины.

Статические моменты пластины D с плотностью $\mu(x, y)$ относительно осей OX и OY соответственно равны:

$$M_X = \iint_D y \cdot \mu(x, y) dx dy, \quad M_Y = \iint_D x \cdot \mu(x, y) dx dy.$$

В случае однородной пластины ($\mu = 1$):

$$M_X = \iint_D y dx dy, \quad M_Y = \iint_D x dx dy.$$

Координаты центра тяжести плоской фигуры.

Зная массу m плоской фигуры D и ее статические моменты M_X и M_Y , можно вычислить координаты центра тяжести (x_c, y_c) заданной фигуры D с плотностью $\mu(x, y)$:

$$x_c = \frac{M_Y}{m}, \quad y_c = \frac{M_X}{m}.$$

1.5. Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить интеграл: $I = \iint_D (x + y) dx dy$, где область D ограничена прямыми: $y = 1$, $x = 2$, $x + 2y = 6$.

◀ Заданная область D – треугольник ABC (рис.7), где $A(2; 1)$, $B(2; 2)$ и $C(4; 1)$.

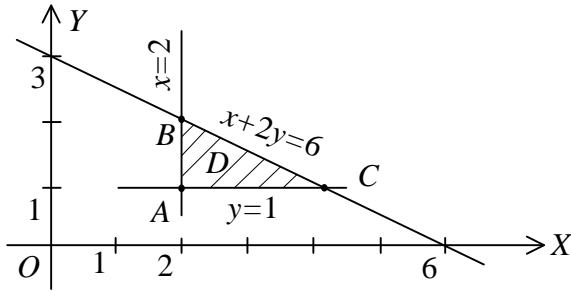


Рис. 7

В данном случае границы можно расставить первым и вторым способами (см. п. 1.3 данного параграфа).

1-й способ. Будем считать, что область D правильная в направлении оси OY , ограничена прямыми $x_1 = 2 < x_2 = 4$ и $y_1 = 1 \leq y_2 = \frac{6-x}{2}$. Тогда:

$$I = \iint_D (x+y) dx dy = \int_2^4 dx \int_1^{\frac{6-x}{2}} (x+y) dy.$$

Вычислять ДИ начинаем «с конца», т.е. с внутреннего интеграла. При этом считаем, что переменная x не зависит от y , по которой вычисляется интеграл, поэтому получим:

$$\begin{aligned} I &= \int_2^4 dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_1^{\frac{6-x}{2}} = \int_2^4 \left(x \cdot \left(\frac{6-x}{2} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{6-x}{2} \right)^2 - 1^2 \right) \right) dx = \\ &= \int_2^4 \left(-\frac{3}{8} x^2 + \frac{1}{2} x + 4 \right) dx = \left(-\frac{1}{8} x^3 + \frac{1}{4} x^2 + 4x \right) \Big|_2^4 = 4. \end{aligned}$$

2-й способ. Можно считать, что область D правильная в направлении оси OX , ограничена прямыми: $y_1 = 1 < y_2 = 2$ и $x_1 = 2 \leq x_2 = 6 - 2y$. Поэтому:

$$I = \iint_D (x+y) dx dy = \int_1^2 dy \int_2^{6-2y} (x+y) dx.$$

Аналогично вычислять ДИ начинаем «с конца», т.е. с внутреннего интеграла. При этом переменная y не зависит от x , по которой вычисляется интеграл, поэтому получим:

$$I = \int_1^2 dy \left(\frac{x^2}{2} + yx \right) \Big|_2^{6-2y} = \int_1^2 \left(\frac{1}{2} \left((6-2y)^2 - 2^2 \right) + y(6-2y-2) \right) dy = \\ = \int_1^2 (16 - 8y) dy = 4. \blacktriangleright$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры D , ограниченной прямой $y = \frac{3}{2}x$ и параболой $y = 4 - (x-1)^2$.

◀ Искомую площадь вычислим по формуле $S_D = \iint_D dx dy$.

Для того чтобы расставить границы в ДИ, изобразим заданную фигуру D (рис. 8).

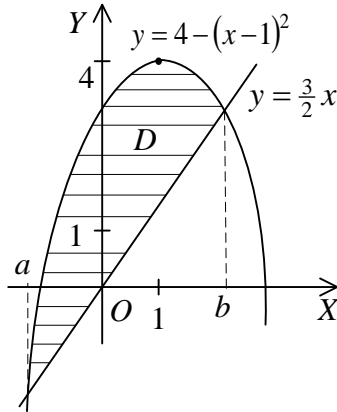


Рис. 8

Данная фигура D правильная в направлении оси OY , ограничена линиями $y_1 = \frac{3}{2}x \leq y_2 = 4 - (x-1)^2$ и $x_1 = a < x_2 = b$, т.е. границы в ДИ можно расставить первым способом (см. п. 1.3 данного параграфа). Неизвестные числа a и b найдем из системы:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x, \\ y = 4 - (x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a = -\frac{3}{2}, \\ x_2 = b = 2. \end{cases}$$

Тогда вычислим требуемую площадь:

$$\begin{aligned} S_D &= \iint_D dx dy = \int_{-\frac{3}{2}}^2 dx \int_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2} dy = \int_{-\frac{3}{2}}^2 \left(y \Big|_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2} \right) dx = \\ &= \int_{-\frac{3}{2}}^2 \left(4 - (x-1)^2 - \frac{3}{2}x \right) dx = \int_{-\frac{3}{2}}^2 \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + 3 \right) dx = \frac{343}{48}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Пример 3. Найти массу пластины D : $y \geq x$, $y \leq x+3$, $y \geq 1-2x$, $y \leq 5-2x$ с переменной поверхностной плотностью $\mu(x, y) = 3x + 6y$.

◀ Искомая масса $m_D = \iint_D \mu(x, y) dx dy$, но предварительно изобразим заданную область D (рис.9).

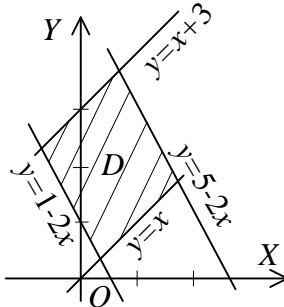


Рис. 9

Расставить пределы интегрирования в искомом интеграле не получится ни способом 1, ни способом 2 (см. п. 1.3 данного параграфа). Можно попытаться по 3-му способу разбить область D на части, а далее воспользоваться свойством 3 ДИ. Но при этом получится минимум две части, а значит, и интегралов придется вычислять тоже минимум два.

Поэтому воспользуемся 4-м способом вычисления (см. п.1.3 данного параграфа) ДИ, т.е. выполним замену переменных:

$$\begin{cases} y \geq x, \\ y \leq x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - x \geq 0, \\ y - x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow u = y - x,$$

$$\begin{cases} y \geq 1 - 2x, \\ y \leq 5 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 2x \geq 1, \\ y + 2x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow v = y + 2x.$$

Тогда для новой области D^* можно найти границы:

$$\begin{cases} y - x \geq 0, \\ y - x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq u \leq 3,$$

$$\begin{cases} y + 2x \geq 1, \\ y + 2x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq v \leq 5.$$

Поэтому область D^* будет прямоугольником (рис. 10), по которому границы интегрирования впоследствии можно представлять способом 1 или способом 2.

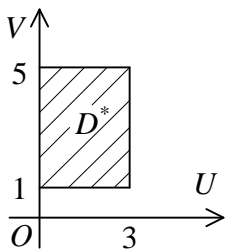


Рис. 10

Выразим переменные x и y через u и v :

$$\begin{cases} y - x = u, \\ y + 2x = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}(u - v), \\ y = \frac{1}{3}(2u + v). \end{cases}$$

Найдем якобиан:

$$I(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}.$$

При замене переменных изменится и поверхностная плотность:

$$\begin{aligned}\mu(x, y) = 3x + 6y &\Rightarrow \mu(u, v) = 3 \cdot \frac{1}{3}(u - v) + 6 \cdot \frac{1}{3}(2u + v) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu(u, v) = 3u + v.\end{aligned}$$

Остается вычислить искомую массу:

$$\begin{aligned}m_D &= \iint_D \mu(x, y) dx dy = \iint_{D^*} \mu(u, v) \cdot |I(u, v)| du dv = \\ &= \frac{1}{3} \iint_{D^*} (3u + v) du dv = \frac{1}{3} \int_0^3 du \int_1^5 (3u + v) dv = \frac{1}{3} \int_0^3 du \left(3uv + \frac{1}{2}v^2 \right) \Big|_1^5 = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 du \left(3uv + \frac{v^2}{2} \right) \Big|_1^5 = \frac{1}{3} \int_0^3 \left(3u \cdot 5 + \frac{5^2}{2} - 3u \cdot 1 - \frac{1^2}{2} \right) du = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 (12u - 12) du = 6. \blacktriangleright\end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить площадь поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

◀ Сфера симметрична относительно координатных плоскостей, поэтому вычислим площадь поверхности лишь части сферы, лежащей в 1-м октанте ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$), затем результат умножим на 8.

Будем использовать формулу $S_{нов} = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$,

где D – проекция части сферы на плоскость XOY , а уравнение поверхности $z(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. Тогда:

$$\begin{aligned}z'_x &= \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}},\end{aligned}$$

$$\text{поэтому } S_{нов} = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = 4 \cdot \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}.$$

Так как D – четверть круга $x^2 + y^2 \leq 16$ (рис. 11), то перейдем в ПСК, т.е. выполним замену $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, для которой $|I(\rho, \varphi)| = \rho$.

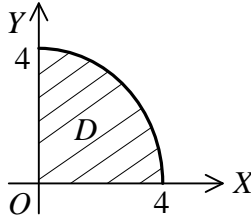


Рис. 11

Найдем границы для новой области D^* :

$$1) \ x^2 + y^2 \leq 16 \Rightarrow \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \rho^2 \leq 16,$$

$$\rho \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \rho \leq 4;$$

$$2) \ x = 0 \Rightarrow \rho \cos \varphi = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2};$$

$$3) \ y = 0 \Rightarrow \rho \sin \varphi = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0.$$

Значит, область D^* имеет вид рис. 12.

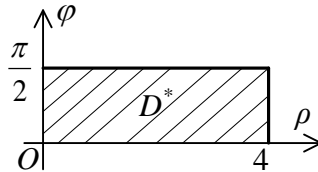


Рис. 12

Подынтегральная функция тоже изменится:

$$\frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} = \frac{1}{\sqrt{16 - \rho^2}}.$$

Вернемся к вычислению площади поверхности:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{нов}} &= 4 \cdot \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{16-x^2-y^2}} = 4 \cdot \iint_{D^*} \frac{1}{\sqrt{16-\rho^2}} \cdot \rho d\rho d\varphi = \\
 &= 4 \int_0^4 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho}{\sqrt{16-\rho^2}} d\varphi = 4 \int_0^4 \frac{\rho}{\sqrt{16-\rho^2}} d\rho \left(\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{4\pi}{2} \int_0^4 \frac{\rho}{\sqrt{16-\rho^2}} d\rho = \\
 &= -\pi \cdot \int_0^4 \frac{d(16-\rho^2)}{\sqrt{16-\rho^2}} = -\pi \cdot \left(2\sqrt{16-\rho^2} \right) \Big|_0^4 = 8\pi.
 \end{aligned}$$

Окончательно, $S_{\text{сфера}} = 8 \cdot S_{\text{нов}} = 64\pi$. ►

Пример 5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$ и $z = 1$.

◀ Т.к. заданное тело ограничено снизу эллиптическим параболоидом $z_1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$, а сверху плоскостью $z_2 = 1$, то объем такого тела можно найти по формуле:

$$V = \iint_D (z_2 - z_1) dx dy,$$

где область D – проекция заданного тела на плоскость XOY , которая ограничена кривой $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (эллипсом).

Для вычисления ДИ перейдем в ОПСК:

$$x = 3\rho \cos \varphi, \quad y = 2\rho \sin \varphi, \quad I = 6\rho.$$

Найдем границы области D^* :

$$1) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3\rho \cos \varphi \\ y = 2\rho \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \rho^2 \leq 1,$$

$$\rho^2 \leq 1, \quad \rho \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \rho \leq 1;$$

2) $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, т.к. область D – эллипс.

Преобразуем подынтегральную функцию:

$$z_2 - z_1 = 1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 - \rho^2.$$

Вернемся к вычислению объема тела:

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (z_2 - z_1) dx dy = \iint_{D^*} (1 - \rho^2) \cdot \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho = \\
 &= \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}. \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

Замечание 6. В последнем повторном интеграле вычисление внешнего интеграла не зависит от величины внутреннего интеграла, поэтому результаты интегрирования можно перемножить.

§ 2. Тройной интеграл (ТИ)

2.1. Понятие ТИ

Пусть в пространстве $OXYZ$ задана некоторая ограниченная область T , в которой определена и непрерывна функция $u = f(x, y, z)$.

Разобьем заданную область T произвольным образом на n частей T_1, \dots, T_n с объемами $\Delta v_1, \dots, \Delta v_n$. В пределах каждой области T_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta v_i$ и будем неограниченно увеличивать число малых областей Δv_i так, чтобы $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i \rightarrow 0$, где d_i – диаметр подобласти Δv_i , $i = \overline{1, n}$.

Опр. 1. Если предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta v_i$ существует (конечный) при $n \rightarrow \infty$ ($d \rightarrow 0$) и не зависит ни от способа разбиения области T на части, ни от выбора в них точек M_i , то он называется *тройным интегралом (ТИ)* от функции $u = f(x, y, z)$ по области T и обозначается:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta v_i = \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz.$$

В этом случае функция $u = f(x, y, z)$ называется *интегрируемой* в области T .

Теорема. *Всякая непрерывная в ограниченной замкнутой области T в пространстве $OXYZ$ функция $u = f(x, y, z)$ интегрируема в ней.*

2.2. Свойства ТИ

ТИ обладаем такими же свойствами, что и ДИ.

1.
$$\iiint_T C \cdot f(x, y, z) dx dy dz = C \cdot \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz,$$
 где $C = const$.

2.
$$\iiint_T (f \pm g) dx dy dz = \iiint_T f dx dy dz \pm \iiint_T g dx dy dz.$$

3. Если $T = T_1 \cup T_2$, а $T_1 \cap T_2$ состоит только из общей для них границы, т.е. они не имеют общих внутренних точек, то:

$$\iiint_V f dx dy dz = \iiint_{V_1} f dx dy dz + \iiint_{V_2} f dx dy dz.$$

4.
$$\iiint_T dx dy dz = V_T,$$
 где V_T – объем тела T .

5.
$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz \geq 0,$$
 если $f(x, y, z) \geq 0$ в области T .

2.3. Вычисление ТИ

Так же, как в случае ДИ, способ вычисления ТИ от функции $u = f(x, y, z)$ по области T зависит от вида этой области, заданной в пространстве $OXYZ$.

Опр. 2. *Пространственная область T называется правильной*, если она обладает следующими свойствами:

1) всякая прямая, параллельная оси OZ , проведенная через внутреннюю точку области T , пересекает поверхность, ограничивающую область T , в двух точках;

2) вся область T проецируется на плоскость XOY в правильную двумерную область D .

В дальнейшем будем рассматривать только правильные пространственные области T .

1-й способ вычисления. Пусть функция $u = f(x, y, z)$ определена и непрерывна в области T , которая ограничена снизу поверхностью $z_1(x, y)$, сверху – $z_2(x, y)$, причем $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ определены и непрерывны в области $D \subseteq XOY$ (рис. 13).

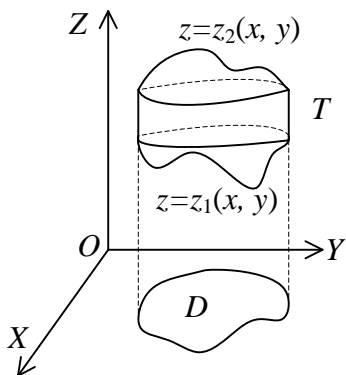


Рис. 13

Тогда будет справедлива формула:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

После вычисления внутреннего интеграла $\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$

границы в ДИ нужно расставлять ранее изученными способами (§1, п. 1.3).

2-й способ вычисления. Для упрощения вычисления ТИ часто применяют метод замены переменных.

Пусть в тройном интеграле совершена подстановка:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w),$$

причем эти функции имеют в некоторой области T^* пространства $OUVW$ непрерывные частные производные и ненулевой определитель Якоби (или якобиан):

$$I(u, v, w) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда будет справедлива формула замены переменных:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{T^*} f^*(u, v, w) \cdot |I(u, v, w)| du dv dw,$$

где $f^*(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$.

Рассмотрим частные случаи замены переменных.

Цилиндрическая система координат (ЦСК) (рис. 14) связана с декартовой системой следующими соотношениями:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

причем $|I(\rho, \varphi, z)| = \rho$, $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $z \in \mathbf{R}$.

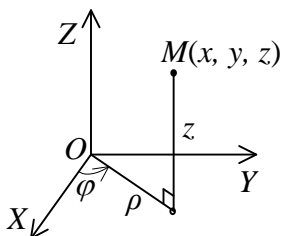


Рис. 14

Полезно знать, что в ЦСК верна формула $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Тогда формула замены переменных примет вид:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{T^*} f^*(\rho, \varphi, z) \cdot \rho d\rho d\varphi dz.$$

Замечание 1. Переходить в ЦСК удобно, если область T образована цилиндрической, параболоидной или конической поверхностью.

Сферическая система координат (ССК) (рис. 15) связана с декартовой системой следующими соотношениями:

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta,$$

причем $|I(\rho, \varphi, \theta)| = \rho^2 \sin \theta$, $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

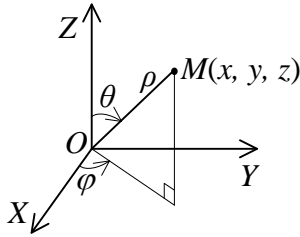


Рис. 15

Полезно знать, что в ССК верна формула $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. Тогда формула замены переменных примет вид:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{T^*} f^*(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Замечание 2. Переходить в ССК удобно, если область T – шар (уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$), шаровой слой или их части.

2.4. Приложения ТИ

Объем замкнутой пространственной области T :

$$V_T = \iiint_T dx dy dz.$$

Масса m_T тела T с заданной объемной плотностью распределения масс $\mu(x, y, z)$ равна:

$$m_T = \iiint_T \mu(x, y, z) dx dy dz.$$

Статические моменты M_{XY} , M_{XZ} , M_{YZ} тела T с заданной объемной плотностью распределения масс $\mu(x, y, z)$ относительно координатных плоскостей OXY , OXZ , OYZ соответственно вычисляются по формулам:

$$M_{XY} = \iiint_T z \cdot \mu(x, y, z) dx dy dz, \quad M_{XZ} = \iiint_T y \cdot \mu(x, y, z) dx dy dz,$$

$$M_{YZ} = \iiint_T x \cdot \mu(x, y, z) dx dy dz.$$

Если тело T однородно ($\mu(x, y, z) = 1$), то

$$M_{XY} = \iiint_T z \, dx \, dy \, dz, \quad M_{XZ} = \iiint_T y \, dx \, dy \, dz, \quad M_{YZ} = \iiint_T x \, dx \, dy \, dz.$$

Координаты центра тяжести (x_c, y_c, z_c) тела T с массой m_T и статическими моментами M_{XY} , M_{XZ} , M_{YZ} определяются по формулам:

$$x_c = \frac{M_{YZ}}{m_T}, \quad y_c = \frac{M_{XZ}}{m_T}, \quad z_c = \frac{M_{XY}}{m_T}.$$

Моменты инерции J_{XY} , J_{XZ} , J_{YZ} тела T с заданной объемной плотностью распределения масс $\mu(x, y, z)$ относительно координатных плоскостей OXY , OXZ , OYZ соответственно вычисляются по формулам:

$$J_{XY} = \iiint_T z^2 \cdot \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad J_{XZ} = \iiint_T y^2 \cdot \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\ J_{YZ} = \iiint_T x^2 \cdot \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Моменты инерции J_X , J_Y , J_Z тела T с заданной объемной плотностью распределения масс $\mu(x, y, z)$ относительно координатных осей OX , OY , OZ соответственно вычисляются по формулам:

$$J_X = \iiint_T (y^2 + z^2) \cdot \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\ J_Y = \iiint_T (x^2 + z^2) \cdot \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \\ J_Z = \iiint_T (x^2 + y^2) \cdot \mu(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

Очевидно, что $J_X = J_{XY} + J_{XZ}$, $J_Y = J_{XY} + J_{YZ}$, $J_Z = J_{XZ} + J_{YZ}$.

Можно составить матрицу инерции или *тензор инерции*:

$$J = \begin{pmatrix} J_X & -J_{XY} & -J_{XZ} \\ -J_{XY} & J_Y & -J_{YZ} \\ -J_{XZ} & -J_{YZ} & J_Z \end{pmatrix}.$$

Данный тензор является симметричным, поэтому его можно привести к диагональному виду при определенном выборе осей

OX' , OY' , OZ' . Значения диагональных элементов называются *главными моментами инерции*, а направления – *собственными* или *главными осями инерции*.

Если тело вращается вокруг оси, не совпадающей с главной осью инерции, то оно будет испытывать вибрации при высоких скоростях вращения. Это используют при балансировке колес автомобиля.

2.5. Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить интеграл $\iiint_T \frac{dx dy dz}{(x + y + z + 1)^3}$, если те-

ло T ограничено координатными плоскостями и плоскостью $x + y + z = 1$.

◀ Заданное тело T представляет собой пирамиду $OABC$ (рис. 16,а), которая проектируется на плоскость XOY в область D – треугольник OAB (рис. 16,б).

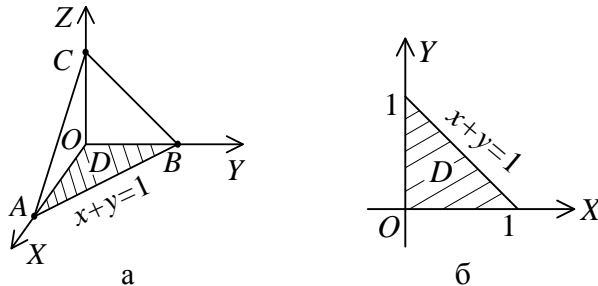


Рис. 16

Тело T является правильным, поэтому:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy,$$

где $z_1 = 0$ (плоскость XOY), а $z_2 = 1 - x - y$ (из уравнения заданной по условию задачи плоскости $x + y + z = 1$). В ДИ по области D пределы интегрирования можно расставить способом 1 (см. §1, п. 1.3), тогда можно вычислить исходный ТИ:

$$\begin{aligned}
\iiint_T \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} = \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{-1}{2(x+y+z+1)^2} \right) \Big|_0^{1-x-y} dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(x+y+1)^2} \right) dy = \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \left(\frac{y}{4} + \frac{1}{x+y+1} \right) \Big|_0^{1-x} = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \\
&= \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}. \blacktriangleright
\end{aligned}$$

Пример 2. Найти объем тела, ограниченного конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и параболоидом $2z = x^2 + y^2$.

◀ Заданное тело T ограничено снизу параболоидом $z_1 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, сверху – конусом $z_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ (рис. 17).

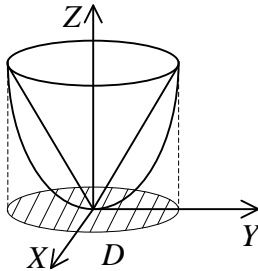


Рис. 17

Объем полученного тела можно вычислить по формуле:

$$V_T = \iiint_T dx dy dz.$$

Т.к. тело T ограничено параболоидом и конусом, то целесообразно выполнить замену переменных в ТИ, перейдя в ЦСК:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad |I(\rho, \varphi, z)| = \rho.$$

Тогда тело T перейдет в тело T^* с границами:

$$1) z_1 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2}\rho^2,$$

$$2) z_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z_2 = \sqrt{\rho^2} = \rho,$$

3) т.к. конус и параболоид пересекаются, то $\frac{1}{2}\rho^2 = \rho$, т.е

$$\rho^2 - 2\rho = 0, \text{ откуда } \rho_1 = 0, \rho_2 = 2,$$

4) $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, т.к. проекция тела T – круг.

Тогда можно найти искомый объем:

$$\begin{aligned} V_T &= \iiint_T dx dy dz = \iiint_T \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{\rho} dz = \\ &= \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \left(z \Big|_{\frac{1}{2}\rho^2}^{\rho} \right) = \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{2\pi} \left(\rho - \frac{1}{2}\rho^2 \right) d\varphi = \\ &= \int_0^2 \left(\rho^2 - \frac{1}{2}\rho^3 \right) d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \cdot \left(\frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{8} \right) \Big|_0^2 = \frac{4\pi}{3}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Пример 3. Найти массу сферического слоя $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, заключенного внутри конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от этой точки до начала координат.

◀ Так как заданное тело T ограничено сферами, то выполним переход в ССК:

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta,$$

$$|I(\rho, \varphi, \theta)| = \rho^2 \sin \theta.$$

Найдем границы новой области T^* :

$$1) 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \Rightarrow 4 \leq \rho^2 \leq 9 \Rightarrow 2 \leq \rho \leq 3;$$

$$2) z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \rho \cos \theta \geq \sqrt{\rho^2 \sin^2 \theta} \Rightarrow \cos \theta \geq \sin \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg} \theta \geq 1 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4};$$

3) $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, т.к. части заданных сфер проектируются на плоскость XOY в круг с центром в начале координат.

По условию плотность тела обратно пропорциональна расстоянию от любой точки тела до начала координат, т.е.

$\mu^*(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{\rho}$. Тогда можно найти искомую массу:

$$\begin{aligned} m_T &= \iiint_T \mu(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{T^*} \mu^* \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \iiint_{T^*} \frac{1}{\rho} \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta = \\ &= 2\pi \cdot \left(\frac{\rho^2}{2} \Big|_0^3 \right) \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi \cdot 5 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = \frac{5\pi}{2} (2 - \sqrt{2}). \blacktriangleright \end{aligned}$$

Пример 4. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$ и параболическим цилиндром $z = \frac{y^2}{2}$.

◀ Так как тело T однородное, то его плотность $\mu = 1$. Тогда координаты центра тяжести (x_c, y_c, z_c) могут быть вычислены по формулам:

$$x_c = \frac{M_{YZ}}{m_T}, \quad y_c = \frac{M_{XZ}}{m_T}, \quad z_c = \frac{M_{XY}}{m_T},$$

где статические моменты для однородного тела:

$$M_{XY} = \iiint_T z dx dy dz, \quad M_{XZ} = \iiint_T y dx dy dz, \quad M_{YZ} = \iiint_T x dx dy dz,$$

а масса этого однородного тела T : $m_T = \iiint_T dx dy dz$.

Так как по условию $0 \leq z \leq \frac{y^2}{2}$, то от всех предыдущих ТИ можно перейти к ДИ:

$$\iiint_T f \, dx \, dy \, dz = \iint_D \left(\int_0^{\frac{y^2}{2}} f \, dz \right) dx \, dy,$$

где D – проекция тела T на плоскость XOY (рис. 18).

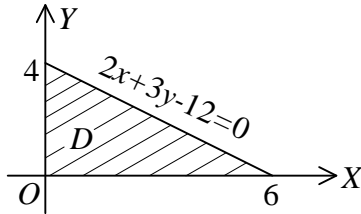


Рис. 18

В самой области D границы интегрирования можно расставить способом 1 (см. §1, п. 1.3), тогда:

$$\iiint_T f \, dx \, dy \, dz = \int_0^6 dx \int_0^{4-\frac{2}{3}x} dy \int_0^{\frac{y^2}{2}} f \, dz.$$

Вычислим все необходимые величины:

$$m_T = \int_0^6 dx \int_0^{4-\frac{2}{3}x} dy \int_0^{\frac{y^2}{2}} dz = 16, \quad M_{YZ} = \int_0^6 x \, dx \int_0^{4-\frac{2}{3}x} dy \int_0^{\frac{y^2}{2}} dz = \frac{96}{5},$$

$$M_{XZ} = \int_0^6 dx \int_0^{4-\frac{2}{3}x} y \, dy \int_0^{\frac{y^2}{2}} dz = \frac{192}{5}, \quad M_{XY} = \int_0^6 dx \int_0^{4-\frac{2}{3}x} dy \int_0^{\frac{y^2}{2}} z \, dz = \frac{128}{5}.$$

Найдем координаты центра тяжести:

$$x_c = \frac{M_{YZ}}{m_T} = \frac{6}{5}, \quad y_c = \frac{M_{XZ}}{m_T} = \frac{12}{5}, \quad z_c = \frac{M_{XY}}{m_T} = \frac{8}{5}. \blacktriangleright$$

ГЛАВА 3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

К понятию криволинейного интеграла первого рода приводит задача о массе кривой, криволинейного интеграла второго рода – задача о работе переменной силы. Другие приложения криволинейных интегралов будут рассмотрены в этой главе.

Поверхностный интеграл первого рода возникает при решении задачи на отыскание массы поверхности, поверхностный интеграл второго рода – при отыскании количества жидкости, протекающей с некоторой скоростью через пронцаемую поверхность за единицу времени в выбранном направлении.

В главе 4 данного пособия будут еще рассмотрены задачи на применение поверхностных интегралов.

§ 1. Криволинейный интеграл (КИ) 1-го рода (по длине дуги)

1.1. Понятие КИ 1-го рода

Пусть на плоскости XOY заданы непрерывная кривая L с концами в точках A и B , а также непрерывная функция $z = f(x, y)$, которая определена во всех точках кривой $L = AB$.

Разобьем кривую L произвольными точками $A = M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n = B$ на n дуг $M_{i-1}M_i$ с длинами $\Delta\ell_i, i = \overline{1, n}$. На каждой такой дуге произвольным образом выберем точку $P_i(x_i, y_i) \in \overline{M_{i-1}M_i}, i = \overline{1, n}$ (рис. 1).

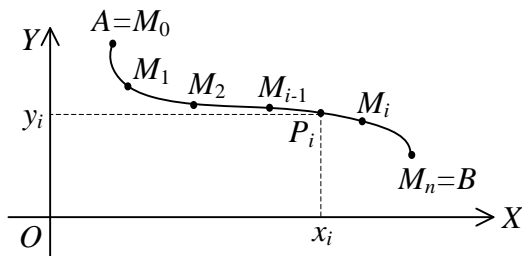


Рис. 1

Опр. 1. Интегральной суммой для функции $z = f(x, y)$ по кривой L называется выражение вида $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta \ell_i$.

Будем увеличивать число точек разбиения ($n \rightarrow \infty$) так, чтобы длина наибольшей из полученных дуг стремилась к нулю, т.е. $d \rightarrow 0$, где $d = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta \ell_i$.

Опр. 2. Если существует предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta \ell_i$ при $d \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), который не зависит ни от способа разбиения кривой на части, ни от выбора точек на ней, то он называется *криволинейным интегралом (КИ) от функции $z = f(x, y)$ по длине кривой L (или КИ 1-го рода)* и обозначается:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot \Delta \ell_i = \int_L f(x, y) dl.$$

Теорема 1 (достаточное условие существования). Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в каждой точке гладкой кривой L , то КИ 1-го рода существует и не зависит ни от способа разбиения кривой на части, ни от выбора точек на них.

Аналогичным образом можно ввести понятие КИ 1-го рода от функции $u = f(x, y, z)$ по пространственной кривой L :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta \ell_i = \int_L f(x, y, z) dl.$$

1.2. Свойства КИ 1-го рода

Перечислим некоторые свойства КИ 1-го рода, многие из которых аналогичны свойствам определенных интегралов, ДИ и ТИ.

- $\int_L C \cdot f(x, y) dl = C \cdot \int_L f(x, y) dl$, где $C = const$.
- $\int_L (f(x, y) \pm g(x, y)) dl = \int_L f(x, y) dl \pm \int_L g(x, y) dl$.
- $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{AC} f(x, y) dl + \int_{CB} f(x, y) dl$, где $C \in AB$.

4. $\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl$.
5. $\int_{AB} dl = \ell$, где ℓ – длина кривой AB .

1.3. Вычисление КИ 1-го рода

Вычисление КИ 1-го рода сводится к нахождению определенного интеграла, при этом все зависит от способа задания кривой L .

Явное задание кривой L : $y = y(x)$, $x \in [a; b]$, где $y(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Тогда:

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

где $dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx$ есть дифференциал длины дуги.

Параметрическое задание кривой $L = AB$: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ где

$t \in [\alpha; \beta]$, причем $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, а также $x_A = x(\alpha)$, $y_A = y(\alpha)$ и $x_B = x(\beta)$, $y_B = y(\beta)$. Тогда:

$$\int_L f(x, y) dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt,$$

где $dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$.

Аналогичная формула получается и в случае простран-

ственной кривой L : $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ где $t \in [\alpha; \beta]$:

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} dt.$$

Полярное задание кривой L : $\rho = \rho(\varphi)$, где $\varphi \in [\alpha; \beta]$, причем $\rho(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cdot \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi,$$

где $dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$.

1.4. Приложения КИ 1-го рода

КИ 1-го рода имеет разнообразное применение в математике и физике.

Длина кривой L (по свойству 5) $\ell = \int_L dl$.

Площадь цилиндрической поверхности (рис. 2), для которой направляющей служит заданная кривая L , лежащая в плоскости XOY , а образующая параллельна оси OZ и заключена между кривой L и поверхностью $z = f(x, y)$, может быть найдена по следующей формуле:

$$S_{\text{нов}} = \int_L f(x, y) dl.$$

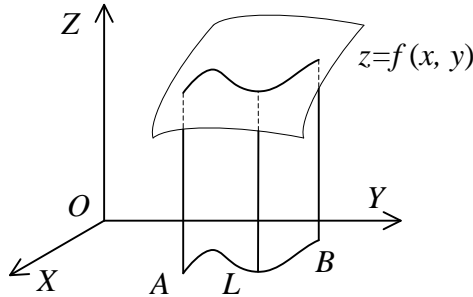


Рис. 2

Масса кривой L с линейной плотностью $\mu(x, y)$ вычисляется по формуле:

$$m_L = \int_L \mu(x, y) dl,$$

в этом состоит *физический смысл* КИ 1-го рода.

Статические моменты кривой L с линейной плотностью $\mu(x, y)$ относительно координатных осей OX и OY соответственно равны:

$$M_X = \int_L y \cdot \mu(x, y) dl, \quad M_Y = \int_L x \cdot \mu(x, y) dl.$$

Координаты центра тяжести (x_c, y_c) кривой L с массой m_L вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{M_Y}{m_L}, \quad y_c = \frac{M_X}{m_L},$$

где M_Y и M_X – статические моменты.

Моменты инерции кривой L , заданной в плоскости XOY , с линейной плотностью $\mu(x, y)$ относительно координатных осей OX , OY и начала координат соответственно равны:

$$J_X = \int_L y^2 \cdot \mu(x, y) dl, \quad J_Y = \int_L x^2 \cdot \mu(x, y) dl, \\ J_O = \int_L (x^2 + y^2) \cdot \mu(x, y) dl.$$

1.5. Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить площадь цилиндрической поверхности, ограниченной снизу плоскостью XOY , а сверху – поверхностью $f(x, y) = x$, при условии, что направляющая L :

$$y = \frac{3}{8}x^2, \quad x \in [0; 4].$$

◀ Для нахождения площади поверхности будем использовать формулу $S_{нов} = \int_L f(x, y) dl$.

Если $L: y = \frac{3}{8}x^2$, то $y' = \left(\frac{3}{8}x^2\right)' = \frac{3}{4}x$, тогда найдем dl :

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2} dx = \sqrt{1 + \frac{9}{16}x^2} dx.$$

Вычислим искомую площадь поверхности:

$$S_{нов} = \int_0^4 f(x, y) \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^4 x \cdot \sqrt{1 + \frac{9}{16}x^2} dx =$$

$$= \frac{8}{9} \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{16} x^2} d\left(1 + \frac{9}{16} x^2\right) = \frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{16} x^2\right) \Big|_0^4 = \frac{16}{3}. \blacktriangleright$$

Пример 2. Найти длину заданной кривой L : $\rho = 2 \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

◀ Искомая длина ℓ равна $\ell = \int_L dl$. Т.к. кривая L задана в

ПСК, то дифференциал длины дуги может быть найден так:

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi = \sqrt{4 \sin^6 \frac{\varphi}{3} + \left(2 \cdot 3 \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cdot \cos \frac{\varphi}{3} \cdot \frac{1}{3}\right)^2} d\varphi = \\ &= \sqrt{4 \sin^6 \frac{\varphi}{3} + 4 \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3}} d\varphi = \sqrt{4 \sin^4 \frac{\varphi}{3} \left(\sin^2 \frac{\varphi}{3} + \cos^2 \frac{\varphi}{3}\right)} d\varphi = \\ &= 2 \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi. \end{aligned}$$

Найдем пределы интегрирования исходя из того, что $\rho \geq 0$:

$$\rho = 2 \sin^3 \frac{\varphi}{3} \geq 0 \Rightarrow \sin \frac{\varphi}{3} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{\varphi}{3} \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq 3\pi.$$

Найдем искомую длину дуги:

$$\ell = \int_L dl = \int_0^{3\pi} 2 \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = \int_0^{3\pi} \left(1 - \cos \frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi = 3\pi. \blacktriangleright$$

Пример 3. Вычислить интеграл $I = \int_L (x - y) dl$, где

$$L: x^2 + y^2 = 4x.$$

◀ Выясним вид заданной кривой:

$$L: x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 4,$$

т.е. L – окружность с центром в точке $(2; 0)$ и радиусом 2. Эту кривую можно задать как параметрически, так и в ПСК.

1-й способ. Зададим кривую L параметрически:

$$L: \begin{cases} x - 2 = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Тогда дифференциал длины дуги равен:

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt = \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} dt = \\ &= \sqrt{4(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = 2 dt . \end{aligned}$$

Преобразуем подынтегральную функцию:

$$x - y = 2 + 2 \cos t - 2 \sin t .$$

Найдем искомый интеграл:

$$\begin{aligned} I &= \int_L (x - y) dl = \int_0^{2\pi} (2 + 2 \cos t - 2 \sin t) \cdot 2 dt = \\ &= 4 \cdot \int_0^{2\pi} (1 + \cos t - \sin t) dt = 4(t + \sin t + \cos t) \Big|_0^{2\pi} = 8\pi . \end{aligned}$$

2-й способ. Зададим кривую L в ПСК:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \Rightarrow L: \rho^2 = 4\rho \cos \varphi \Rightarrow \rho = 4 \cos \varphi .$$

Тогда дифференциал длины дуги равен:

$$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} dt = \sqrt{4 \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi} d\varphi = 4 d\varphi .$$

Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\begin{aligned} x - y &= \rho \cos \varphi - \rho \sin \varphi = | \rho = 4 \cos \varphi | = \\ &= 4 \cos^2 \varphi - 4 \cos \varphi \sin \varphi = 2(1 + \cos 2\varphi) - 2 \sin 2\varphi \Rightarrow \\ &\Rightarrow x - y = 2(1 + \cos 2\varphi - \sin 2\varphi) . \end{aligned}$$

Найдем пределы интегрирования исходя из того, что $\rho \geq 0$:

$$\rho = 4 \cos \varphi \geq 0 \Rightarrow \cos \varphi \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} .$$

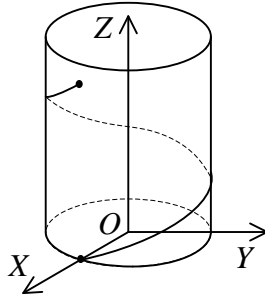
Найдем искомый интеграл:

$$\begin{aligned} I &= \int_L (x - y) dl = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1 + \cos 2\varphi - \sin 2\varphi) \cdot 4 d\varphi = \\ &= 8 \cdot \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi . \blacktriangleright \end{aligned}$$

Пример 4. Найти массу первого витка винтовой линии

$$L: \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \\ z = 4t, \end{cases} \text{ плотность в каждой точке равна радиусу-}$$

вектору этой точки.



◀ Известно, что масса линии $m_L = \int_L \mu(x, y, z) dl$.

По условию плотность в каждой точке равна радиусу-вектору этой точки, поэтому:

$$\begin{aligned} \mu(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{9 \cos^2 t + 9 \sin^2 t + 16t^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu(t) = \sqrt{9 + 16t^2}. \end{aligned}$$

Найдем дифференциал длины дуги:

$$dl = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = \sqrt{(-3 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2 + 4^2} dt = 5 dt.$$

Тогда найдем искомую массу кривой:

$$\begin{aligned} m_L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9 + 16t^2} \cdot 5 dt = 5 \left(\frac{t}{2} \sqrt{9 + 16t^2} \Big|_0^{2\pi} + \frac{9}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{9 + 16t^2}} \right) = \\ &= 5\pi \sqrt{9 + 64\pi^2} + \frac{45}{8} \ln \frac{8\pi + \sqrt{9 + 64\pi^2}}{3}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Замечание. При вычислении определенного интеграла использовали методы интегрирования иррациональных выражений ([8], с. 82).

§ 2. Криволинейный интеграл (КИ) 2-го рода (по координатам)

2.1. Понятие КИ 2-го рода

Пусть на гладкой кривой $L = AB$ в плоскости XOY определены и непрерывны две функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

Разобьем заданную кривую на части $M_{i-1}M_i$, $i = \overline{1, n}$, так, чтобы $A = M_0$ и $M_n = B$. Выберем на каждой частичной дуге $M_{i-1}M_i$ произвольную точку с координатами (x_i^*, y_i^*) , $i = \overline{1, n}$. Обозначим d длину наибольшей из дуг $M_{i-1}M_i$. При увеличении числа точек разбиения ($n \rightarrow \infty$) потребуем, чтобы $d \rightarrow 0$.

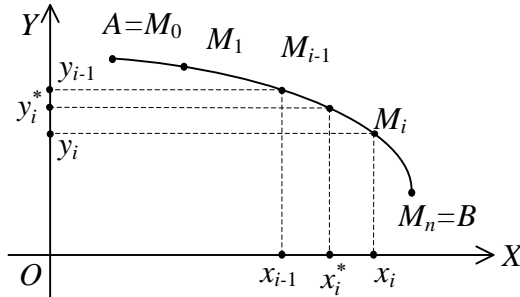


Рис. 3

Составим интегральные суммы:

$$S_P = \sum_{i=1}^n P(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta x_i \quad \text{и} \quad S_Q = \sum_{i=1}^n Q(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta y_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$.

Опр. 3. Если существует предел суммы S_P (соответственно S_Q) при $d \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), то он называется *криволинейным интегралом 2-го рода (КИ 2-го рода)* и обозначается:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n P(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta x_i = \int_L P(x, y) dx$$

$$\left(\text{соответственно} \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n Q(x_i^*, y_i^*) \cdot \Delta y_i = \int_L Q(x, y) dy \right).$$

Сумму $\int_L P(x, y)dx + \int_L Q(x, y)dy$ называют *общим криволинейным интегралом 2-го рода* (или *КИ по координатам*) и обозначают $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

Аналогично можно определить КИ 2-го рода по пространственной кривой $\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$.

Теорема 2 (достаточное условие существования). *Если кривая $L = AB$ гладкая, а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны на L , то КИ 2-го рода существует.*

Если кривая L является замкнутой, КИ 2-го рода обозначается следующим образом: $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

2.2. Свойства КИ 2-го рода

Для краткости изложения свойств введем обозначение $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AB}$.

1. $\int_{AB} = -\int_{BA}$, т.е. при изменении направления пути интегрирования КИ 2-го рода меняет свой знак на противоположный.

2. $\int_{AB} = \int_{AC} + \int_{CB}$, где $C \in AB$.

3. $\int_{ABCA} = \int_{BCAB} = \oint_L$, где $A, B, C \in L$, L – замкнутый контур

(рис. 4), т.е. КИ 2-го рода по замкнутой кривой не зависит от выбора начальной точки, а зависит от направления обхода кривой.

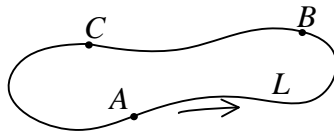


Рис. 4

2.3. Вычисление КИ 2-го рода

Вычисление КИ 2-го рода, так же как и 1-го рода, сводится к нахождению определенного интеграла, при этом все зависит от способа задания кривой L .

Явное задание кривой $L: y = y(x), x \in [a; b]$, где $y(x)$ – непрерывная и дифференцируемая функция. Тогда:

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x))dx.$$

Параметрическое задание кривой $L = AB: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ где

$t \in [\alpha; \beta]$, причем $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывные и дифференцируемые функции, а также $x_A = x(\alpha)$, $y_A = y(\alpha)$ и $x_B = x(\beta)$, $y_B = y(\beta)$. Тогда:

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)]dt. \end{aligned}$$

Аналогичная формула верна и для пространственной кривой, заданной параметрически, $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ где $t \in [\alpha; \beta]$:

вой, заданной параметрически, $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$ где $t \in [\alpha; \beta]$:

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz &= \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (P^*(t) \cdot x'(t) + Q^*(t) \cdot y'(t) + R^*(t) \cdot z'(t))dt, \end{aligned}$$

где $P^*(t) = P(x(t), y(t), z(t))$, $Q^*(t) = Q(x(t), y(t), z(t))$, $R^*(t) = R(x(t), y(t), z(t))$.

2.4. Связь между КИ 1-го и 2-го рода

Если кривая L задана параметрически $L = AB: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

где $t \in [t_1; t_2]$, то $\cos \alpha = x'(t)$ и $\cos \beta = y'(t)$, где α и β – углы, составляемые касательной к кривой L и положительным

направлением осей OX и OY , а $\cos \alpha$ и $\cos \beta$ – направляющие косинусы касательной к кривой L (рис. 5).

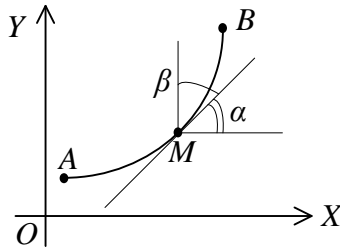


Рис. 5

Поэтому:

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t)) \cdot \cos \alpha + Q(x(t), y(t)) \cdot \cos \beta] dt = \\ &= \int_L [P(x, y) \cdot \cos \alpha + Q(x, y) \cdot \cos \beta] dl. \end{aligned}$$

Аналогичные соображения можно проделать и для пространственной кривой. В результате получим:

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L (P \cdot \cos \alpha + Q \cdot \cos \beta + R \cdot \cos \gamma) dl,$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – направляющие косинусы касательной к кривой L .

Полученная формула позволяет переходить от КИ 1-го рода к КИ 2-го рода.

2.5. Формула Грина*

Формула Грина устанавливает связь между ДИ по некоторой плоской области D и КИ 2-го рода по границе L этой области.

* Джордж Грин – английский физик и математик (1783 – 1841).

Теорема 3. Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в плоской области D с границей L , то имеет место формула:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy,$$

причем интегрирование по кривой L производится в положительном направлении (при движении по кривой L область D остается слева).

2.6. Условия независимости КИ 2-го рода от пути интегрирования

Пусть $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ – две произвольные точки области D на плоскости XOY . Данные точки можно соединить различными кривыми, лежащими в области D . По каждой из этих кривых в общем случае КИ 2 рода $\int_L P dx + Q dy$ имеет различные значения, т.е. зависит от пути интегрирования.

Теорема 4. Для того чтобы КИ 2-го рода $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ не зависел от пути интегрирования в области D , в которой функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этой области выполнялось условие:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Аналогичные условия справедливы для КИ 2-го рода $\int_L P dx + Q dy + R dz$ по пространственной кривой L :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

При выполнении условий теоремы 4 КИ 2-го рода записывают так:

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Данная запись показывает, что значение интеграла зависит только от положения точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. В качестве кривой, соединяющей эти точки, можно взять любую кривую. Во многих случаях удобнее взять прямую, проходящую через заданные точки, или ломаную, звенья которой параллельны координатным осям. В последнем случае (проверьте это самостоятельно) можно получить формулу:

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_1) dx + \int_{y_1}^{y_2} Q(x_2, y) dy.$$

Замечание. Если выполняются условия теоремы 4, то $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, поэтому по формуле Грина

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy = 0.$$

Верно и обратное.

2.7. Интегрирование полных дифференциалов

Теорема 5 (необходимое и достаточное условие). Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области D . КИ 2-го рода $\int_L P dx + Q dy$ не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда в области D существует такая дифференцируемая функция $U(x, y)$, что подынтегральное выражение $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ является полным дифференциалом этой функции, т.е. $dU = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$.

В этом случае:

$$\begin{aligned} \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} dU(x, y) = \\ &= U(x, y) \Big|_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Эта формула называется *обобщенной формулой Ньютона – Лейбница* для КИ 2-го рода от полного дифференциала.

Аналогично для пространственной кривой L :

$$\begin{aligned} & \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = U(x, y, z) \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1). \end{aligned}$$

Функцию $U = U(x, y)$ можно найти по формуле:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(\chi, y_0) d\chi + \int_{y_0}^y Q(x, \gamma) d\gamma + C,$$

где $C = const$, а в качестве точки (x_0, y_0) обычно берут начало координат $(0, 0)$, если в ней определены $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

Аналогично для пространственной кривой L :

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(\chi, y_0, z_0) d\chi + \int_{y_0}^y Q(x, \gamma, z_0) d\gamma + \int_{z_0}^z R(x, y, \zeta) d\zeta + C.$$

Замечание. Обозначения переменных интегрирования χ , γ и ζ введены вместо переменных x , y и z с целью разграничить переменный верхний предел в интегралах и собственно переменную интегрирования, показывая таким образом, что они не зависят друг от друга.

2.8. Приложения КИ 2-го рода

Площадь фигуры, расположенной в плоскости XOY и ограниченной контуром L , равна:

$$S = \oint_L x dy = -\oint_L y dx = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx,$$

где обход контура L осуществляется против часовой стрелки.

Объем тела V_{OX} , образованного вращением замкнутой кривой L , лежащей в верхней полуплоскости $y \geq 0$, вокруг оси OX , равен:

$$V_{OX} = -\pi \oint_L y^2 dx = 2\pi \oint_L xy dy = \frac{\pi}{2} \oint_L 2xy dy - y^2 dx.$$

Работа переменной силы $\bar{F}(P(x, y), Q(x, y))$ по перемещению материальной точки по кривой L равна:

$$A = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_L \bar{F} \cdot d\bar{\ell},$$

где $d\bar{\ell} = dx \cdot \bar{i} + dy \cdot \bar{j}$. В этом состоит *физический смысл* КИ 2-го рода.

Другие применения КИ 2-го рода будут рассмотрены в главе 4.

2.9. Примеры решения задач

Пример 1. Найти работу силового поля $\bar{F} = xy\bar{i} + (x + y)\bar{j}$ по перемещению материальной точки по параболе $y = x^2$ от начала координат до точки $M(1, 1)$.

◀ Для нахождения работы используем формулу $A = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, где $\bar{F}(P(x, y), Q(x, y))$. В данном случае $\bar{F}(xy, (x + y))$, т.е. $P(x, y) = xy$, $Q(x, y) = x + y$.

Кривая $L: y = x^2$, $x \in [x_0; x_M] = [0; 1]$ задана явно, поэтому $dy = y' dx = 2x dx$. Тогда от КИ 2-го рода можно перейти к определенному интегралу:

$$A = \int_L xy dx + (x + y)dy = \int_0^1 (x \cdot x^2 + (x + x^2) \cdot 2x) dx = \frac{17}{12}. \blacktriangleright$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $L: \begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t, \\ y = 2 \sin t - \sin 2t, \end{cases}$ где $0 \leq t \leq 2\pi$.

◀ Для нахождения площади воспользуемся формулой $S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$, при этом учтем, что кривая L задана параметрически. Тогда: $dy = y' dt = (2 \cos t - 2 \cos 2t) dt$ и $dx = x' dt = (-2 \sin t + 2 \sin 2t) dt$. Преобразуем подынтегральное выражение:

$$x dy - y dx = (2 \cos t - \cos 2t) \cdot (2 \cos t - 2 \cos 2t) dt -$$

$$-(2 \sin t - \sin 2t) \cdot (-2 \sin t + 2 \sin 2t) dt = 6(1 - \cos t) dt .$$

Найдем искомую площадь:

$$S = \frac{1}{2} \int_L x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 6(1 - \cos t) dt = 6\pi . \blacktriangleright$$

Пример 3. Найти объем тора, полученного вращением окружности $x^2 + (y - 2)^2 = 1$ вокруг оси OX .

◀ Искомый объем найдем по формуле $V_{OX} = 2\pi \int_L xy dy$.

Данную окружность удобнее задать параметрически:

$$x^2 + (y - 2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \cos t, \\ y - 2 = \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi .$$

Тогда искомый объем равен:

$$V_{OX} = 2\pi \int_L xy dy = 2\pi \int_0^{2\pi} \cos t \cdot (2 + \sin t) \cdot (2 + \sin t)' dt = 4\pi^2 . \blacktriangleright$$

Пример 4. Проверить, что КИ 2-го рода не зависит от пути интегрирования, и вычислить его:

$$I = \int_{(1;1)}^{(2;0)} (3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^3) dy .$$

◀ В данном КИ $P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$, $Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3$.

Проверим выполнимость условий теоремы 4:

$$\left. \begin{aligned} P'_y &= 6x \cdot 2y = 12xy \\ Q'_x &= 6 \cdot 2xy = 12xy \end{aligned} \right\} \Rightarrow P'_y = Q'_x ,$$

т.е. заданный КИ 2-го рода не зависит от пути интегрирования.

1-й способ. Вычислим заданный КИ 2-го рода по отрезку AB , где $A(1; 1)$, $B(2; 0)$ (рис. 6).

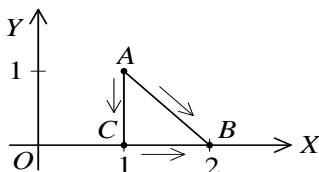


Рис. 6

Прямую AB можно задать через две данные точки:

$$AB: \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} \Rightarrow \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{0-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow AB: y = 2 - x, \quad x \in [1; 2].$$

Тогда от заданного КИ 2-го рода можно перейти к определенному интегралу в силу того, что отрезок AB задан явно:

$$I = \int_1^2 [3x^2 + 6x \cdot (2-x)^2 + (6x^2 \cdot (2-x) + 4(2-x)^3) \cdot (2-x)'] dx = 3.$$

2-й способ. Вычислим заданный КИ 2-го рода по ломаной ACB , звенья которой параллельны осям координат (рис.6). Тогда

$$\int_{ACB} = \int_{AC} + \int_{CB}.$$

AC : $x = 1, y \in [1; 0]$, поэтому $dx = x' dy = 0 \cdot dy = 0$. Тогда:

$$\int_{AC} = \int_1^0 [(3 \cdot 1^2 + 6y^2 \cdot 1) \cdot 0 + 6y \cdot 1^2 + 4y^3] dy = -4.$$

CB : $y = 0, x \in [1; 2]$, поэтому $dy = y' dx = 0 \cdot dx = 0$. Тогда:

$$\int_{CB} = \int_1^2 [3x^2 + 6x \cdot 0 + (6x^2 \cdot 0 + 4 \cdot 0^3) \cdot 0] dx = 7.$$

Окончательно $\int_{ACB} = \int_{AC} + \int_{CB} = -4 + 7 = 3$. ►

Пример 5. Восстановить функцию по ее полному дифференциалу:

$$dU = \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}.$$

◀ Если обозначить $P(x, y) = \frac{x+2y}{(x+y)^2}$ и $Q(x, y) = \frac{y}{(x+y)^2}$,

то $dU = P dx + Q dy$. Тогда искомую функцию можно найти по

формуле $U(x, y) = \int_{x_0}^x P(\chi, y_0) d\chi + \int_{y_0}^y Q(x, \gamma) d\gamma + C$, где в каче-

стве точки (x_0, y_0) возьмем $(1, 0)$. Точку $(0, 0)$ брать нельзя, т.к. в ней не существуют функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Получим:

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= \int_1^x P(\chi, 0) d\chi + \int_0^y Q(x, \gamma) d\gamma + C = \\
 &= \int_1^x \frac{\chi + 2 \cdot 0}{(\chi + 0)^2} d\chi + \int_0^y \frac{\gamma}{(x + \gamma)^2} d\gamma + C = \int_1^x \frac{1}{\chi} d\chi + \int_0^y \frac{(x + \gamma) - x}{(x + \gamma)^2} d\gamma + C = \\
 &= \ln|\chi| \Big|_1^x + \int_0^y \left(\frac{1}{x + \gamma} - \frac{x}{(x + \gamma)^2} \right) d\gamma + C = \ln|x| + \ln|x + \gamma| \Big|_0^y + \frac{x}{x + \gamma} \Big|_0^y + C = \\
 &= \ln|x| + (\ln|x + y| - \ln|x|) + \left(\frac{x}{x + y} - \frac{x}{x + 0} \right) + C = \\
 &= \ln|x + y| + \frac{x}{x + y} - 1 + C = \ln|x + y| + \frac{x}{x + y} + \tilde{C}, \text{ где } \tilde{C} = C - 1. \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

§ 3. Поверхностный интеграл (ПИ) 1-го рода

3.1. Понятие ПИ 1-го рода

Пусть на некоторой поверхности S пространства $OXYZ$ задана непрерывная функция $u = f(x, y, z)$.

Разобьем поверхность S на n частей S_1, \dots, S_n , не имеющих общих внутренних точек, площади которых равны ΔS_i , а диаметры равны d_i , $i = \overline{1, n}$. На каждой части S_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, n}$ (рис. 7).

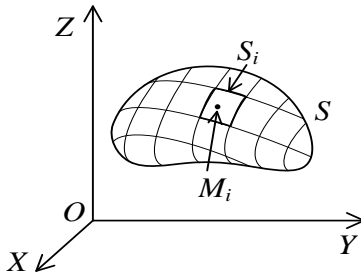


Рис.7

Опр. 1. *Интегральной суммой 1-го рода* называется выражение вида $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta S_i$.

При увеличении числа частей разбиения ($n \rightarrow \infty$) потребуем, чтобы максимальный диаметр этих частей стремился к нулю, т.е. $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i \rightarrow 0$.

Опр. 2. *Поверхностным интегралом (ПИ) 1-го рода* от функции $u = f(x, y, z)$ по поверхности S называют предел интегральных сумм 1-го рода при $d \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), если он не зависит ни от способа разбиения поверхности S на части, ни от выбора точек на них:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta S_i = \iint_S f(x, y, z) dS.$$

Теорема. *Если поверхность S гладкая, а функция $u = f(x, y, z)$ непрерывная на S , то ПИ 1-го рода $\iint_S f(x, y, z) dS$ существует.*

3.2. Свойства ПИ 1-го рода

1. $\iint_S C \cdot f(x, y, z) dS = C \cdot \iint_S f(x, y, z) dS$, где $C = const$.
2. $\iint_S (f(x, y, z) + g(x, y, z)) dS = \iint_S f(x, y, z) dS + \iint_S g(x, y, z) dS$.
3. $\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_1} f(x, y, z) dS + \iint_{S_2} f(x, y, z) dS$,

где $S = S_1 \cup S_2$, а $S_1 \cap S_2$ состоит из общей для них границы.

4. $\iint_{\Pi} dS = S_{\Pi}$, где S_{Π} – площадь поверхности Π .

3.3. Вычисление ПИ 1-го рода

Вычисление ПИ 1-го рода по поверхности S сводится к вычислению двойного интеграла по области D_{XY} – проекции S на плоскость XOY , все зависит от способа задания S .

Явное задание поверхности $S: z = z(x, y), (x, y) \in D_{XY}$.

Если эта функция непрерывна вместе со своими частными производными z'_x и z'_y , ПИ 1-го рода сводится к ДИ так:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{XY}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy,$$

где $dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$ – дифференциал элемента площади.

Аналогичные формулы верны, если поверхность S задана уравнением $y = y(x, z)$ или $x = x(y, z)$:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{XZ}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz \text{ или}$$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{YZ}} f(x(y, z), y, z) \cdot \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz,$$

где D_{XZ} и D_{YZ} – проекции S на плоскости XOZ и YOZ соответственно.

Параметрическое задание поверхности $S: \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases}$

где $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ – непрерывно дифференцируемые функции в области G плоскости UOV . Тогда:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_G f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \sqrt{A \cdot C - B^2} du dv,$$

где $A = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$, $C = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$,

$$B = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Иногда последнюю формулу записывают в векторном виде:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_G f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du dv,$$

где $\left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right|$ – модуль векторного произведения векторов

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \bar{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \bar{k} \text{ и } \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \bar{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \bar{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \bar{k} .$$

3.4. Приложения ПИ 1-го рода

Площадь поверхности Π , заданной в пространстве $OXYZ$, равна (по свойству 4):

$$S_{\Pi} = \iint_{\Pi} dS .$$

Масса поверхности S с поверхностной плотностью вещества $\mu(x, y, z)$ вычисляется по формуле:

$$m_S = \iint_S \mu(x, y, z) dS .$$

Статические моменты поверхности S с поверхностной плотностью вещества $\mu(x, y, z)$ относительно координатных плоскостей XOY , XOZ , YOZ соответственно вычисляются по формулам:

$$M_{XY} = \iint_S z \cdot \mu(x, y, z) dS , \quad M_{XZ} = \iint_S y \cdot \mu(x, y, z) dS ,$$

$$M_{YZ} = \iint_S x \cdot \mu(x, y, z) dS .$$

Координаты центра масс поверхности S с массой m_S и статическими моментами M_{XY} , M_{XZ} , M_{YZ} могут быть вычислены по формулам:

$$x_c = \frac{M_{YZ}}{m_S} , \quad y_c = \frac{M_{XZ}}{m_S} , \quad z_c = \frac{M_{XY}}{m_S} .$$

Моменты инерции поверхности S с заданной поверхностной плотностью $\mu(x, y, z)$ относительно координатных плоскостей XOY , XOZ , YOZ соответственно вычисляются по формулам:

$$J_{XY} = \iint_S z^2 \cdot \mu(x, y, z) dS , \quad J_{XZ} = \iint_S y^2 \cdot \mu(x, y, z) dS ,$$

$$J_{YZ} = \iint_S x^2 \cdot \mu(x, y, z) dS .$$

Сила притяжения между поверхностью S с заданной поверхностной плотностью $\mu(x, y, z)$ и телом массой m , находящимся в точке $(x_0, y_0, z_0) \notin S$, определяется выражением:

$$\bar{F} = Gm \cdot \iint_S \mu(x, y, z) \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^3} dS ,$$

где $\bar{r}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ – радиус-вектор произвольной точки поверхности S , $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \text{с}^{-2}$ – гравитационная постоянная (рис.8).

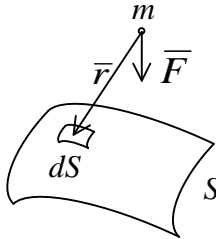


Рис. 8

Полный заряд поверхности S с поверхностной плотностью распределения заряда $q(x, y, z)$ выражается формулой:

$$Q = \iint_S q(x, y, z) dS .$$

3.5. Примеры решения задач

Пример 1. Найти момент инерции однородной поверхности конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2$ относительно плоскости XOY .

◀ Т.к. заданная поверхность S является однородной, то ее поверхностная плотность $\mu(x, y, z) = 1$, поэтому для нахождения искомого момента инерции используем формулу

$$J_{XY} = \iint_S z^2 dS .$$

Полная поверхность конуса состоит из боковой поверхности и поверхности основания: $S = S_{бок} \cup S_{осн}$ (рис. 9), значит,

$$\iint_S = \iint_{S_{бок}} + \iint_{S_{осн}}, \text{ т.е. } J_{XY} = I_{бок} + I_{осн}.$$

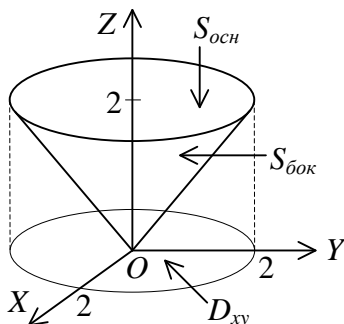


Рис. 9

Боковая поверхность конуса задана функцией $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Поэтому дифференциал элемента площади можно найти так:

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy \Rightarrow \\ &\Rightarrow dS = \sqrt{2} dx dy. \end{aligned}$$

Тогда можно вычислить интеграл $I_{бок}$:

$$\begin{aligned} I_{бок} &= \iint_{S_{бок}} z^2 dS = \iint_{D_{XY}} (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{2} dx dy = \left| \begin{array}{l} \text{ПСК: } x^2 + y^2 = \rho^2 \\ |I| = \rho, \quad 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right| = \\ &= \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 \cdot \rho d\rho = 8\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

Поверхность основания конуса задается функцией $z = 2$, поэтому вычислим интеграл $I_{осн}$:

$$I_{OCH} = \iint_{S_{OCH}} z^2 dS = \iint_{S_{OCH}} 2^2 dS = 4 \iint_{S_{OCH}} dS = 4 \cdot S_{OCH} = 4 \cdot \pi R_{OCH}^2 = 16\pi .$$

В итоге найдем искомый момент инерции:

$$J_{XY} = I_{бок} + I_{OCH} = 8\pi(\sqrt{2} + 2). \blacktriangleright$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \iint_S \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где

S – часть поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 9$, $0 \leq z \leq 2$.

◀ **1-й способ.** Зададим поверхность S явно: $x = \pm\sqrt{9 - y^2}$, $0 \leq z \leq 2$. Тогда она может быть спроектирована на плоскость YOZ в область D_{yz} , в которой $-3 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq 2$ (рис. 10).

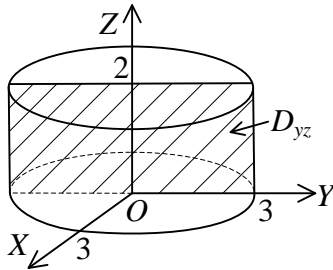


Рис. 10

Т.к. поверхность S состоит из двух частей $S_1: x = \sqrt{9 - y^2}$ (передняя поверхность цилиндра) и $S_2: x = -\sqrt{9 - y^2}$ (задняя поверхность), то воспользуемся свойством 3 ПИ 1-го рода и найдем интегралы по каждой из частей, а затем результаты сложим.

Если $x = \pm\sqrt{9 - y^2}$, то найдем дифференциал элемента площади:

$$dS = \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz = \sqrt{1 + \left(\frac{\mp y}{\sqrt{9 - y^2}}\right)^2 + 0^2} dy dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dS = \frac{3 dy dz}{\sqrt{9 - y^2}}.$$

Тогда найдем интегралы по поверхностям S_1 и S_2 :

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \iint_{S_{1,2}} \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \iint_{D_{yz}} \frac{1}{\sqrt{\left(\pm\sqrt{9-y^2}\right)^2 + y^2 + z^2}} \cdot \frac{3 dy dz}{\sqrt{9-y^2}} = \\ &= \iint_{D_{yz}} \frac{1}{\sqrt{9+z^2}} \cdot \frac{3 dy dz}{\sqrt{9-y^2}} = 3 \cdot \int_0^2 \frac{dz}{\sqrt{9+z^2}} \int_{-3}^3 \frac{dy}{\sqrt{9-y^2}} = \\ &= 3 \cdot \ln \left| z + \sqrt{9+z^2} \right| \Big|_0^2 \cdot \arcsin \frac{y}{3} \Big|_{-3}^3 = 3\pi \ln \frac{2 + \sqrt{13}}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда в итоге } I = I_1 + I_2 = 6\pi \ln \frac{2 + \sqrt{13}}{3}.$$

2-й способ. Т.к. поверхность S не задана явно, то введем цилиндрические координаты: $x = 3 \cos u$, $y = 3 \sin u$, $z = v$, тогда область G на плоскости UOV определяется неравенствами: $0 \leq u \leq 2\pi$ (угол на плоскости UOV), $0 \leq v \leq 2$ (высота цилиндра). Найдем выражение для dS .

1. Будем использовать формулу $dS = \sqrt{A \cdot C - B^2} du dv$. Найдем A , C и B :

$$A = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 = (-3 \sin u)^2 + (3 \cos u)^2 + 0^2 = 9,$$

$$C = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1,$$

$$B = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v = (-3 \sin u) \cdot 0 + 3 \cos u \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Тогда $dS = \sqrt{A \cdot C - B^2} du dv = \sqrt{9 \cdot 1 - 0^2} du dv = 3 du dv$.

2. В новых цилиндрических координатах радиус-вектор $\vec{r} = (3 \cos u, 3 \sin u, v)$. Тогда $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (-3 \sin u, 3 \cos u, 0)$ и

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (0, 0, 1)$. Поэтому векторное произведение:

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -3 \sin u & 3 \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cos u \cdot \bar{i} + 3 \sin u \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}.$$

Значит, дифференциал элемента площади равен:

$$dS = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| du dv = \sqrt{9 \cos^2 u + 9 \sin^2 u + 0^2} du dv = 3 du dv.$$

Сведем вычисление исходного ПИ 1-го рода к вычислению ДИ по области G :

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \iint_G \frac{3 du dv}{\sqrt{9 \cos^2 u + 9 \sin^2 u + v^2}} = \iint_G \frac{3 du dv}{\sqrt{9 + v^2}} = \\ &= 3 \cdot \int_0^{2\pi} du \int_0^2 \frac{dv}{\sqrt{9 + v^2}} = 3 \cdot u \Big|_0^{2\pi} \cdot \ln \left| v + \sqrt{9 + v^2} \right| \Big|_0^2 = 6\pi \ln \frac{2 + \sqrt{13}}{3}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Пример 3. Найти силу притяжения между полусферой с постоянной плотностью ρ_0 радиусом R с центром в начале координат и точечной массой m , расположенной в начале координат (рис. 11).

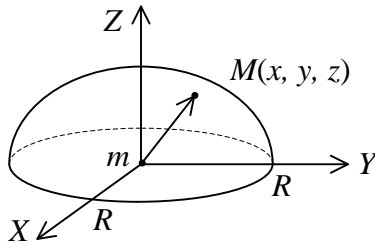


Рис. 11

◀ Искомая сила притяжения может быть найдена по формуле $\bar{F}(M) = \frac{Gm\rho_0}{R^3} \cdot \iint_S \bar{r} dS$, где $M(x, y, z)$ – произвольная точка поверхности S , радиус-вектор $\bar{r} = (x, y, z)$, $|\bar{r}| = R$.

Т.к. поверхность S – полусфера, то введем сферические координаты: $x = R \cos \varphi \sin \theta$, $y = R \sin \varphi \sin \theta$, $z = R \cos \theta$,

при этом $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, а дифференциал элемента

площади $dS = R^2 \sin \theta$ (выведите это самостоятельно).

Найдем координаты вектора $\vec{F}(M)$:

$$F_x = \frac{Gm\rho_0}{R^3} \cdot \iint_S x dS = \frac{Gm\rho_0}{R^3} \cdot \iint_G R \cos \varphi \sin \theta \cdot R^2 \sin \theta d\varphi d\theta =$$

$$= Gm\rho_0 \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = 0, \text{ т.к. } \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0;$$

$$F_y = \frac{Gm\rho_0}{R^3} \cdot \iint_S y dS = \frac{Gm\rho_0}{R^3} \cdot \iint_G R \sin \varphi \sin \theta \cdot R^2 \sin \theta d\varphi d\theta =$$

$$= Gm\rho_0 \cdot \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = 0, \text{ т.к. } \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0;$$

$$F_z = \frac{Gm\rho_0}{R^3} \cdot \iint_S z dS = \frac{Gm\rho_0}{R^3} \cdot \iint_G R \cos \theta \cdot R^2 \sin \theta d\varphi d\theta =$$

$$= Gm\rho_0 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi Gm\rho_0.$$

Т.к. $\vec{F} = (0, 0, \pi Gm\rho_0)$, то сила притяжения направлена вдоль оси OZ . ►

§ 4. Поверхностный интеграл (ПИ) 2-го рода

4.1. Понятие ПИ 2-го рода

Поверхность S называется *двусторонней*, если при обходе такой поверхности по любому замкнутому контуру, не пересекая ее границ, направление нормали к поверхности не меняется. В противном случае поверхность называется *односторонней*. Примерами двусторонних поверхностей служат плоскость, параболоид, конус, цилиндр, гиперболоид, эллипсоид; односторонних – лист Мебиуса, бутылка Клейна.

На двусторонней поверхности S возьмем произвольную точку M и проведем через нее нормаль \vec{n} к этой поверхности. Выберем на нормали одно из двух возможных направлений.

Любая поверхность, определенная уравнением $z = f(x, y)$, является двусторонней. Выбрав в каждой ее точке нормаль \bar{n} так, что $0 < \gamma = \angle(\bar{n}, OZ) < \frac{\pi}{2}$, получим *верхнюю* сторону поверхности, другая сторона будет *нижней*.

Всякая замкнутая поверхность, не имеющая самопересечений (например, сфера, эллипсоид и т.д.), является двусторонней. Направив в каждой точке замкнутой поверхности нормаль \bar{n} внутрь объема, ограниченного поверхностью, получим *внутреннюю* сторону поверхности, а направив нормаль наружу – *внешнюю* сторону.

Таким образом, поверхность S с выбранной ориентацией вектора нормали \bar{n} называется *ориентированной* поверхностью.

Пусть задана двусторонняя поверхность S в пространстве $OXYZ$, в точках этой поверхности задана непрерывная функция $R(x, y, z)$. Выберем одну сторону поверхности S . Разобьем ее произвольным образом на n частей S_1, \dots, S_n . Обозначим Δs_i – площадь проекции части S_i на плоскость XOY , при этом для внешней (верхней) стороны поверхности, для которой $\cos \gamma > 0$, значения Δs_i берем со знаком «плюс», а для внутренней (нижней) стороны, для которой $\cos \gamma < 0$, – со знаком «минус», $i = \overline{1, n}$ (рис. 12).

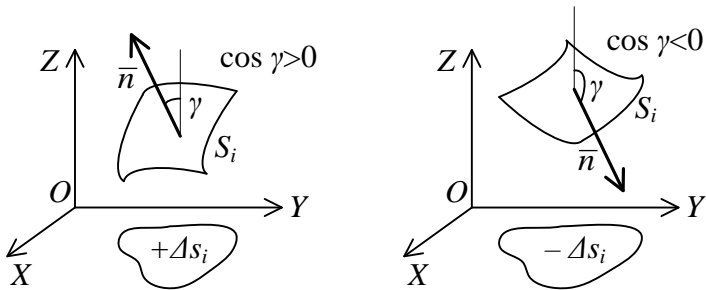


Рис. 12

На каждой из частей S_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, в которой вычислим значение функции $R(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, n}$. Составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^n R(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta s_i$. Обозначим максимальный диаметр частей разбиения: $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$. Будем разбивать поверхность так, чтобы при $n \rightarrow \infty$ выполнялось $d \rightarrow 0$.

Опр. Предел интегральных сумм $\sum_{i=1}^n R(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta s_i$ при $n \rightarrow \infty$ ($d \rightarrow 0$), если он существует и не зависит ни от способа разбиения поверхности S на части, ни от выбора точек на них, называется *поверхностным интегралом (ПИ) 2-го рода (или по координатам)* от функции $R(x, y, z)$ по переменным x и y . Он обозначается так:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta s_i = \iint_S R(x, y, z) dx dy.$$

Аналогично определяются ПИ по переменным x и z , а также y и z :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n Q(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta s_i = \iint_S Q(x, y, z) dx dz,$$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta s_i = \iint_S P(x, y, z) dy dz.$$

Тогда общим ПИ 2-го рода будет интеграл вида:

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ = \iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy. \end{aligned}$$

Если поверхность S является замкнутой, то ПИ 2-го рода обозначается так: $\oiint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy$.

Теорема 1. Если поверхность S гладкая, а функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны на S , то ПИ 2-го рода $\iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy$ существует.

4.2. Свойства ПИ 2-го рода

Для краткости описания свойств будем использовать следующее обозначение для ПИ 2-го рода: $\iint_S f$.

$$1. \iint_{S_{\text{внеш}}} f = - \iint_{S_{\text{внутр}}} f .$$

$$2. \iint_S C \cdot f = C \cdot \iint_S f , \text{ где } C = const .$$

$$3. \iint_S (f \pm g) = \iint_S f \pm \iint_S g .$$

$$4. \iint_S f = \iint_{S_1} f + \iint_{S_2} f , \text{ где } S = S_1 \cup S_2 , \text{ а } S_1 \cap S_2 \text{ состоит из}$$

общей для них границы.

5. Если S_x , S_y , S_z – цилиндрические поверхности с образующими, параллельными соответственно осям OX , OY , OZ , то верны равенства:

$$\iint_{S_x} P dy dz = \iint_{S_y} Q dx dz = \iint_{S_z} R dx dy = 0 .$$

4.3. Вычисление ПИ 2-го рода

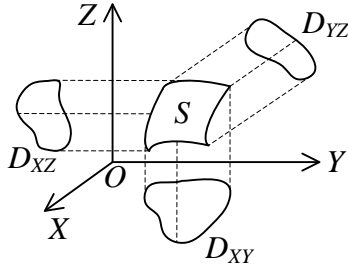
Вычисление ПИ 2-го рода сводится к вычислению ДИ. Пусть требуется вычислить интеграл

$$\iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy .$$

Метод проектирования на все координатные плоскости.

Строим нормаль \bar{n} к заданной поверхности $S: F(x, y, z) = 0$. Тогда направляющие косинусы этой нормали обозначаются $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, где $\alpha = \angle(\bar{n}, OX)$, $\beta = \angle(\bar{n}, OY)$, $\gamma = \angle(\bar{n}, OZ)$. Также обозначим через D_{YZ} проекцию поверхности $S: x = x(y, z)$ на плоскость YOZ (это

уравнение, как и два последующих, получено из данного уравнения поверхности $S: F(x, y, z) = 0$, D_{XZ} – проекцию поверхности $S: y = y(x, z)$ на плоскость XOZ , D_{XY} – проекцию поверхности $S: z = z(x, y)$ на плоскость XOY .



Тогда:

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dy dz &= \pm \iint_{D_{YZ}} P(x(y, z), y, z) dy dz, \\ \iint_S Q(x, y, z) dx dz &= \pm \iint_{D_{XZ}} Q(x, y(x, z), z) dx dz, \\ \iint_S R(x, y, z) dx dy &= \pm \iint_{D_{XY}} R(x, y, z(x, y)) dx dy, \end{aligned}$$

где знаки перед интегралами выбираются в зависимости от ориентации поверхности, т.е. знак «плюс» берется в том случае, когда соответствующий направляющий косинус положителен, в противном случае берем знак «минус».

Окончательно получим:

$$\begin{aligned} \iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ = \pm \iint_{D_{YZ}} P(x(y, z), y, z) dy dz \pm \iint_{D_{XZ}} Q(x, y(x, z), z) dx dz \pm \\ \pm \iint_{D_{XY}} R(x, y, z(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Замечание 1. Можно доказать справедливость следующих формул:

$$dy dz = \cos \alpha dS, \quad dx dz = \cos \beta dS, \quad dx dy = \cos \gamma dS,$$

где dS – дифференциал элемента площади поверхности S . Тогда ПИ 1-го рода и ПИ 2-го рода связаны между собой соотношением:

$$\begin{aligned} & \iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \\ & = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS. \end{aligned}$$

Метод проектирования на одну координатную плоскость.

Будем использовать предыдущую формулу связи ПИ 1-го и 2-го родов, для которой найдем направляющие косинусы как координаты единичного вектора нормали

$$\bar{n}^0 = \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

В случае если поверхность S задана неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, то нормаль \bar{n} к такой поверхности имеет координаты $\bar{n} = (F'_x, F'_y, F'_z)$ ([8], с. 142), поэтому направляющие косинусы:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\pm F'_x}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\pm F'_y}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{\pm F'_z}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}, \end{aligned}$$

где знак «минус» берется в случае тупого угла, а знак «плюс» – в случае острого угла.

В случае если поверхность S задана явно уравнением $z = z(x, y)$, то ее всегда можно задать неявно в виде $F(x, y, z) = z - z(x, y) = 0$, тогда направляющие косинусы:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \pm \frac{-z'_x}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}, \quad \cos \beta = \pm \frac{-z'_y}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}, \\ \cos \gamma &= \pm \frac{1}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}}. \end{aligned}$$

Пусть заданная поверхность S проектируется взаимно однозначно на плоскость XOY в область D_{XY} . Тогда в этом слу-

чае поверхность S можно задать уравнением $z = z(x, y)$, при этом дифференциал элемента площади равен $dS = \frac{dx dy}{|\cos \gamma|}$. По-

этому по формуле связи ПИ 1-го и 2-го родов получим:

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ = \iint_{D_{xy}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \Big|_{z=z(x,y)} \frac{dx dy}{|\cos \gamma|}.$$

Метод введения криволинейных координат на поверхности.

Пусть на поверхности S заданы криволинейные координаты:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

где $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ – непрерывно дифференцируемые функции в области G плоскости UOV . Тогда:

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ = \iint_G F(u, v) \cdot du dv,$$

где функция $F(u, v)$ может быть составлена по формуле:

$$F(u, v) = \begin{vmatrix} P(u, v) & Q(u, v) & R(u, v) \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}.$$

Если поверхность S является частью кругового цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченного некоторыми поверхностями $f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)$, то вводят **цилиндрические координаты**:

$$x = R \cos u, \quad y = R \sin u, \quad z = v,$$

для которых $0 \leq u \leq 2\pi$, $f_1(u) \leq v \leq f_2(u)$, $dS = R du dv$.

Если поверхность S является частью сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, то вводят **сферические координаты**:

$x = R \cos u \sin v$, $y = R \sin u \sin v$, $z = R \cos v$,
 для которых $0 \leq u_1 \leq u \leq u_2 \leq 2\pi$, $0 \leq v_1 \leq v \leq v_2 \leq \pi$,
 $dS = R^2 \sin v \, du \, dv$.

4.4. Формула Остроградского – Гаусса

Пусть задана в пространстве $OXYZ$ замкнутая поверхность S , которая является границей некоторой области V . Следующая теорема устанавливает связь между ПИ 2-го рода по замкнутой поверхности S и ТИ по области V .

Теорема 2. Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в пространственной области V , то имеет место формула:

$$\oiint_S P \, dy \, dz + Q \, dx \, dz + R \, dx \, dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz,$$

где интегрирование по S производится по ее внешней стороне.

Эта формула Остроградского* – Гаусса** позволяет сводить вычисление ПИ 2-го рода по замкнутой поверхности S к вычислению ТИ по области V , имеющей границу S .

4.5. Формула Стокса

Следующая теорема устанавливает связь между КИ 2-го рода и ПИ 2-го рода.

Пусть задана замкнутая пространственная кривая L , которая является границей области S .

Теорема 3. Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в точках ориентированной поверхности S , то справедлива следующая формула:

$$\oint_L P \, dx + Q \, dy + R \, dz =$$

* Остроградский М. В. – русский математик и механик (1801-1861).

** Карл Фридрих Гаусс – немецкий математик и астроном (1777-1855).

$$= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz.$$

При этом интегрирование по кривой L производится в положительном направлении, т.е. при обходе границы L поверхность S остается все время слева.

Последняя формула носит название *формулы Стокса**. Из нее следует, что если

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},$$

то $\oint_L P dx + Q dy + R dz = 0$, т.е. КИ 2-го рода не зависит от пути интегрирования.

Замечание 2. Можно заметить, что формула Грина является частным случаем формулы Стокса для кривой, заданной на плоскости XOY .

4.6. Приложения ПИ 2-го рода

Объем тела V , ограниченного замкнутой поверхностью S , можно найти по одной из следующих формул:

$$\begin{aligned} V &= \oiint_S z dx dy = \oiint_S y dx dz = \oiint_S x dy dz = \\ &= \frac{1}{3} \oiint_S z dx dy + y dx dz + x dy dz. \end{aligned}$$

Другие применения ПИ 2-го рода будут рассмотрены в главе 4.

4.7. Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \iint_S y^2 dx dz + z dx dy$ по внешней стороне параболоида $S: z = x^2 + y^2$, расположенного в 1-м октанте, отсеченного плоскостью $z = 2$.

◀ В данном случае $P(x, y, z) = 0$, $Q(x, y, z) = y^2$, $R(x, y, z) = z$. Вычислим заданный интеграл двумя способами.

* Д.Г. Стокс – английский физик и математик (1819-1903).

1-й способ. Спроектируем заданную поверхность на все три координатные плоскости. Но т.к. $P(x, y, z) = 0$, то проектировать на плоскость YOZ не придется.

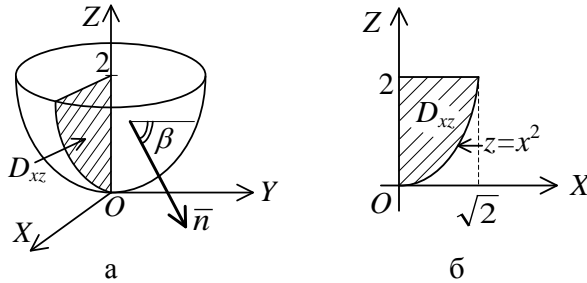


Рис. 13

При проектировании на плоскость XOZ угол $\beta = \angle(\bar{n}, OY)$ острый (рис. 13, а 13, б), поэтому перед соответствующим ДИ ставим знак «плюс»:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_S y^2 dx dz = \iint_{D_{xz}} y^2 \Big|_{y^2=z-x^2} dx dz = \iint_{D_{xz}} (z-x^2) dx dz = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^2 (z-x^2) dz = \frac{16\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

При проектировании на плоскость XOY угол $\gamma = \angle(\bar{n}, OZ)$ тупой (рис. 14, а 14, б), поэтому перед соответствующим ДИ поставим знак «минус».

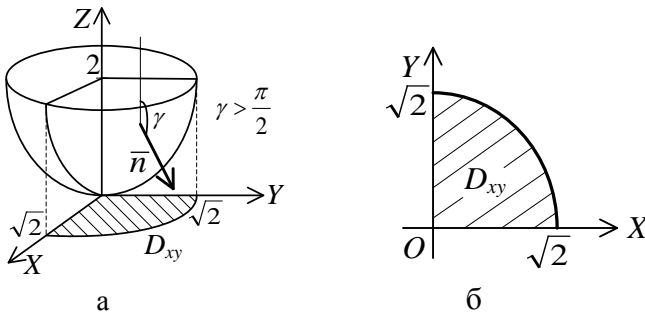


Рис. 14

Получим:

$$I_2 = \iint_S z \, dx \, dy = - \iint_{D_{XY}} z|_{z=x^2+y^2} \, dx \, dy = - \iint_{D_{XY}} (x^2 + y^2) \, dx \, dy =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{ПСК} \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \cdot \rho \, d\rho = -\frac{\pi}{2}.$$

В итоге получим $I = I_1 + I_2 = \frac{16\sqrt{2}}{15} - \frac{\pi}{2}$. ►

2-й способ. Спроектируем заданную поверхность только на плоскость XOY .

Т.к. угол $\gamma = \angle(\bar{n}, OZ)$ тупой, то $\cos \gamma < 0$, поэтому нормаль к поверхности $S: z = x^2 + y^2$ будет иметь координаты $\bar{n} = (z'_x, z'_y, -1) = (2x; 2y; -1)$. Отсюда можно найти единичный вектор нормали:

$$\bar{n}^0 = \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = \frac{(2x; 2y; -1)}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2}} = \frac{(2x; 2y; -1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Поэтому направляющие косинусы равны:

$$\cos \alpha = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, \quad \cos \beta = \frac{2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}},$$

$$\cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} < 0.$$

Учитывая, что $P = 0$, $Q = y^2$, $R = z$, находим выражение

$$P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma = \frac{2y^3 - z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Окончательно получим:

$$I = \iint_{D_{XY}} \frac{2y^3 - z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \Big|_{z=x^2+y^2} \cdot \frac{dx \, dy}{|\cos \gamma|} = \left| \cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \right| =$$

$$= \iint_{D_{XY}} (2y^3 - x^2 - y^2) dx dy = \left| \begin{array}{c} \text{ПСК} \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2} \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho^3 \sin^3 \varphi - \rho^2) \cdot \rho d\rho = \frac{16\sqrt{2}}{15} - \frac{\pi}{2}. \blacktriangleright$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I = \iint_S (y^2 - z^2) dy dz - y^2 dx dz + 2yz^2 dx dy$$

по поверхности конуса $S: x^2 + z^2 = y^2$, отсекаемой плоскостями $y = 0$ и $y = 1$ (нормаль \bar{n} образует тупой угол с ортом \bar{j}).

◀ **1-й способ.** Спроектируем заданную поверхность только на плоскость XOZ (рис. 15).

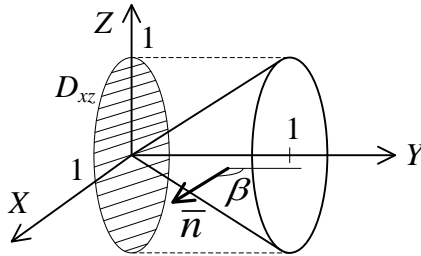


Рис. 15

Для нахождения нормали \bar{n} зададим поверхность неявно $S: x^2 + z^2 - y^2 = 0$. Тогда $\bar{n} = (2x; -2y; 2z)$, где знак «минус» говорит о том, что угол $\beta = \angle(\bar{n}, OY)$ тупой при $y \in [0; 1]$. Можно найти единичный вектор нормали:

$$\bar{n}^0 = \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = \frac{(2x; -2y; 2z)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}} = \frac{(x; -y; z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Учитывая, что $P = y^2 - z^2$, $Q = -y^2$, $R = 2yz^2$, находим подынтегральное выражение:

$$P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma = \frac{(y^2 - z^2) \cdot x - y^2 \cdot (-y) + 2yz^2 \cdot z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =$$

$$= \frac{(y^2 - z^2) \cdot x + y^3 + 2yz^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

В итоге сведем заданный ПИ 2-го рода к ДИ по проекции поверхности S на плоскость XOZ – области D_{XZ} :

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{XZ}} \frac{(y^2 - z^2) \cdot x + y^3 + 2yz^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{y=\sqrt{x^2+z^2}} \cdot \frac{dx dz}{\left| \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right|} = \\ &= \iint_{D_{XZ}} \frac{(y^2 - z^2) \cdot x + y^3 + 2yz^3}{y} \Big|_{y=\sqrt{x^2+z^2}} dx dz = \\ &= \iint_{D_{XZ}} \left(x\sqrt{x^2+z^2} - \frac{xz^2}{\sqrt{x^2+z^2}} + (x^2+z^2) + 2z^3 \right) dx dz = \\ &= \left| \begin{array}{ll} \text{ПСК} & 0 \leq \rho \leq 1 \\ x = \rho \cos \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = \rho \sin \varphi & |I(\rho, \varphi)| = \rho \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho^2 \cos \varphi - \cos \varphi \cdot \rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 + 2\rho^3 \sin^3 \varphi) \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2-й способ. Замкнем поверхность S , добавив к ней поверхность $S_{y=1}$ – часть плоскости $y=1$, при этом получим замкнутую поверхность S^* . Тогда по свойству 4 для ПИ 2-го рода имеем $\oiint_{S^*} = \iint_S + \iint_{S_{y=1}}$, откуда $I = \iint_S = \oiint_{S^*} - \iint_{S_{y=1}}$.

Для вычисления ПИ по замкнутой поверхности S^* будем использовать формулу Остроградского – Гаусса, в которой V – тело, ограниченное областью S^* :

$$\begin{aligned} &\oiint_{S^*} (y^2 - z^2) dy dz - y^2 dx dz + 2yz^2 dx dy = \\ &= \iiint_V \left((y^2 - z^2)'_x + (-y^2)'_y + (2yz^2)'_z \right) dx dy dz = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_V (0 - 2y + 4yz) dx dy dz = \left. \begin{array}{l} \text{ЦСК} \quad 0 \leq \rho \leq 1 \\ x = \rho \cos \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = \rho \sin \varphi \quad \rho \leq y \leq 1 \\ y = y \quad |I(\rho, \varphi, y)| = \rho \end{array} \right| = \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_{\rho}^1 (-2y + 4y\rho \sin \varphi) \cdot \rho dy = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

При вычислении ПИ 2-го рода по поверхности $S_{y=1}$ будем использовать свойство 5. Т. к. плоскость $y=1$ параллельна оси OX и OZ , то $\iint_{S_{y=1}} (y^2 - z^2) dy dz = 0$ и $\iint_{S_{y=1}} 2yz^2 dx dy = 0$. Остается вычислить ПИ 2-го рода $\iint_{S_{y=1}} (-y^2) dx dz$, сделаем это, спроектировав поверхность $S_{y=1}$ на плоскость XOZ :

$$\begin{aligned}
\iint_{S_{y=1}} (-y^2) dx dz &= \iint_{D_{XZ}} (-y^2) \Big|_{y=1} dx dz = - \iint_{D_{XZ}} dx dz = \\
&= -S_{D_{XZ}} = -\pi \cdot 1^2 = -\pi.
\end{aligned}$$

Окончательно получим:

$$I = \iint_{S^*} - \iint_{S_{y=1}} = -\frac{\pi}{2} - (-\pi) = \frac{\pi}{2}. \blacktriangleright$$

Пример 3. Найти объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

◀ Для вычисления объема будем использовать формулу $V = \iint_S z dx dy$, где S – поверхность эллипсоида, V – тело, ограниченное S . Для этого ПИ 2-го рода $P = 0$, $Q = 0$, $R = z$.

Поверхность эллипсоида S зададим параметрически:

$$x = a \cos u \sin v, \quad y = b \sin u \sin v, \quad z = c \cos v,$$

при этом $G: 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi$. Для составления функции $F(u, v)$ найдем необходимые частные производные:

$$x'_u = -a \sin u \sin v, \quad y'_u = b \cos u \sin v, \quad z'_u = 0,$$

$$x'_v = a \cos u \cos v, \quad y'_v = b \sin u \cos v, \quad z'_v = -c \sin v.$$

Тогда составим подынтегральную функцию:

$$F(u, v) = \begin{vmatrix} P(u, v) & Q(u, v) & R(u, v) \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \cos v \\ -a \sin u \sin v & b \cos u \sin v & 0 \\ a \cos u \cos v & b \sin u \cos v & -c \sin v \end{vmatrix} = -abc \sin v \cos^2 v.$$

Тогда искомый объем будет равен:

$$V = \iint_S z \, dx \, dy = \iint_G |F(u, v)| \, du \, dv = abc \iint_G \sin v \cos^2 v \, du \, dv =$$

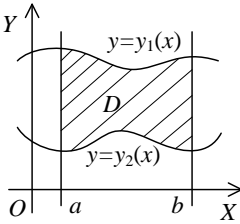
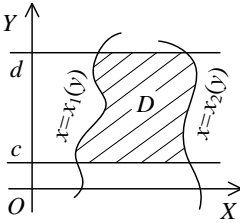
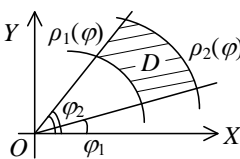
$$= abc \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \sin v \cos^2 v \, dv = \frac{4}{3} \pi abc. \blacktriangleright$$

Замечание 3. При проектировании поверхности на какую-либо координатную плоскость необходимо следить, чтобы в проекции получалась область, а не линия. В противном случае нужно проектировать поверхность на другую координатную плоскость.

Замечание 4. Если поверхность проектируется на какую-либо координатную плоскость не взаимно однозначно, то необходимо пользоваться свойством аддитивности ПИ, т.е. разбивать поверхность на такие части, которые однозначно проектируются на выбранную координатную плоскость.

Обобщим сведения главы 2 и главы 3 в табл. 1–6.

Двойной интеграл

Вид области D	Способ вычисления ДИ
	$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$
	$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$
	<p>ПСК: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $I = \rho$</p> $\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D^*} f^*(\rho, \varphi) \cdot \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f^*(\rho, \varphi) \cdot \rho d\rho \end{aligned}$ <p>ОПСК: $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \varphi$, $I = ab\rho$</p> $\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D^*} f^*(\rho, \varphi) \cdot ab\rho d\rho d\varphi = \\ &= ab \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f^*(\rho, \varphi) \cdot \rho d\rho \end{aligned}$

Тройной интеграл

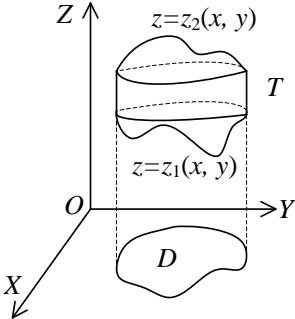
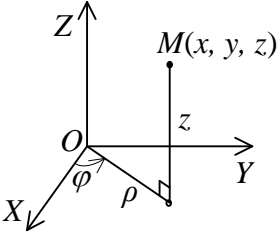
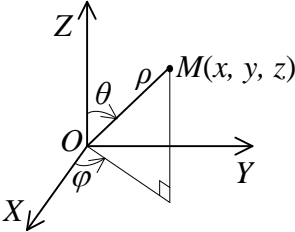
Система координат	Способ вычисления ТИ
<p>ДСК</p> 	$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz =$ $= \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right)$
<p>ЦСК</p> 	$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$ $ I = \rho$ $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz =$ $= \iiint_{V^*} f^*(\rho, \varphi, z) \cdot \rho d\rho d\varphi dz$
<p>ССК</p> 	$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta,$ $z = \rho \cos \theta, \quad I = \rho^2 \sin \theta$ $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz =$ $= \iiint_{V^*} f^*(\rho, \varphi, \theta) \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta$

Таблица 3

Криволинейный интеграл 1-го рода

Способ задания кривой	Способ вычисления КИ 1-го рода
ДСК $L: y = y(x), x \in [a, b]$	$\int_L f(x, y) dl =$ $= \int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx$
ПСК $L: \rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$	$\int_L f(x, y) dl =$ $= \int_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi) \cdot \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$
Параметрически $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta]$	$\int_L f(x, y) dl =$ $= \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$

Таблица 4

Криволинейный интеграл 2-го рода

Способ задания кривой	Способ вычисления КИ 2-го рода
ДСК $L: y = y(x), x \in [a, b]$	$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy =$ $= \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y') dx$
ДСК $L: x = x(y), y \in [c, d]$	$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy =$ $= \int_c^d (P(x(y), y) \cdot x' + Q(x(y), y)) dy$
Параметрически $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta]$	$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy =$ $= \int_\alpha^\beta (P(x(t), y(t)) \cdot x' + Q(x(t), y(t)) \cdot y') dt$

Таблица 5

Поверхностный интеграл 1-го рода

Способ задания поверхности	Способ вычисления ПИ 1-го рода
$z = z(x, y)$	$\iint_S f(x, y, z) dS =$ $= \iint_{D_{XY}} f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$
$y = y(x, z)$	$\iint_S f(x, y, z) dS =$ $= \iint_{D_{XZ}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz$
$x = x(y, z)$	$\iint_S f(x, y, z) dS =$ $= \iint_{D_{YZ}} f(x(y, z), y, z) \cdot \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz$

Таблица 6

Поверхностный интеграл 2-го рода

<p>Проектирование на все координатные плоскости:</p> $S: F(x, y, z) = 0 \Rightarrow x = x(y, z), \quad y = y(x, z), \quad z = z(x, y).$ $\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy =$ $= \pm \iint_{D_{YZ}} P(x(y, z), y, z) dy dz \pm \iint_{D_{XZ}} Q(x, y(x, z), z) dx dz \pm$ $\pm \iint_{D_{XY}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$
<p>Проектирование на плоскость XOY:</p> $S: F(x, y, z) = 0 \Rightarrow z = z(x, y).$ $\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy =$ $= \iint_{D_{XY}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \Big _{z=z(x, y)} \frac{dx dy}{ \cos \gamma }.$

ГЛАВА 4. СКАЛЯРНОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПОЛЯ

Теория поля – крупный раздел физики, механики, математики, в котором изучаются скалярные и векторные поля.

К рассмотрению скалярных и векторных полей приводят многие задачи физики, электротехники, механики и математики. Изучение одних физических полей способствует изучению и других. Так, например, силы всемирного тяготения, магнитные, электрические силы – все они изменяются обратно пропорционально квадрату расстояния от своего источника; диффузия в растворах происходит по законам, общим с распространением тепла в различных средах; вид силовых магнитных линий напоминает картину обтекания препятствий жидкостью и т. д.

Математической основой теории поля являются такие понятия, как *градиент*, *поток*, *потенциал*, *дивергенция*, *ротор*, *циркуляция*, которые рассматриваются в данной главе.

§ 1. Скалярное поле (СП)

1.1. Определение СП. Линии и поверхности уровня

Опр. 1. Числовая функция u , заданная в каждой точке M некоторой пространственной области Ω , называется *скалярным полем* [то есть каждой точке M этой области ставится в соответствие число $u(M)$].

СП задается скалярной функцией

$$u = u(M) = u(x, y, z),$$

определенной в области Ω . Если поле задано функцией двух переменных

$$u = u(x, y),$$

то оно называется *плоским*. Скалярными являются поле температур, поле давлений, поле плотности вещества и др.

Геометрической характеристикой СП служат *поверхности уровня* – множества точек пространства, в которых функция принимает постоянное значение:

$$u(x, y, z) = C -$$

уравнение различных поверхностей уровня при различных C .

В плоском поле

$$u(x, y) = C -$$

уравнение линий уровня (см. [8], с. 131, 151).

1.2. Производная по направлению. Градиент СП

Пусть СП $u = u(M)$ определено в области $\Omega \in R^3$.

Зафиксируем точку $M_0 \in \Omega$ и выберем некоторое направление, определяемое вектором \vec{l} ; если существует предел $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}$, то его называют *производной функции $u = u(M)$ по данному направлению \vec{l} в заданной точке M_0* , где

$$\Delta u = u(M) - u(M_0), \quad \Delta l = \left| \overline{MM_0} \right|, \quad \overline{MM_0} \parallel \vec{l}.$$

Пусть скалярная функция $u = u(x, y, z)$ дифференцируема в точке M_0 . Производную функции $u = u(x, y, z)$ в точке M_0 по направлению вектора $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$ вычисляют по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \Big|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{M_0} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{M_0} \cdot \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{M_0} \cdot \cos \gamma, \quad (1)$$

где $\cos \alpha = \frac{l_1}{|\vec{l}|}$, $\cos \beta = \frac{l_2}{|\vec{l}|}$, $\cos \gamma = \frac{l_3}{|\vec{l}|}$ – направляющие косинусы вектора \vec{l} .

Производная поля в данной точке M_0 по направлению \vec{l} характеризует скорость изменения поля в этом направлении.

Опр. 2. *Градиентом СП* в точке M называется вектор

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_M \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_M \cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_M \cdot \vec{k}. \quad (2)$$

Между производной поля $u(x, y, z)$ по направлению \vec{l} и градиентом в точке M существует следующая связь:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = (\text{grad } u, \vec{l}). \quad (3)$$

Из равенства (3) следует, что в каждой точке M , не являющейся критической, градиент направлен в сторону максимального возрастания поля u , а модуль градиента равен величине скорости этого возрастания:

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Пример. Найти производную и градиент СП $u = x^2 + 2xy$ в точке $M(\sqrt{2}; 1)$ эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ по направлению внешней нормали к эллипсу в этой точке.

◀ Направление \bar{l} внешней нормали к эллипсу в точке M перпендикулярно к направлению касательной к эллипсу в этой точке. Точка $M(\sqrt{2}; 1)$ лежит на части эллипса с уравнением

$$y = \sqrt{2 - \frac{x^2}{2}} \quad (\text{рис. 1}).$$

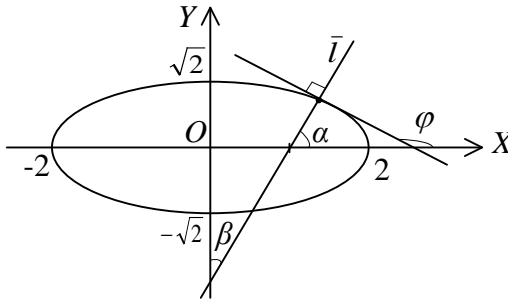


Рис. 1

Обозначим через φ угол, который образует направление касательной с осью OX . Тогда

$$\text{tg } \varphi = y'|_M = \frac{-\sqrt{2}x}{2\sqrt{4-x^2}} \Big|_{x=\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Если обозначить угол, образованный направлением \vec{l} с осью OX через α , то из условия перпендикулярности нормали и касательной получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-1}{\operatorname{tg} \varphi} = \sqrt{2}.$$

Находим направляющие косинусы вектора \vec{l}

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \cos \beta = \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Вычислим частные производные

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = (2x + 2y)|_M = 2(\sqrt{2} + 1); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = 2x|_M = 2\sqrt{2}$$

и получим по формуле (1)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \right|_M = 2(\sqrt{2} + 1) \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{6}}{3} = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} (3 + \sqrt{2}).$$

А по формуле (2)

$$\operatorname{grad} u|_M = 2(\sqrt{2} + 1)\vec{i} + 2\sqrt{2}\vec{j}. \blacktriangleright$$

§ 2. Векторное поле (ВП)

2.1. Определение ВП. Векторные линии

Опр. 1. Если в каждой точке M пространственной области Ω задан определенный вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, то говорят, что в этой области задано *векторное поле*.

ВП задается тремя скалярными функциями

$$P(x, y, z), \quad Q(x, y, z), \quad R(x, y, z),$$

являющимися проекциями вектора $\vec{a}(M)$ на координатные оси декартовой системы:

$$\vec{a} = \vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Примерами ВП могут служить поле электрической напряженности, силовое поле, поле скоростей текущей жидкости и др. ВП тоже может быть плоским, например

$$\vec{a} = \vec{a}(M) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}.$$

Опр. 2. Векторной линией поля \bar{a} называется такая линия, касательная в каждой точке которой направлена вдоль заданного в этой точке вектора поля (рис. 2).

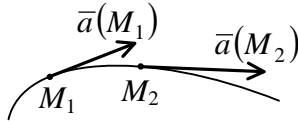


Рис. 2

Всякое ВП $\bar{a}(M)$ обладает семейством векторных линий. Уравнения этого семейства есть общее решение дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \quad (4)$$

Замечание 1. Если ВП плоское, то дифференциальное уравнение векторных линий имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}, \\ z = \text{const.} \end{cases}$$

Пример 1. Для плоского ВП $\bar{a} = x \ln x \bar{i} + (2y + \ln x) \bar{j}$ найти уравнения семейства векторных линий и векторной линии, проходящей через точку $M(e; 2)$.

◀ Так как $P = x \ln x$, $Q = 2y + \ln x$, то, согласно замечанию 1, уравнение семейства одно и определяется общим решением дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{x \ln x} = \frac{dy}{2y + \ln x} \Leftrightarrow (2y + \ln x) - x \cdot \ln x \cdot y' = 0.$$

Это уравнение линейное первого порядка. Решая его методом вариации произвольной постоянной, получаем общее решение в виде

$$y = C \ln^2 x - \ln x.$$

Выделим из этого семейства одно решение – то, которое представляет собой уравнение векторной линии, проходящей

через точку $(e; 2)$. Подставив в общее решение $x = e$, $y = 2$, получим $C = 3$. Итак, искомая векторная линия $y = 3 \ln^2 x - \ln x$. ►

2.2. Поток и дивергенция ВП (векторная запись формулы Остроградского – Гаусса)

Пусть в поле вектора

$$\bar{a} = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$$

задана ориентированная поверхность S . Обозначим через $\bar{n}^0 = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k}$ единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхности в ее произвольной точке.

Опр. 3. ПИ 1-го рода по поверхности S от скалярного произведения вектора \bar{a} на вектор \bar{n}^0

$$\iint_S (\bar{a}, \bar{n}^0) dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \quad (5)$$

называется *поток векторного поля через ориентированную поверхность S* и обозначается $\Pi_S(\bar{a})$.

В случае замкнутой поверхности S поток записывается в виде

$$\Pi_S(\bar{a}) = \oiint_S (\bar{a}, \bar{n}^0) dS.$$

Если ввести в рассмотрение вектор $d\bar{S} = \bar{n}^0 \cdot dS$ и обозначить его проекции на оси координат $dydz$, $dx dz$, $dx dy$, то формулу (5) можно переписать в виде

$$\Pi_S(\bar{a}) = \iint_S (\bar{a}, \bar{n}^0) dS = \iint_S (\bar{a}, d\bar{S}) = \iint_S P dydz + Q dx dz + R dx dy, \quad (6)$$

где вектор $d\bar{S}$ направлен по нормали к выбранной стороне поверхности S . Правая часть равенства (6) является ПИ 2-го рода.

Если, например, \bar{a} – поле скоростей текущей жидкости в области Ω и $S \subset \Omega$ – незамкнутая поверхность с выбранным направлением нормали \bar{n}^0 , то $\Pi_S(\bar{a})$ равен количеству жидкости, проходящей в единицу времени через поверхность S в на-

правлении \bar{n}^0 . Если S – замкнутая поверхность, ограничивающая некоторую область G с внешней нормалью \bar{n}^0 , то $\Pi_S(\bar{a})$ равен разности количеств втекающей в эту область жидкости и вытекающей. В случае если $\Pi_S(\bar{a}) > 0$, то в области G имеются *источники* (где векторные линии порождаются), а если $\Pi_S(\bar{a}) < 0$, то это указывает на наличие в области G *стоков* (где векторные линии заканчиваются). А если $\Pi_S(\bar{a}) = 0$, тогда либо нет ни источников ни стоков, либо источники и стоки уравновешивают друг друга.

Если ориентированная поверхность S задана явно непрерывно дифференцируемой функцией $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{XY}$, то по формуле (6) можно получить следующую формулу, связывающую поверхностный интеграл по поверхности S с двойным интегралом по проекции D_{XY} этой поверхности на плоскость XOY :

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdx dy = \pm \iint_{D_{XY}} (\bar{a}, \bar{n}^0) \Big|_{z=z(x,y)} \cdot \frac{dxdy}{|\cos \gamma|}, \quad (7)$$

где знак «плюс» берется, когда $\angle(\bar{n}^0, OZ)$ острый.

Если поверхность S задана явно уравнением $y = y(x, z)$, $(x, z) \in D_{XZ}$ или $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_{YZ}$, то соответственно меняются роли переменных в формуле (7).

Пример 2. Найти поток ВП $\bar{a} = z\bar{i} - 4y\bar{j} + 8x^2\bar{k}$ через часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2 + 1$, отсеченной плоскостью $z = 2$, если нормаль \bar{n} к заданной поверхности составляет тупой угол с осью аппликат (рис. 3).

◀ Поток ВП \bar{a} будем искать по формуле

$$\Pi = \iint_{D_{XY}} (\bar{a}, \bar{n}^0) \Big|_{z=z(x,y)} \frac{dxdy}{|\cos \gamma|}, \text{ где } \bar{n}^0 \text{ – единичный вектор нор-}$$

мали к заданной поверхности S , $\gamma = \angle(\bar{n}^0, OZ)$, D_{XY} – проекция поверхности S на плоскость XOY .

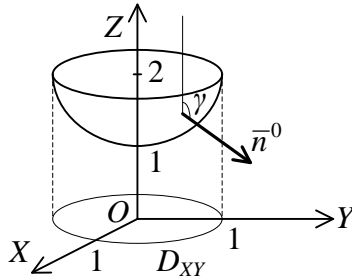


Рис. 3

Для поверхности $S: z = x^2 + y^2 + 1$ или $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$ нормаль $\bar{n} = \text{grad } S = (S'_x; S'_y; S'_z) = (2x; 2y; -1)$, тогда единичный вектор нормали $\bar{n}^0 = \frac{\text{grad } S}{|\text{grad } S|} = \frac{(2x; 2y; -1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$. В данном

случае $\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} < 0$, т.е. $\gamma > \frac{\pi}{2}$.

Найдем скалярное произведение (\bar{a}, \bar{n}^0) :

$$(\bar{a}, \bar{n}^0) = (z; -4y; 8x^2) \cdot \frac{(2x; 2y; -1)}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} = \frac{2xz - 8y^2 - 8x^2}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Т.к. проекцией заданной поверхности S на плоскость XOY является круг радиусом $R = 1$ ($x^2 + y^2 + 1 = 2 \Rightarrow \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2 = 1$), то при вычислении соответствующего ДИ необходимо будет перейти в ПСК.

Вычислим требуемый поток ВП:

$$\Pi = \iint_{D_{XY}} \left. \frac{2xz - 8y^2 - 8x^2}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \right|_{z=x^2+y^2+1} \cdot \frac{dx dy}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} =$$

$$\Pi = \iint_{D_{XY}} (2x(x^2 + y^2 + 1) - 8(x^2 + y^2)) dx dy = [\text{ПСК}] =$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} (2\rho(\rho^2 + 1)\cos\varphi - 8\rho^2) \cdot \rho d\varphi = -4\pi. \blacktriangleright$$

Если функции P , Q , R , дифференцируемы в замкнутой области Ω , ограниченной кусочно-гладкой поверхностью S , то имеет место *формула Остроградского* (гл. 3, § 4, п. 4.4.)

$$\oiint_S Pdydz + Qdxdz + Rdx dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \quad (8)$$

где выбрана внешняя сторона поверхности S .

Опр. 4. *Дивергенцией векторного поля \vec{a} в точке M* называется предел отношения потока поля через замкнутую поверхность S , окружающую точку M , к объему V тела, ограниченного этой поверхностью, при стремлении диаметра d тела к нулю:

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\oiint_S (\vec{a}, \vec{n}^0) dS}{V}.$$

По знаку дивергенции можно судить о наличии источника или стока векторного поля в точке M . Так, если $\operatorname{div} \vec{a}(M) > 0$, то в точке M – источник, а если $\operatorname{div} \vec{a}(M) < 0$, то – сток. Если $\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$, то в точке M нет ни источника, ни стока или они уравновешивают друг друга. Абсолютная величина $|\operatorname{div} \vec{a}(M)|$ характеризует *мощность* источника или стока в точке M .

Для ВП \vec{a} в области Ω существует

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_M + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_M + \left. \frac{\partial R}{\partial z} \right|_M \quad (9)$$

в любой точке $M \in \Omega$.

Тогда формула Остроградского в векторной форме имеет вид

$$\oiint_S (\vec{a}, \vec{n}^0) dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} dv. \quad (10)$$

Опр. 5. ВП называется *соленоидальным* в области Ω , если его дивергенция равна нулю в каждой точке области Ω .

Для соленоидального поля характерно, что в Ω отсутствуют источники и стоки, а $\Pi_S(\bar{a}) = 0$ для любой замкнутой поверхности $S \subset \Omega$.

Пример 3. Вычислить поток ВП $\bar{a} = y^2 \bar{j} + z \bar{k}$ через замкнутую поверхность, состоящую из частей $z = x^2 + y^2$ и $z = 2$, в направлении внешней нормали (рис. 4).

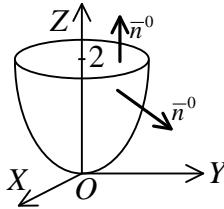


Рис. 4

◀ Поле $\bar{a} = (0; y^2; z)$ дифференцируемо во всем пространстве, поэтому по формуле (9) получим

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0'_x + (y^2)'_y + (z)'_z = 2y + 1$$

и по формуле (10)

$$\Pi_S(\bar{a}) = \iiint_{\Omega} (2y + 1) dx dy dz,$$

где Ω – область, в которой задано ВП \bar{a} .

Интеграл удобно вычислять в цилиндрических координатах

$$\Pi_S(\bar{a}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho \sin \varphi + 1) \rho d\rho \int_{\rho^2}^2 dz = 2\pi. \blacktriangleright$$

Пример 4. Вычислить поток вектора $\bar{a} = x^3 \bar{i} + y^3 \bar{j} + z^3 \bar{k}$ через внешнюю сторону части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, которая вырезана конической поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (рис. 5).

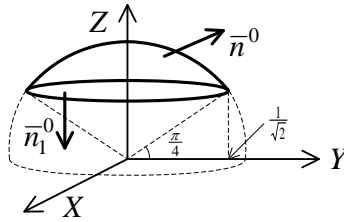


Рис. 5

◀ Линия пересечения сферы с конусом лежит в плоскости $z = 1/\sqrt{2}$, поэтому дополним часть сферы еще этой плоскостью и получим замкнутую поверхность. Тогда поток через часть сферы S будет получен интегралами

$$\Pi_S(\bar{a}) = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \bar{a} \, dv - \iint_{S_1} (\bar{a}, \bar{n}^0) \, dS,$$

где S_1 – нижняя сторона части плоскости $z = 1/\sqrt{2}$, имеющая форму круга с границей $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, для этой поверхности $\bar{n}_1^0(0; 0; -1)$. Вычислим

$$\begin{aligned} \Pi_S(\bar{a}) &= \iiint_V \left((x^3)'_x + (y^3)'_y + (z^3)'_z \right) dx dy dz - \\ &- \iint_{S_1} (x^3 \cdot 0 + y^3 \cdot 0 + z^3 \cdot 1) dx dy = \\ &= \iiint_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz + \iint_{S_1} z^3 dx dy = \left[\begin{array}{l} \text{перейдем} \\ \text{в ССК} \end{array} \right] = \\ &= 3 \iiint_V \rho^4 \sin \theta \, d\rho d\varphi d\theta + \iint_{D_{xy}} \frac{1}{2\sqrt{2}} dx dy = \left[\begin{array}{l} D_{xy} - \text{проекция круга} \\ x^2 + y^2 = 1/2 \\ \text{на плоскость } XOY \end{array} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2 \cdot \sin \theta}}}^1 \rho^4 d\rho + \frac{1}{2\sqrt{2}} \iint_D dx dy = \\
&= \frac{3 \cdot 2\pi}{5} \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \theta - \frac{\cos \theta}{4\sqrt{2} \sin^5 \theta} \right) d\theta + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = \\
&= \frac{6\pi}{5} \left(1 - \frac{19\sqrt{2}}{32} \right) + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}. \blacktriangleright
\end{aligned}$$

2.3. Циркуляция и ротор ВП

(векторная запись формулы Стокса)

Пусть в области Ω заданы непрерывное ВП $\bar{a} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ и ориентированная гладкая кривая L (с заданным направлением обхода). Обозначим единичный вектор касательной к линии L через $\bar{\tau}^0$, направление которого совпадает с выбранным направлением на линии.

Опр. 6. *Линейным интегралом ВП \bar{a} вдоль линии L называется* КИ 1-го рода от скалярного произведения векторов \bar{a} и $\bar{\tau}^0$:

$$\int_L (\bar{a}, \bar{\tau}^0) d\ell, \quad (11)$$

где $d\ell$ – дифференциал длины дуги кривой.

Если ввести в рассмотрение вектор $d\bar{r} = \bar{\tau}^0 d\ell$ (\bar{r} – радиус-вектор точки, описывающий линию L) и обозначить его проекции на координатные оси через dx, dy, dz , то формулу (11) можно записать в виде

$$\int_L (\bar{a}, \bar{\tau}^0) d\ell = \int_L (\bar{a}, d\bar{r}) = \int_L P dx + Q dy + R dz, \quad (12)$$

где вектор $d\bar{r}$ направлен по касательной к L . Правая часть равенства (12) является КИ 2-го рода.

Если \bar{a} – силовое поле, то линейный интеграл равен работе, которую поле совершает по перемещению материальной точки вдоль ориентированной линии L .

Опр. 7. Линейный интеграл называется *циркуляцией ВП* \bar{a} , если L – замкнутая линия.

Если L – замкнутая пространственная кривая, то ее направление обхода специально оговаривается.

Пример 5. Вычислить циркуляцию ВП $\bar{a} = (x - y)\bar{i} + (y - z)\bar{j} + (z - x)\bar{k}$ по замкнутой линии L , состоящей из одного витка винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = \frac{bt}{2\pi}$ от точки $A(a, 0, 0)$ до точки $B(a, 0, b)$ и прямолинейного отрезка BA .

◀ Виток AB соответствует изменению параметра t в уравнениях кривой от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi$. Прямая BA имеет направляющий вектор $\overline{BA} = (0; 0; -b)$, поэтому ее параметрические уравнения будут $x = a$, $y = 0$, $z = bt$, где t изменяется от 1 до 0. Вычислим циркуляцию

$$\begin{aligned} \int_{AB} (\bar{a}, d\bar{r}) + \int_{BA} (\bar{a}, d\bar{r}) &= \int_{AB} (x - y)dx + (y - z)dy + (z - x)dz + \\ &+ \int_{BA} (x - y)dx + (y - z)dy + (z - x)dz = \\ &= \int_0^{2\pi} \left((a \cos t - a \sin t) \cdot (-a \sin t) + \left(a \sin t - \frac{bt}{2\pi} \right) \cdot a \cos t + \left(\frac{bt}{2\pi} - a \cos t \right) \cdot \frac{b}{2\pi} \right) dt + \\ &+ \int_1^0 ((a - 0) \cdot 0 + (0 - bt) \cdot 0 + (bt - a) \cdot b) dt = \\ &= a^2 \pi + \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2} + ab = a(a\pi + b). \blacktriangleright \end{aligned}$$

Опр. 8. Если ВП $\bar{a} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ имеет дифференцируемые в точке M составляющие P, Q, R , то *ротором* (или *вихрем*) ВП \bar{a} в точке M называется вектор

$$\text{rot } \bar{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k},$$

где частные производные вычислены в этой точке.

В символической форме $\text{rot } \bar{a}$ имеет вид:

$$\text{rot } \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Поясним *физический смысл* ротора ВП. Найдем ротор поля линейных скоростей \bar{V} твердого тела, вращающегося вокруг оси OZ с постоянной угловой скоростью $\bar{\omega}$ (рис. 6):

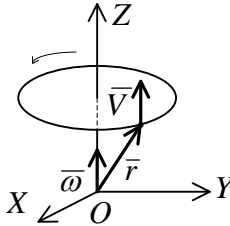


Рис. 6

$$\bar{V} = |\bar{\omega} \times \bar{r}| = -\omega y \bar{i} + \omega x \bar{j} + 0 \cdot \bar{k},$$

где \bar{r} – радиус вектор точки M .

По определению ротора

$$\text{rot } \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} = 2\bar{\omega}.$$

С точностью до постоянного множителя ротор поля скоростей \bar{V} представляет собой угловую скорость вращения твердого тела. С этим связано само название «ротор» (от латинского «вращатель»).

Направление ротора совпадает с направлением наибольшей плотности циркуляции.

Опр. 9. ВП \bar{a} называется *безвихревым* в области Ω , если в каждой ее точке $\text{rot } \bar{a} = \bar{0}$.

Если функции P, Q, R дифференцируемы в области Ω и в этой области расположен некоторый замкнутый контур L , то для любой незамкнутой поверхности $S \subset \Omega$, имеющей границу L , имеет место *формула Стокса*:

$$\mathcal{C} = \oint_L (\bar{a}, d\bar{r}) = \iint_S (\text{rot } \bar{a}, \bar{n}^0) dS, \quad (14)$$

где на S берется та сторона, в точках которой вектор нормали \bar{n}^0 направлен так, чтобы видимый с его конца обход контура L совершался против часовой стрелки (ориентация поверхности согласована с обходом контура).

Формула Стокса позволяет свести вычисление циркуляции ВП \bar{a} по контуру L к вычислению потока поля $\text{rot } \bar{a}$ через незамкнутую поверхность S , опирающуюся на контур L (L – граница незамкнутой поверхности S). Заметим, что S – любая поверхность, имеющая границей контур L , поэтому возможен наиболее простой ее выбор.

Если через контур L провести две поверхности S и S_1 , то

$$\iint_S (\text{rot } \bar{a}, \bar{n}^0) dS = \iint_{S_1} (\text{rot } \bar{a}, \bar{n}^0) dS.$$

Учитывая, что S и S_1 ограничивают некоторую пространственную область Ω , и меняя направление нормали на поверхности S_1 на противоположное, т.е. на внешнее по отношению к Ω , получаем

$$\iint_{S \cup S_1} (\text{rot } \bar{a}, \bar{n}^0) dS = 0,$$

т. е. поток вихря через замкнутую поверхность равен 0. Это означает, что *поле вихря является соленоидальным*.

Пример 6. Найти по формуле Стокса циркуляцию ВП $\bar{a} = z\bar{i} + 2yz\bar{j} + y^2\bar{k}$ по линии $ABCA$ пересечения с координатными плоскостями той части поверхности $x^2 + 9y^2 = 9 - z$, которая лежит в области $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ (рис. 7).

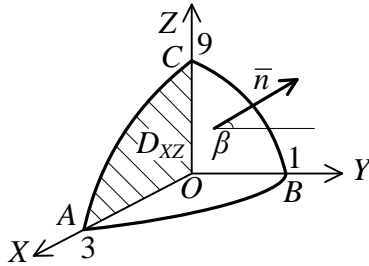


Рис. 7

◀ Находим ротор ВП

$$\operatorname{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & 2yz & y^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y^2)}{\partial y} - \frac{\partial(2yz)}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial z}{\partial z} - \frac{\partial(y^2)}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial(2yz)}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) \bar{k} = (2y - 2y) \bar{i} + \bar{j} = \bar{j}.$$

Поверхность $x^2 + 9y^2 = 9 - z$ является эллиптическим параболоидом и расположена в первом октанте.

По формуле (14)

$$I = \oint_{ABCA} (\bar{a}, d\bar{r}) = \iint_S (\operatorname{rot} \bar{a}, \bar{n}^0) dS = \iint_S \cos \beta dS.$$

В данном случае $\cos \beta > 0$ и $\cos \beta dS = dx dz$. Отсюда

$$I = \iint_{D_{xz}} dx dz = \int_0^3 dx \int_0^{9-x^2} dz = 18. \blacktriangleright$$

Пример 7. Вычислить с помощью формулы Стокса циркуляцию ВП

$$\bar{a} = (z^3 + 2y^3 + 3y) \bar{i} + (y^3 - 2x^3 - xz^2) \bar{j} + (z^2 - 5xy^2) \bar{k}$$

по контуру $L: z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = (z - 2)^2$, положительно ориентированному по отношению к оси OZ .

◀ Построим контур L (рис. 8). Этот контур – окружность радиусом 1 в пересечении параболоида $z = x^2 + y^2$ и конуса $x^2 + y^2 = (z-2)^2$.

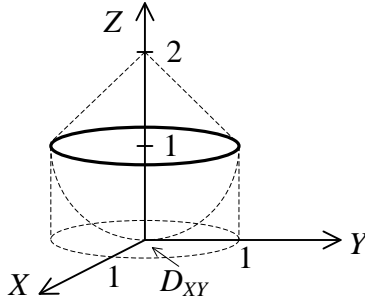


Рис. 8

Простейшей поверхностью, опирающейся на этот контур, является плоскость $S : z = 1$. Заданная ориентация означает, что с конца OZ обход виден совершаемым против часовой стрелки.

Тогда нормалью к плоскости является вектор $\bar{n}^0 = (0; 0; 1)$.

Вычислим $\text{rot } \bar{a}$ по формуле (13):

$$\text{rot } \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^3 + 2y^3 + 3y & y^3 - 2x^3 - xz^2 & z^2 - 5xy \end{vmatrix}.$$

Вычисляем циркуляцию

$$\begin{aligned} \oint_L (\bar{a}, d\bar{r}) &= \iint_S (\text{rot } \bar{a}, \bar{n}^0) dS = \iint_S (-6x^2 - 6y^2 - z^2 - 3) dx dy = \\ &= \iint_{D_{XY}} (-6(x^2 + y^2) - 1 - 3) dx dy = [\text{ПСК}] = \\ &= -6 \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^1 \rho d\rho - 4 \iint_{D_{XY}} dx dy = -6 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \pi = -7\pi, \end{aligned}$$

где D_{XY} – проекция круга радиусом 1 на плоскость XOY . ▶

Опр. 10. ВП $\bar{a} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$, заданное в области Ω , называется *потенциальным*, если в области Ω существует такая скалярная функция u , что вектор \bar{a} можно представить в виде градиента этой функции:

$$\bar{a} = \text{grad } u. \quad (15)$$

Функция u называется *потенциальной функцией* или *потенциалом* ВП \bar{a} .

Из формулы (15) следует, что

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{и} \quad P dx + Q dy + R dz = du,$$

т. е. $P dx + Q dy + R dz$ есть полный дифференциал потенциала этого поля. *Критерием потенциальности* ВП \bar{a} служит равенство

$$\text{rot } \bar{a} = \bar{0}. \quad (16)$$

Следовательно, **для того чтобы ВП было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым.**

Выполнение условия (16) в области Ω приводит не только к потенциальности ВП, но и к следующим результатам:

а) в области Ω существует потенциал $u = u(x, y, z)$, который может быть определен с точностью до постоянной по формуле

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = & \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \\ & + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + C, \end{aligned} \quad (17)$$

где $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ – любая фиксированная точка; (x, y, z) – переменная точка в области Ω ; C – произвольная постоянная. Во втором интеграле формулы (17) постоянен x , а в третьем – x и y постоянные величины;

б) циркуляция ВП по любому замкнутому контуру $L \subset \Omega$ равна нулю:

$$\mathcal{C} = \oint_L (\bar{a}, d\bar{r}) = 0.$$

Если же хотя бы в одной точке, внутренней по отношению к контуру L , поле \bar{a} не определено, циркуляция по этому контуру может и не обратиться в нуль, хотя поле потенциально;

в) для любых двух точек A и B области Ω значение линейного интеграла ВП \bar{a}

$$\int_{AB} (\bar{a}, d\bar{r})$$

не зависит от пути интегрирования в области Ω ;

г) линейный интеграл этого поля вдоль любого контура $AB \subset \Omega$, соединяющего точки $A(x_0, y_0, z_0)$ и $B(x_1, y_1, z_1)$, равен разности значений потенциала u в конечной и начальной точках контура:

$$\int_{AB} (\bar{a}, d\bar{r}) = u(x_1, y_1, z_1) - u(x_0, y_0, z_0). \quad (18)$$

Физический смысл этого результата: если \bar{a} – силовое поле, то разность потенциалов между точками B и A равна работе, которую поле совершает при перемещении материальной точки из A в B .

Пример 8. Доказать, что ВП

$$\bar{a} = (x^2 - 2yz)\bar{i} + (y^2 - 2yz)\bar{j} + (z^2 - 2xy)\bar{k}$$

является потенциальным. Найти его потенциал и вычислить линейный интеграл поля от точки $A(1; 1; 1)$ до точки $B(-1; 2; -2)$.

◀ Так как поле определено и дифференцируемо в любой точке пространства и $\text{rot } \bar{a} = \bar{0}$ (проверьте самостоятельно), то данное поле потенциально. Найдем потенциал поля по формуле (17), взяв в качестве точки (x_0, y_0, z_0) начало координат:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_0^x (x^2 - 2yz) \Big|_{z=0} dy + \int_0^y (y^2 - xz) \Big|_{z=0} dx + \\ &+ \int_0^z (x^2 - 2xy) dz + C = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} - 2xy + C. \end{aligned}$$

Линейный интеграл вычислим по формуле (18):

$$\int_{AB} (\bar{a}, d\bar{r}) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz + 3C) \Big|_{A(1;1;1)}^{B(-1;2;-2)} = \frac{22}{3}. \blacktriangleright$$

Опр. 11. ВП \bar{a} называется *гармоническим*, если оно одновременно является и потенциальным и соленоидальным ($\text{rot } \bar{a} = \bar{0}$, $\text{div } \bar{a} = 0$).

Из определения 11 следует, что гармоническое поле одновременно является полем безвихревым и без источников и стоков. Потенциал этого поля удовлетворяет условию:

$$\text{div grad } u = 0.$$

Пример 9. Выяснить тип ВП

$$\bar{a} = (y + z)\bar{i} + (x + z)\bar{j} + (x + y)\bar{k}.$$

◀ Найдем ротор ВП \bar{a} :

$$\text{rot } \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y + z & x + z & x + y \end{vmatrix} = (1 - 1)\bar{i} - (1 - 1)\bar{j} + (1 - 1)\bar{k} = \bar{0}.$$

Рассчитаем дивергенцию ВП \bar{a} :

$$\text{div } \bar{a} = \frac{\partial(y + z)}{\partial x} + \frac{\partial(x + z)}{\partial y} + \frac{\partial(x + y)}{\partial z} = 0.$$

Следовательно, поле \bar{a} – гармоническое. ▶

Замечание 2. Для описания электромагнитных полей существует система уравнений Максвелла, основанная на накопленных к середине XIX века экспериментальных результатах.

1. $\text{rot } \bar{H} = \bar{j}_{np} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$, т.е. электрический ток и изменение электрической индукции порождают вихревое магнитное поле.

2. $\text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$, т.е. изменение магнитной индукции порождает вихревое электрическое поле.

3. $\text{div } \bar{D} = \rho$, т.е. электрический заряд является источником электрической индукции.

4. $\text{div } \bar{B} = 0$, т.е. магнитных зарядов не существует.

ГЛАВА 5. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Для преодоления трудностей, связанных с интегрированием, И. Ньютон и Г.В. Лейбниц выражали подинтегральную функцию в виде многочлена с бесконечным числом членов. Применяя к таким выражениям обычные правила алгебры, математики 18 века сделали множество замечательных открытий. Однако обнаружилось, что если безоговорочно применять правила алгебры к бесконечным суммам, то можно прийти к ошибкам. Стало необходимым точно сформулировать основные понятия и строго доказать свойства бесконечных рядов. Эта задача была решена математиками 19 века.

Тригонометрические ряды были введены Д. Бернулли в 1753 г. в связи с изучением колебаний струны. Возникший при этом вопрос о возможности разложения данной функции в тригонометрический ряд породил горячие споры между математиками того времени (Эйлер, Даламбер, Лагранж). Разногласия порождались тем, что понятие функции в то время не было отчетливо установлено. Упомянутые споры содействовали уточнению понятия функции. Формулы, выражающие коэффициенты ряда через данную функцию, были даны А.К. Клеро в 1757 г., но не привлекли к себе внимания. Л. Эйлер вновь получил эти формулы в 1777 г. (в работе, опубликованной после смерти Эйлера в 1793 г.). Строгий их вывод был намечен Ж.Б. Фурье в 1823 г. Развивая идею Фурье, Дирихле в 1829 г. установил и строго доказал достаточный признак разложимости функции в тригонометрический ряд. Впоследствии были установлены и другие достаточные условия и исследованы функции, не удовлетворяющие упомянутым условиям. В разработку теории тригонометрических рядов и их практических приложений важный вклад внесли многие отечественные ученые: Н.И. Лобачевский, А.Н. Крылов (1863-1945), С.Н. Бернштейн (1880-1968), Н.Н. Лузин (1883-1950), Д.Е. Меньшов (1892-1988), Н.К. Бари (1901-1961), А.Н. Колмогоров (1903-1987) и др.

§ 1. Понятие числового ряда. Действия с рядами

1.1. Определение числового ряда и его суммы

Пусть задана бесконечная последовательность действительных чисел $\{a_n\}$ или $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, где для любого $n \in \mathbf{N}$ $a_n \in \mathbf{R}$.

Опр.1. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

называется *числовым рядом (ЧР)*. Числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ называются *членами ряда*, число a_n называется *общим членом ряда*.

Сокращенно ЧР (1) обозначается $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Примеры числовых рядов:

$$1) 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} n,$$

$$2) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n},$$

$$3) \sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin n \text{ и т.д.}$$

Опр. 2. Сумма конечного числа n первых членов ЧР (1) называется n -й *частичной суммой ряда*. При этом $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_{n-1} + a_n$.

Опр. 3. Если последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм ряда сходится, т.е. существует конечный $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$, то говорят, что *ряд (1) сходится* и его сумма равна S . Если конечный $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ не существует, то говорят, что *ряд (1) расходится*.

Пример 1. Исследовать на сходимость ЧР

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} n.$$

◀ Составим n -ю частичную сумму данного ЧР

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + 2 + \dots + n.$$

Используя формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии, получаем $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + n}{2} \cdot n = \frac{n^2 + n}{2}$.

Т.к. $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + n}{2} \right) = +\infty$, то по опр. 3 данный ряд расходится. ▶

Пример 2. Найти n -ю частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и, исходя из определения, исследовать ряд на сходимость, если $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

◀ Разложим n -й член ЧР на сумму простейших дробей.

$$\begin{aligned} \text{Т.к. } a_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}, \text{ то } S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Найдем сумму данного ряда

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Сл-но, данный ЧР сходится по опр.3 и его сумма равна $\frac{1}{2}$. ▶

Пример 3. Найти сумму ЧР

$$3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{3}{2^{n-1}} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^{n-1}}.$$

◀ Найдем n -ю частичную сумму ЧР $S_n = 3 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{3}{2^{n-1}}$, используя формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. У нас $b_1 = 3$, $q = \frac{1}{2}$, поэтому

$$S_n = \frac{3 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 6 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

Т.к. $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 6 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 6$, то данный ряд сходится и его сумма $S = 6$. ▶

Пример 4. Исследовать на сходимость ряды:

а) $1 + 1 + \dots + 1 + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} 1$;

б) $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$.

◀ Найдем n -е частичные суммы данных рядов и их пределы:

а) $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n$.

Т.к. $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, то ЧР $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ расходится;

б) рассмотрим два случая: $n = 2k$ – четное и $n = 2k + 1$ – нечетное, $k \in \mathbf{Z}$.

$$S_{2k} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2k-1} + a_{2k} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 = \\ = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1) = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_{2k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} 0 = 0.$$

$$S_{2k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + 1 = \\ = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1) + 1 = 1,$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

Т.к. из последовательности $\{S_n\}$ можно выделить две последовательности $\{S_{2k}\}$ и $\{S_{2k+1}\}$, имеющие разные пределы (0 и 1), то последовательность $\{S_n\}$ не имеет предела при $n \rightarrow +\infty$. Тогда по опр. 3 данный ЧР расходится. ►

1.2. Условия сходимости числовых рядов

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие сходимости ЧР). ЧР (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится т. и т. т., когда последовательность его частичных сумм S_n является фундаментальной, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, p \in \mathbb{N} \quad (n > n_0 \rightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon).$$

Теорема 2 (необходимое условие сходимости ЧР). Если ряд

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сходится, то } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

Замечание 1. Из теоремы 2 следует достаточное условие расходимости ряда: если n -й член ЧР (1) не стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$ (т.е. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$), то ряд (1) расходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n-1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}.$$

◀ Т.к. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, то ряд расходится. ►

Замечание 2. Теорема, обратная теореме 2, не верна. Т.е. из того, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, не следует, что ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится!!!

В качестве примера можно рассмотреть гармонический ряд.

Опр. 4. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ называется *гармоническим*.

Название гармонического ряда связано с тем, что каждый его член, начиная со второго, является средним гармоническим для двух соседних. (Число $c > 0$ называется средним гармоническим для двух чисел a и b , если $c = \frac{ab}{a+b}$).

ческим чисел $a > 0$ и $b > 0$, если $\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$.

Очевидно, что для гармонического ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Иследуем данный ЧР на сходимость.

Т.к. $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} > S_n$, то последовательность $\{S_n\}$ является возрастающей. Покажем, что она не ограничена сверху. Имеет место очевидное неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \quad (*)$$

Если, отбросив первые два члена, остальные члены гармонического ряда разбить на группы по 2, 4, 8, ..., 2^{k-1} , ... членов в каждой, то получим в соответствии с неравенством (*)

$$\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_2 > \frac{1}{2}, \quad \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{2^2} > \frac{1}{2}, \quad \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{2^3} > \frac{1}{2} \quad \text{и т.д.}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}} > \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } S_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k} \right) > k \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ не ограничена сверху.

Т.к. последовательность $\{S_n\}$ является возрастающей и не ограничена сверху, то по теореме о пределе монотонной после-

довательности $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$. Сл-но, гармонический ряд расходится.

1.3. Простейшие свойства сходящихся ЧР

Свойство 1. Если ряды (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ сходятся и их суммы соответственно равны $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$, то ряд (3) $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots$ также сходится и его сумма равна $S^{(3)} = S^{(1)} + S^{(2)}$.

Пример 6. Найти сумму ряда

$$2 + \frac{7}{10} + \frac{29}{100} + \frac{133}{1000} + \dots + \frac{2^{n-1} + 5^{n-1}}{10^{n-1}} + \dots$$

◀ Обозначим исходный ряд (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1} + 5^{n-1}}{10^{n-1}}$. Одновременно с рядом (1) рассмотрим ряды (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ и (3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^{n-1}}$.

Очевидно, что $\frac{2^{n-1} + 5^{n-1}}{10^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{5^{n-1}}$, т.е. каждый член ряда (1) является суммой соответствующих членов рядов (2) и (3).

Найдем суммы рядов (2) и (3). Для ряда (2)

$$S_n^{(2)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \left[\text{см. формулу суммы } n \text{ первых членов для геометрической прогрессии} \right] = \frac{1 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right). \text{ Т.к. } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{(2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) = 2, \text{ то сумма}$$

$$\text{ряда (2) } S^{(2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{(2)} = 2.$$

Аналогично для ряда (3):

$$S_n^{(3)} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{5^{n-1}} = \frac{1\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right),$$

$$S^{(3)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{(3)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) = \frac{5}{4}.$$

Для нахождения суммы ряда (1) применим свойство 1 ЧР:

$$S^{(1)} = S^{(2)} + S^{(3)} = 2 + \frac{5}{4} = 3,25. \text{ Т.о., сумма ряда (1) } S^{(1)} = 3,25. \blacktriangleright$$

Свойство 2. Если ряд (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится и его сумма равна

S , то ряд (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} k \cdot a_n = k \cdot a_1 + k \cdot a_2 + \dots + k \cdot a_n + \dots$ тоже сходится и его сумма равна $k \cdot S$, где k – произвольное фиксированное число.

Опр. 5. Пусть задан ЧР (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Ряд $(1^0) \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$, получающийся из ряда (1) отбрасыванием n первых членов данного ряда, называется *остатком ряда* (1). Если ряд (1^0) сходится, то его сумма обозначается R_n .

Свойство 3. Ряд и его остаток сходятся и расходятся одновременно. Т.е. если ЧР (1) сходится, то его остаток (1^0) тоже сходится. Если остаток ряда (1^0) сходится, то и ЧР (1) тоже сходится.

§ 2. Теоремы сравнения для рядов с положительными членами

Опр. 1. ЧР $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ называется *положительным* (или *рядом с положительными членами*), если все его элементы не отрицательны, т.е. для любого $n \in \mathbf{N}$ $a_n \geq 0$.

Далее будем рассматривать только ЧР с положительными членами. Изучим, какими свойствами обладают такие ряды.

Теорема 1. Последовательность частичных сумм положи-

тельного ряда монотонно возрастает.

Теорема 2 (необходимое и достаточное условие сходимости положительного ряда.) Для того чтобы положительный ряд (1)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ сходился, необходимо и достаточно, чтобы последова-}$$

тельность частичных сумм ряда (1) была ограничена сверху.

При исследовании числовых рядов часто нет необходимости находить сумму ряда, а достаточно лишь ответить на вопрос: сходится данный ряд или расходится.

Для этого удобно применять теоремы сравнения, которые позволяют сделать вывод о сходимости ряда с положительными членами с помощью некоторого вспомогательного ряда.

Теорема 3 (первая теорема сравнения). Если для ЧР

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ и } (2) \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ для всех } n \text{ выполняется неравенство}$$

$0 \leq a_n \leq b_n$, то из сходимости ЧР (2) следует сходимость ЧР (1), а из расходимости ЧР (1) следует расходимость ЧР (2).

Замечание. Заключение теоремы 3 будет верным и в случае, когда условие $0 \leq a_n \leq b_n$ выполняется лишь начиная с некоторого номера $n > 1$.

Теорема 4 (вторая теорема сравнения). Пусть даны ЧР с положительными членами (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$) и (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

($b_n > 0$). Если существует предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, $k \in (0; +\infty)$,

то оба ЧР ведут себя одинаково, т.е. сходятся и расходятся одновременно.

При использовании теорем сравнения данный ряд сравнивается с «эталонным» рядом, для которого уже известно: сходится он или расходится. В качестве таких «эталонных» рядов применяют ряды Дирихле или ряды, членами которых являются члены геометрической прогрессии.

Опр. 2. ЧР ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ называется *гармоническим рядом*, а

ЧР $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, где $\alpha \in \mathbf{R}$, называются *обобщенными гармоническими рядами* или *рядами Дирихле**.

Ряд Дирихле сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \leq 1$.

Членами ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} q_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$ являются элементы геометрической прогрессии. Данный ряд сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$.

◀ Общий член ряда $a_n = \frac{n}{n^3 + 1}$. Имеем

$$a_n = \frac{n}{n^3 + 1} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Рассмотрим ряд (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Он сходится как обобщенный гармонический ряд при $\alpha = 2 > 1$. Тогда по первой теореме сравнения ряд (1) тоже сходится. ▶

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

◀ Последовательно преобразовывая общий член ряда (1), получаем:

$$a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

* Иоганн Петер Густав Лежён-Дирихле – немецкий математик (1805 – 1859).

При $n \rightarrow +\infty$ знаменатель дроби ведет себя как \sqrt{n} , поэтому сравним ряд (1) с рядом (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Т.к.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \in (0; +\infty),$$

то по второй теореме сравнения ЧР (1) и (2) сходятся и расходятся одновременно.

Обобщенный гармонический ряд (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится,

т.к. $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, сл-но, ЧР (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ расходится. ►

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n^7}\right).$$

◀ При $n \rightarrow +\infty$ величина $\frac{\pi}{n^7}$ является бесконечно малой,

поэтому при $n \rightarrow +\infty$ функция $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n^7}\right)$ эквивалентна своему

аргументу $\frac{\pi}{n^7}$, т.е. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n^7}\right) \sim \frac{\pi}{n^7}$. Сравним ряд (1) с рядом

$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \cdot \frac{\pi}{n^7} = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5}$, который будет сходящимся, как обобщенный гармонический ряд при $\alpha = 5 > 1$.

Имеем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi/n^5}{n^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n^7}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n^5 n^2 \frac{\pi}{n^7}} = 1 \in (0; +\infty),$$

значит, по второй теореме сравнения ЧР (1) и (2) сходятся и

расходятся одновременно. Сл-но, ряд (1) сходится. ►

Пример 4. Исследовать на сходимость ЧР (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3 + \sin n}{n}$.

◀ Оценим n -й член ряда (1) $a_n = \frac{3 + \sin n}{n}$. Т.к. $\sin n \geq -1$

, то $3 + \sin n \geq 2$ и $a_n = \frac{3 + \sin n}{n} \geq \frac{2}{n}$.

Обозначим через $b_n = \frac{2}{n}$ и одновременно с рядом (1) рас-

смотрим ЧР (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Т.к. гармонический ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то по свойству 2

числовых рядов ЧР (2) также расходится.

Т.к. для $\forall n \in \mathbf{N}$ имеем $a_n \geq b_n$, то из расходимости «меньшего» ряда (2) по первой теореме сравнения следует расходимость и «большого» ЧР (1). ►

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arccos \frac{1}{n+2}}{n^3 + 5n}.$$

◀ Обозначим через $a_n = \frac{\arccos \frac{1}{n+2}}{n^3 + 5n}$. Оценим a_n :

$$a_n = \frac{\arccos \frac{1}{n+2}}{n^3 + 5n} \leq \left[0 \leq \arccos x \leq \pi, \text{ увеличим числитель} \right] \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{n^3 + 5n} < \left| n^3 + 5n > n^3, \text{ уменьшим знаменатель} \right| < \frac{\pi}{n^3} = b_n.$$

Одновременно с рядом (1) рассмотрим ряд

$$(2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{n^3} = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ сходится, т.к. $\alpha = 3 > 1$. Т.к. $\forall n \ a_n < b_n$,

то из сходимости «большого» ряда (2) по первой теореме сравнения следует сходимость «меньшего» ряда (1). ►

Наибольшую сложность вызывает вопрос: какую теорему сравнений использовать и какой вспомогательный «эталонный» ряд выбрать. Иногда ответить на него помогут следующие замечания.

1. Если задан ряд (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, где $a_n = \frac{P_k(n)}{Q_m(n)} > 0$, $P_k(n)$ и $Q_m(n)$ – многочлены степеней k и m соответственно, то для его исследования применяют вторую теорему сравнения, используя в качестве $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$, где $\alpha = m - k$.

Например, ряд (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + 3n + 1}{n^7 + 4n - 2}$ сравним с рядом

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$, т.к. в числителе многочлен 3-й степени, а в знаменателе 7-й.

Аналогично действуем в том случае, когда n -й член ряда представляется в виде дроби, числитель или знаменатель которой содержат радикалы. Например, для ряда

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5 + 2} + n}{\sqrt[4]{n^9 - n} + \sqrt{n}}$, где $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^5 + 2} + n}{\sqrt[4]{n^9 - n} + \sqrt{n}}$, старшая степень

n в числителе $k = \frac{5}{3}$, в знаменателе – $m = \frac{9}{4}$. Поэтому

$\alpha = m - k = \frac{9}{4} - \frac{5}{3} = \frac{27 - 20}{12} = \frac{7}{12}$ и $b_n = \frac{1}{n^{\frac{7}{12}}}$. Сл-но, ряд (1)

сравниваем с ЧР (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{12}}}$.

2. При исследовании рядов на сходимость полезно учитывать ограниченность функций: $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$, $|\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}$, $0 < \operatorname{arctg} x < \pi$, $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \arccos x \leq \pi$.

$$\text{Например, } a_n = \frac{\operatorname{arctg}(3n+1)}{n^2} \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2} = \frac{\pi}{2n^2} = b_n;$$

$$a_n = \frac{7 - \cos \pi n}{4n} \geq [\cos \pi n \leq 1] \geq \frac{6}{4n} = \frac{3}{2n} = b_n.$$

Далее применяется первая теорема сравнений.

3. Если a_n содержит функцию $f(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, то можно использовать эквивалентность бесконечно малых функций:

если $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$, то $\sin f(n) \sim f(n)$,

$$\operatorname{arctg} f(n) \sim f(n),$$

$$\operatorname{tg} f(n) \sim f(n),$$

$$a^{f(n)} - 1 \sim f(n) \ln a,$$

$$\arcsin f(n) \sim f(n),$$

$$\ln(1 + f(n)) \sim f(n).$$

Далее применяют вторую теорему сравнения.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)^2.$$

◀ Запишем $a_n = n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)^2$. Т.к. при $n \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, то

$e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$. Заменим $e^{\frac{1}{n}} - 1$ на $\frac{1}{n}$. Рассмотрим $b_n = n \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{n}$.

Ряд (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ расходится. Применим к рядам (1) и (2)

вторую теорему сравнения:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)^2}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)^2}{\frac{1}{n^2}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{l} \frac{1}{n} \rightarrow 0 \\ e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n} \end{array} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{n} \right)^2}{\frac{1}{n^2}} = 1 \in (0; +\infty). \end{aligned}$$

По второй теореме сравнения из расходимости ЧР (2) следует расходимость ЧР (1). ►

Пример 7. Исследовать на сходимость числовой ряд

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arccos \frac{n}{2n+1}}{n^3 + n^2 + 1}.$$

◀ Запишем n -й член ряда (1) $a_n = \frac{\arccos \frac{n}{2n+1}}{n^3 + n^2 + 1}$ и оценим его.

По определению арккосинуса $0 \leq \arccos \left(\frac{n}{2n+1} \right) \leq \pi$ для любого $n \in \mathbf{N}$. Т.к. $n \in \mathbf{N}$, то $n^3 + n^2 + 1 > n^3$. Поэтому

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\arccos \frac{n}{2n+1}}{n^3 + n^2 + 1} \leq \left[\text{увеличиваем числитель} \right] \leq \\ &\leq \frac{\pi}{n^3 + n^2 + 1} \leq \left[\text{уменьшаем знаменатель} \right] \leq \frac{\pi}{n^3}. \end{aligned}$$

Обозначим $b_n = \pi/n^3$. У нас получилось, что для любого

$n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $a_n \leq b_n$.

Одновременно с ЧР (1) рассмотрим ряд
 (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{n^3} = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$. Ряд (2) сходится (обобщенный гармонический ряд $\alpha = 3 > 1$).

Из сходимости «большого» ряда (2) по первой теореме сравнения следует сходимость и «меньшего» ряда (1). ►

Пример 8. Исследовать ЧР (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^2\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{n}$ на сходимость.

◀ Запишем и оценим n -й член ряда (1): $a_n = \frac{\ln^2\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{n}$.

При $n \rightarrow +\infty$ имеем $\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{1}{n+1}$.

Поэтому при $n \rightarrow +\infty$ получим:

$$a_n = \frac{\ln^2\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{n} \sim \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}{n} = \frac{1}{n(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^3}.$$

Обозначим $b_n = \frac{1}{n^3}$. Рассмотрим ЧР (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$, который сходится (как обобщенный гармонический $\alpha = 3 > 1$).

При этом

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{n \cdot \frac{1}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \left[\text{при } n \rightarrow +\infty \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \sim \frac{1}{n+1} \right] = \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 \in (0; +\infty).$$

Т.к. существует конечный $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in (0; +\infty)$, то по вто-

рой теореме сравнения из сходимости ЧР (2) следует сходимость ЧР (1). ►

§ 3. Признаки сходимости рядов с положительными членами

Рассмотрим ряд с положительными членами (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$,

$\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n \geq 0$. Данный ряд можно исследовать на сходимость с помощью теорем сравнения. Однако их применение предполагает использование вспомогательных рядов, которые не всегда легко находятся. Рассмотрим признаки сходимости рядов с положительными членами, которые не требуют применения вспомогательных рядов.

Теорема 1 (признак Даламбера*). Пусть задан ряд (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

с положительными членами ($a_n > 0$) и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell. \text{ Тогда}$$

- 1) если $\ell < 1$, то ряд (1) сходится;
- 2) если $\ell > 1$ или $\ell = +\infty$, то ряд (1) расходится;
- 3) если $\ell = 1$, то признак Даламбера неприменим.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n}{(n+1)!}$.

◀ Для исследования данного ряда на сходимость применим

* Жан Лерон Д'Аламбер – французский математик и философ (1717 – 1783).

признак Даламбера. Запишем a_n , a_{n+1} , найдем $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ и вычис-

лим предел $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$a_n = \frac{7^n}{(n+1)!}, \quad a_{n+1} = \frac{7^{n+1}}{((n+1)+1)!} = \frac{7^{n+1}}{(n+2)!},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+2)! \cdot 7^n} = \left[\text{сократим дробь} \right] = \frac{7}{(n+2)}.$$

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{(n+2)} = 0.$$

Т.к. $\ell = 0 < 1$, то данный ряд сходится. ►

Теорема 2 (алгебраический признак Коши*). Пусть задан

ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами ($a_n \geq 0$) и существует

предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$. Тогда

- 1) если $\ell < 1$, то ряд (1) сходится;
- 2) если $\ell > 1$ или $\ell = +\infty$, то ряд (1) расходится;
- 3) если $\ell = 1$, то алгебраический признак Коши неприменим.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}.$$

◀ Для исследования данного ряда на сходимость применим алгебраический признак Коши. Запишем a_n , найдем $\sqrt[n]{a_n}$ и вычислим $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$:

* Огюстен Луи Коши – французский математик (1789 – 1857).

$$a_n = \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left[\begin{array}{l} \text{применяем 2-й замечательный предел} \\ \end{array} \right] = \frac{e}{3}.$$

Т.к. $\ell = \frac{e}{3} < 1$, то по алгебраическому признаку Коши данный ряд сходится. ►

Теорема 3 (интегральный признак Коши). Пусть задан ряд

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ с положительными членами ($a_n \geq 0$) и существует

функция $f = f(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) функция $f = f(x)$ определена, непрерывна и не возрастает на промежутке $[1; +\infty)$;
- 2) для любого $n \in \mathbf{N}$ $f(n) = a_n$.

Тогда ряд (1) и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

◀ Для исследования данного ряда на сходимость применим интегральный признак Коши. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x^\alpha}$. Выбранная функция удовлетворяет всем условиям теоремы 3.

Вычислим несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$. Возможны два случая.

1-й случай: $\alpha = 1$. Тогда

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln|x| \Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln|b| - \ln|1|) = +\infty.$$

Т.к. интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ при $\alpha = 1$ расходится.

2-й случай: $\alpha \neq 1$. Тогда

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^b \right) =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = \begin{cases} +\infty, & \alpha < 1; \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Т.о., получили, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$. Тогда по интегральному признаку Коши ЧР $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$.

Объединяя 1-й и 2-й случаи, получаем, что ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$. ►

Пример 4. Исследовать на сходимость ЧР $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

◀ Для исследования данного ряда на сходимость применим интегральный признак Коши. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x \cdot \ln x}$. Выбранная функция удовлетворяет всем условиям теоремы 3.

Вычислим несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\ln |\ln x| \Big|_2^b \right) =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\ln |\ln b| - \ln |\ln 2| \right) = +\infty.$$

Т.к. интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$ расходится, то и ЧР $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$

расходится. ►

Замечание 1. Рассмотренные признаки удобнее применять, чем теоремы сравнения, т.к. они не требуют привлечения вспомогательных рядов.

Если n -й член ряда содержит факториалы или другие произведения из n множителей, то применяют признак Даламбера.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (5n-4)}.$$

◀ Применим к данному ряду признак Даламбера:

$$a_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (5n-4)},$$

$$a_{n+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1) \cdot (3(n+1)-1)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (5n-4) \cdot (5(n+1)-4)} =$$

$$= \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1) \cdot (3n+2)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (5n-4) \cdot (5n+1)},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1) \cdot (3n+2)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (5n-4) \cdot (5n+1)} \cdot \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (5n-4)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)} =$$

$$= \frac{3n+2}{5n+1}.$$

Тогда $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+2}{5n+1} = \frac{3}{5} < 1$. Поэтому по

признаку Даламбера данный ряд сходится. ►

При использовании алгебраического признака Коши следу-

ет учитывать, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Если n -й член некоторого ряда содержит $n!$, то при использовании алгебраического признака Коши можно применять асимптотическую формулу Стирлинга:

$$\text{при } n \rightarrow +\infty \quad n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}.$$

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$.

◀ Данный ЧР можно исследовать двумя способами: с помощью признака Даламбера и алгебраического признака Коши.

1-й способ. Применим признак Даламбера:

$$a_n = \frac{n^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\begin{aligned} \ell &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = [\text{см. 2-й замечательный предел}] = e. \end{aligned}$$

Т.к. $\ell = e \approx 2,7 > 1$, то по признаку Даламбера данный ряд расходится.

2-й способ. Применим алгебраический признак Коши. При

$$n \rightarrow +\infty \text{ получим } a_n = \frac{n^n}{n!} \sim \frac{n^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}.$$

$$\text{Тогда} \quad \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}} = e.$$

Т.к. $\ell = e \approx 2,7 > 1$, то по алгебраическому признаку Коши данный ряд расходится. ►

Замечание 2. При решении примера 6 использовали, что

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\pi n)^{\frac{1}{2n}} = 1$. Докажем это.

$$\begin{aligned} \leftarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\pi x)^{\frac{1}{2x}} &= [\infty^0] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(2\pi x)^{\frac{1}{2x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2\pi x)}{2x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= \left[\text{применим правило Лопиталя} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{2}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Т.к. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2\pi x)^{\frac{1}{2x}} = 1$, то и при $n \rightarrow +\infty$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\pi n)^{\frac{1}{2n}} = 1$. \blacktriangleright

Замечание 3. В примерах встречаются выражения вида $(2n)!!$ и $(2n+1)!!$.

По определению $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot (2n)$ – произведение четных чисел от 2 до $2n$.

Например, $8!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 384$.

По определению $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)$ – произведение нечетных чисел от 1 до $(2n+1)$.

Например, $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

Пример 7. Исследовать ЧР (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n (n!)^2}$ на сходимость

по признаку Даламбера.

\blacktriangleleft Запишем n -й и $(n+1)$ -й члены ряда (1) и вычислим

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} :$$

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{3^n (n!)^2}, \quad a_{n+1} = \frac{(2n+1)!!}{3^{(n+1)} ((n+1)!)^2},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)!! \cdot 3^n \cdot (n!)^2}{3^{n+1} \cdot ((n+1)!)^2 \cdot (2n-1)!!} = \frac{(2n+1)}{3(n+1)^2},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{3(n+1)^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = 0.$$

Т.к. $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$, то по признаку Даламбера ряд

(1) сходится. ►

Пример 8. Исследовать ЧР (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln^n \left(1 + \frac{1}{4^n}\right) \cdot \left(\frac{3n+2}{n+1}\right)^{n^2}$

на сходимость по радикальному признаку Коши.

◀ Запишем n -й член ряда (1) a_n и вычислим $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

$$a_n = \ln^n \left(1 + \frac{1}{4^n}\right) \cdot \left(\frac{3n+2}{n+1}\right)^{n^2},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\ln^n \left(1 + \frac{1}{4^n}\right) \left(\frac{3n+2}{n+1}\right)^{n^2}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{4^n}\right) \left(\frac{3n+2}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{4^n}\right)}{\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \left[\text{при } n \rightarrow +\infty \frac{1}{4^n} \rightarrow 0 \text{ поэтому } \ln \left(1 + \frac{1}{4^n}\right) \sim \frac{1}{4^n} \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{4^n}}{\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+4}\right)^n =$$

$$= \left[\text{при } n \rightarrow +\infty \frac{3n+2}{4n+4} \rightarrow \frac{3}{4} \text{ поэтому } \left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 0 \right] = 0.$$

Т.к. $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 < 1$, то по радикальному признаку

Коши ЧР (1) сходится. ►

Пример 9. Исследовать на сходимость по интегральному

признаку Коши ЧР (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{(n^5+2) \cdot \ln^{5/4}(n^5+2)}$.

◀ Одновременно с $a_n = \frac{n^4}{(n^5+2) \cdot \ln^{5/4}(n^5+2)}$ [n -м членом

ряда (1)] рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{x^4}{(x^5+2) \cdot \ln^{5/4}(x^5+2)}.$$

Данная функция удовлетворяет

всем условиям теоремы 3.

Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$(2) \int_1^{+\infty} f(x) dx :$$

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(x^5+2) \cdot \ln^{5/4}(x^5+2)} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{x^4 dx}{(x^5+2) \cdot \ln^{5/4}(x^5+2)} =$$

$$= \frac{1}{5} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{d(x^5+2)}{(x^5+2) \cdot \ln^{5/4}(x^5+2)} = \frac{1}{5} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{d(\ln(x^5+2))}{\ln^{5/4}(x^5+2)} =$$

$$= \frac{1}{5} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4}{\ln^{1/4}(x^5+2)} \right) \Big|_1^b = \frac{1}{5} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4}{\ln^{1/4}(b^5+2)} + \frac{4}{\ln^{1/4} 3} \right) =$$

$$= \left[\text{при } b \rightarrow +\infty \ln(b^5+2) \rightarrow \infty \right] = \frac{4}{5 \ln^{1/4} 3}.$$

Получили, что несобственный интеграл (2) сходится. Из сходимости интеграла (2) следует сходимость ЧР (1). ►

§ 4. Знакопередающиеся числовые ряды

Опр. 1. ЧР вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots,$$

где $\forall n \in \mathbf{N} \ a_n > 0$, называется *знакопередающимся* числовым рядом. Его удобнее записывать с помощью знака суммы

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n.$$

Ряд вида $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n + \dots$ также является знакопередающимся.

Опр. 2. Знакопередающийся ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ называется *рядом типа Лейбница**, если последовательность $\{a_n\}$ является невозрастающей, т.е. для $\forall n \in \mathbf{N} \ a_{n+1} \leq a_n$.

Теорема Лейбница (необходимое и достаточное условие сходимости). *Знакопередающийся ряд типа Лейбница*

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится т. и т. т., когда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

Замечание 1. При использовании теоремы Лейбница необходимо проверять условие $a_{n+1} \leq a_n$. Оно равносильно любому из условий:

1) $a_n - a_{n+1} \geq 0$;

2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$;

3) функция $y = f(x)$, где $f(n) = a_n$, является невозрас-

*Готфрид Вильгельм фон Лейбниц – немецкий философ, математик, юрист, дипломат (1646 – 1716).

тающей на промежутке $[1; +\infty)$ (т.е. $y'(x) < 0$ на $[1; +\infty)$).

Поэтому при решении задач можно проверять одно из этих утверждений.

Пример 1. Применить теорему Лейбница к знакопередающемуся ряду (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(0,6)^n}{n^2 + 1}$.

◀ У нас $a_n = \frac{(0,6)^n}{n^2 + 1}$, $a_{n+1} = \frac{(0,6)^{n+1}}{(n+1)^2 + 1}$. Проверим выполнение условия 1. В данном примере

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{(0,6)^n}{n^2 + 1} - \frac{(0,6)^{n+1}}{n^2 + 2n + 2} = (0,6)^n \left(\frac{1}{n^2 + 1} - \frac{0,6}{n^2 + 2n + 2} \right) = \\ &= (0,6)^n \frac{n^2 + 2n - 0,6n^2 - 0,6}{(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)} = (0,6)^n \frac{0,4n^2 + 2n + 1,4}{(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)} > 0, \end{aligned}$$

сл-но, $a_n > a_{n+1}$ или $a_{n+1} < a_n$.

Аналогично можно использовать условие 2 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$.

$$\text{У нас } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(0,6)^{n+1}}{(n+1)^2 + 1} : \frac{(0,6)^n}{n^2 + 1} = 0,6 \cdot \frac{n^2 + 1}{n^2 + 2n + 2} = \left[\text{выделим}$$

$$\text{целую часть } \right] = 0,6 \cdot \left(1 - \frac{2n + 1}{n^2 + 2n + 2} \right) \leq 0,6 \leq 1, \text{ т.к. из } 1 \text{ вычитаем положительное число.}$$

Сл-но, и в этом случае $a_{n+1} < a_n$.

Самостоятельно можете проверить справедливость условия

$$3 \ y'(x) < 0 \text{ на } [1; +\infty), \text{ где } y(x) = \frac{0,6^x}{x^2 + 1}.$$

Т.о., ряд (1) является знакопередающимся и удовлетворяет условию $a_{n+1} \leq a_n$.

Вычислим $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(0,6)^n}{n^2 + 1} = \left[\frac{0}{+\infty} \right] = 0$. Т.к.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, то по теореме Лейбница ряд (1) сходится. ►

Замечание 2. Обозначим через R_n сумму ряда $\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} a_k$, который является остатком ряда (1). Из теоремы Лейбница следует, что для сходящегося ряда (1) типа Лейбница справедливо неравенство $|R_n| \leq a_{n+1}$. Данное неравенство позволяет приближенно находить сумму сходящегося ряда типа Лейбница.

Пример 2. Вычислить сумму ряда (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.

◀ Ряд (1) является знакочередующимся. Так как $a_n = \frac{1}{n!} > a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, то последовательность $\{a_n\}$ является убывающей. Сл-но, ряд (1) – ряд типа Лейбница. При этом $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0$. Значит, по теореме Лейбница ряд (1) сходится.

Т.к. сумма ряда (1) $S = S_n + R_n$, то подберем такое n , для которого $|R_n| < \varepsilon$. Тогда $S \approx S_n$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$.

Учитывая замечание к теореме Лейбница, достаточно найти такое n , для которого $|a_{n+1}| < \varepsilon$. Тогда $|R_n| \leq a_{n+1} < \varepsilon$.

Т.к. при $n = 6$ получим $a_{n+1} = a_7 = \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} < \frac{1}{1000} = \varepsilon$,

то $S \approx S_6 = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} = \frac{91}{144}$.

Т.о., сумма ряда (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$

равна $S_6 = \frac{91}{144}$. ►

Пример 3. Исследовать числовой ряд

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot 3^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

на сходимость по признаку Лейбница.

◀ Ряд (1) является знакочередующимся. Рассмотрим $a_n = 3^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ и вычислим $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right) = [\infty \cdot 0] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \left[\text{при } n \rightarrow \infty \frac{1}{n} \rightarrow 0 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n}{(1/3)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n} = +\infty \neq 0.$$

Т.к. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$, то по теореме Лейбница знакочередующийся ряд (1) расходится. ►

Пример 4. Вычислить сумму ряда (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{(1+n^3)^2}$ с

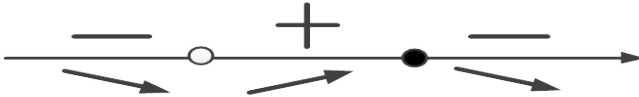
точностью до $\varepsilon = 0,001$.

◀ Ряд (1) является знакочередующимся. Покажем, что последовательность $\{a_n\} = \left\{ \frac{n}{(1+n^3)^2} \right\}$ является убывающей.

Рассмотрим функцию $y = \frac{x}{(1+x^3)^2}$ и исследуем ее на монотонность с помощью производной.

$$y' = \frac{(1+x^3)^2 - 2(1+x^3) \cdot 3x^2 \cdot x}{(1+x^3)^4} = \frac{1+x^3+6x^3}{(1+x^3)^3} = \frac{1-5x^3}{(1+x^3)^3}.$$

Найдем критические точки: $y' = 0$, если $x^3 = \frac{1}{5}$, $x = \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$,
 y' не существует, если $x^3 = -1$, $x = -1$.



Т.к. функция $y = \frac{x}{(1+x^3)^2}$ убывает при $x \in [\sqrt[3]{1/5}; +\infty)$, то $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = y(n) > y(n+1) = a_{n+1}$, т.е. $\{a_n\}$ является убывающей. Сл-но, ряд (1) является рядом типа Лейбница.

Т.к. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(1+n^3)^2} = 0$, то по теореме Лейбница ряд (1) сходится. Тогда по следствию из теоремы Лейбница $|R_n| \leq a_{n+1}$. Поэтому $S \approx S_n$, если $a_{n+1} < \varepsilon = \frac{1}{1000}$.

$$n=1 \quad a_2 = \frac{2}{81} > \varepsilon,$$

$$n=2 \quad a_3 = \frac{3}{28^2} > \varepsilon,$$

$$n=3 \quad a_4 = \frac{4}{65^2} < \varepsilon.$$

$$\text{Получим } S \approx S_3 = -\frac{1}{4} + \frac{2}{81} - \frac{3}{28^2} = -\frac{14551}{63504} \approx -0,229. \blacktriangleright$$

§ 5. Знакопеременные числовые ряды

Опр. 1. ЧР (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ называется *знакопеременным* (ЗЧР),

если его члены могут принимать произвольные действительные значения, т.е. $a_n \in \mathbf{R}$.

Одновременно с ЗЧР (1) будем рассматривать ряд (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$,

составленный из модулей членов ряда (1).

Ряд (2) является рядом с положительными членами. Поэтому для его исследования на сходимость можно применять теоремы сравнения и признаки сходимости.

Опр. 2. Если ряд (2) сходится, то ЗЧР (1) называют *абсолютно сходящимся*.

Опр. 3. Если ЗЧР (2) расходится, а ЧР (1) сходится, то ряд (1) называют *условно сходящимся*.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

При исследовании произвольного ряда (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ на сходимость используем следующий **алгоритм**.

1. Вычисляем $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Если $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$, то ряд (1) расходится (по необходимому признаку сходимости числовых рядов). Если $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, то продолжаем исследование ряда (1).

2. Записываем ряд (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, составленный из модулей членов ряда (1), и исследуем его на сходимость. Т.к. ряд (2) является рядом с положительными членами, то для его исследования на сходимость можно применять теоремы сравнения и признаки сходимости.

Если ряд (2) сходится, то ряд (1) сходится абсолютно. Если ряд (2) расходится, то продолжаем исследование ряда (1).

3. Проверяем, не является ли ряд (1) знакопеременным. Если ряд (1) знакопеременный, то применяем к нему теорему

Лейбница. В результате можно доказать условную сходимость ряда (1).

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2 + 5}$.

◀ Ряд (1) является ЗЧР. Поэтому для исследования данного ряда используем приведенный выше алгоритм.

1. Вычисляем $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin n \cdot \frac{1}{n^2 + 5} \right) = 0 \quad \text{как предел}$$

произведения ограниченной последовательности на бесконечно малую.

2. Записываем ряд (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2 + 5} \right|$, составленный из

модулей членов ряда (1), и исследуем его на сходимость.

Так как $\left| \frac{\sin n}{n^2 + 5} \right| < \frac{1}{n^2}$, то из сходимости ЧР $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ по первой теореме сравнения следует сходимость ряда (2).

Т.к. ряд (2) сходится, то по опр. 2 ЗЧР (1) сходится абсолютно. ▶

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

◀ Одновременно с рядом (1) рассмотрим ряд (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$,

составленный из модулей членов ряда (1).

ЧР (2) расходится. Т.к. ЧР (2) расходится, то ряд (1) абсолютно не сходится.

Исследуем ЧР (1) на условную сходимость. Ряд (1) является знакочередующимся. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} = a_{n+1}$. Сл-но, последо-

вательность $\{a_n\}$ является убывающей.

Т.к. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, то по теореме Лейбница ЧР (1)

сходится.

Т.к. ЧР (1) сходится, а ЧР (2) расходится, то ряд (1) является условно сходящимся. ►

Пример 3. Исследовать ЧР (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n \cdot 2^{-n}$ на сходи-

мость.

◀ Одновременно с ЧР (1) рассмотрим ряд (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot 2^{-n}$, составленный из модулей членов ряда (1). Применим к ряду (2) признак Даламбера: $a_n = n \cdot 2^{-n}$, $a_{n+1} = (n+1) \cdot 2^{-(n+1)}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \cdot 2^{-(n+1)}}{n \cdot 2^{-n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Т.к. $\ell = \frac{1}{2} < 1$, то по признаку Даламбера ЧР (2) сходится.

Сл-но, ряд (1) сходится абсолютно. ►

Пример 4. Исследовать ряд (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{6n+5}$.

◀ ЧР (1) является знакоперевающимся, $a_n = \frac{n}{6n+5}$. Т.к.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{6n+5} = \frac{1}{6} \neq 0, \text{ то по необходимому признаку сходимости}$$

ЧР ряд (1) расходится. ►

Замечание. Если к ряду (2) применили признак Даламбера или алгебраический признак Коши и получили $\ell > 1$, то члены этого ряда не удовлетворяют необходимому признаку сходимости ЧР, то есть $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| \neq 0$. Тогда $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$ и исходный

ЗЧР (1) расходится по необходимому признаку сходимости.

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

1. Члены абсолютно сходящегося ряда можно переставлять

местами, при этом сходимость ряда не нарушается и сумма не изменяется.

2. Теорема (Римана*). Если числовой ряд сходится условно, то, задав любое число A , можно так переставить члены ряда, что его сумма окажется равной A . Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, что ряд, полученный после перестановки, будет расходящимся.

Пример 5. Проверить, изменится ли сумма ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$$

при перестановке его членов.

◀ Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$ сходится условно

(проверить самостоятельно!). Обозначим его сумму через S :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots = S.$$

Переставим его члены так, чтобы после каждого положительного члена стояли два отрицательных. Получим

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots + \\ + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \dots$$

Сложим теперь каждый положительный член с последующим отрицательным:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \\ = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \right) = \frac{1}{2} S.$$

Получили, что при перестановке членов ряда сумма ряда уменьшилась вдвое! ▶

*Георг Фридрих Бернхард Риман — немецкий математик (1826–1866).

Рассмотрим ряды (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ и (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. Имеет смысл гово-

речь о ряде $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, составленном из всевозможных произведений членов рядов (1) и (2). Все эти произведения можно записать в виде бесконечной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n & \dots \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Эти произведения можно записать в виде ряда многими различными способами. Например, по диагоналям, как это впервые сделал Коши,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} b_n &= a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) + (a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3) + \dots + \\ &+ (a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + a_{n-2} b_3 + \dots + a_1 b_n) + \dots \end{aligned}$$

3. Если ряды (1) и (2) сходятся абсолютно, то ряд, составленный из всевозможных произведений их членов, сходится абсолютно, причем его сумма равна $S^{(1)} \cdot S^{(2)}$, где $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ – суммы рядов (1) и (2) соответственно.

ГЛАВА 6. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

§ 1. Функциональные последовательности и ряды

1.1. Функциональная последовательность и функциональный ряд

Опр.1. Рассмотрим функции

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$$

Пусть области определения этих функций – множества $D(u_1) = X_1, D(u_2) = X_2, \dots, D(u_n) = X_n, \dots$. Предположим, что $X = \bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n \neq \emptyset$. Будем рассматривать последовательность $\{u_n(x)\}$. Она называется *функциональной последовательностью* (ФП).

Опр. 2. ФП $\{u_n(x)\}$ называется *сходящейся в точке* $x_0 \in X$, если существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x_0)$ [при каждом фиксированном $x_0 \in X$ последовательность $\{u_n(x_0)\}$ является числовой].

Опр. 3. Множество всех $x \in X$, при которых ФП $\{u_n(x)\}$ сходится, называется *областью сходимости* ФП.

Обозначим область сходимости ФП через X_0 . Очевидно, что $X_0 \subseteq X$. Если $X_0 \neq \emptyset$, то можно рассматривать функцию f :

$$\forall x \in X_0 \left(f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) \right).$$

Пример 1. Найти область сходимости ФП $\{x^n\}$.

◀ Пусть $\{u_n(x)\} = \{x^n\}$. Тогда $X = (-\infty; +\infty)$.

При $|x| < 1$ получим $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$.

При $|x| > 1$ получим $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$.

При $x = 1$ получим $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1^n = 1$.

При $x = -1$ получим, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$ не существует.

Т.о., $X_0 = (-1; 1]$ и $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1; 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$ ►

Пример 2. Найти область сходимости ФП $\left\{ \frac{\sin nx}{n} \right\}$.

◀ Пусть $\{u_n(x)\} = \left\{ \frac{\sin nx}{n} \right\}$. Тогда $X = (-\infty; \infty)$. При этом

для любого $x \in \mathbf{R}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin nx}{n} = 0$. Таким образом, область сходимости данной ФП $X_0 = X = (-\infty; +\infty)$ и $f(x) \equiv 0$. ►

Опр. 4. Выражение вида

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots,$$

где $\{u_n(x)\}$ – ФП, называется *функциональным рядом* (ФР). Его удобно записывать с помощью знака суммы $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Частичной суммой ФР (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ называется функция вида $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$.

Опр. 5. ФР (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ называется *сходящимся в точке x_0* , если в этой точке сходится последовательность его частичных сумм $\{S_n(x_0)\}$.

Областью сходимости ФР называется область сходимости последовательности его частичных сумм $\{S_n(x)\}$.

Пример 3. Найти область сходимости ФР (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$.

◀ Запишем частичную сумму ряда (1):

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \text{ при } |x| \neq 1.$$

$$\text{Тогда } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & |x| < 1, \\ +\infty, & |x| > 1. \end{cases}$$

При $x = 1$ $S_n(x) = S_n(1) = \underbrace{1+1+\dots+1}_n = n$, последователь-

ность частичных сумм расходится и поэтому ряд (1) расходится.

При $x = -1$ $S_n(x) = S_n(-1) = 1-1+1-1+\dots+(-1)^{n-1}$, последовательность частичных сумм расходится и поэтому ряд (1) расходится.

Т.о., $X_0 = (-1; 1)$ – область сходимости ФР (1). ►

Пример 4. Найти область сходимости ФР (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

◀ Зафиксируем некоторый $x \in \mathbf{R}$ и рассмотрим ряд (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \right|$, составленный из модулей членов ряда (1). Ряд (2)

является рядом с положительными членами.

Применим к нему признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \right|}{\left| \sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \right|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{x}{2^{n+1}} \right|}{\left| \frac{x}{2^n} \right|} = \frac{1}{2}.$$

Так как $\ell = 1/2 < 1$, то по признаку Даламбера ряд (2) сходится.

Т.о., при выбранном $x \in \mathbf{R}$ ФР (1) сходится абсолютно. Т.к. x – произвольное, то область сходимости ряда (1) – множество $X_0 = \mathbf{R}$. ►

1.2. Равномерная сходимость и ее признаки

Опр. 6. ФП $\{u_n(x)\}$ называется *равномерно сходящейся* на множестве X_0 к функции $f(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \forall n \in \mathbf{N} \forall x \in X_0 (n > n_0 \rightarrow |u_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Сравните это определение с определением *поточечной сходимости*: ФП $\{u_n(x)\}$ называется *сходящейся* на множестве X_0 к функции $f(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in X_0 \exists n_0(\varepsilon, x) \forall n \in \mathbf{N} (n > n_0 \rightarrow |u_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Запись $\{u_n(x)\} \rightrightarrows f(x), x \in X_0$ означает, что ФП $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $f(x)$ на множестве X_0 .

Запись $\{u_n(x)\} \rightarrow f(x), x \in X_0$ означает, что ФП $\{u_n(x)\}$ сходится поточечно к функции $f(x)$ на множестве X_0 .

Пример 5. Исследовать ФП $\{x^n\}$ на равномерную сходимость.

◀ Пусть $\{u_n(x)\} = \{x^n\}$. Мы получили (см. пример 1), что $\{x^n\} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1; 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$ Проверим, является ли сходимость $\{x^n\} \rightarrow 0, x \in (-1; 1)$, равномерной. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и решим неравенство $|u_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. В нашем случае $|u_n(x) - f(x)| = |x^n| < \varepsilon$. Отсюда $n \ln|x| < \ln \varepsilon$.

Т.к. $x \in (-1; 1)$, то $\ln|x| < 0$ и $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|x|}$. Поэтому

$n_0 = \max \left(1; \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln|x|} \right\rceil \right)$, т.е. $n_0 = n_0(\varepsilon; x)$. Значит, для данной ФП

сходимость равномерной не является. ▶

Пример 6. Исследовать ФП $\left\{ \frac{\sin nx}{n} \right\}$ на равномерную сходимость.

◀ Пусть $\{u_n(x)\} = \left\{ \frac{\sin nx}{n} \right\}$. Проверим, является ли сходимость $\left\{ \frac{\sin nx}{n} \right\} \rightarrow 0$, $x \in \mathbf{R}$ равномерной. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и решим неравенство $|u_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

В данном случае $\left| \frac{\sin nx}{n} \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$. Отсюда $n > \frac{1}{\varepsilon}$ и $n_0 = \max\left(1; \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil\right) = n_0(\varepsilon)$. Значит, по определению равномерной сходимости $\left\{ \frac{\sin nx}{n} \right\} \Rightarrow 0$, $x \in \mathbf{R}$. ▶

Опр. 7. ФР $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся к функции $S(x)$ на множестве X_0* , если $\{S_n(x)\} \Rightarrow S(x)$, $x \in X_0$. При этом используют запись

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \Rightarrow S(x), x \in X_0.$$

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие равномерной сходимости ФП). Для того чтобы ФП $\{u_n(x)\} \Rightarrow f(x)$, $x \in X_0$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall x \in X_0 \forall n, p \in \mathbf{N} (n > n_0 \rightarrow |u_{n+p}(x) - u_n(x)| < \varepsilon)$.

Теорема 2 (необходимое и достаточное условие равномерной сходимости ФР). Для того чтобы ФР $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ равномерно сходилась на множестве X_0 , необходимо и достаточно, чтобы

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall x \in X_0 \forall n, p \in \mathbf{N} (n > n_0 \rightarrow |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon)$.

Данная теорема следует из определения равномерно сходящегося ряда и теоремы 1.

Теорема 3 (признак Вейерштрасса*). Пусть задан ФР

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ и ЧР (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ с положительными членами, причем

$\forall x \in X_0 \forall n \in \mathbf{N} (|u_n(x)| \leq c_n)$. Тогда если ряд (2) сходится, то ряд (1) сходится равномерно на множестве X_0 .

Замечание. 1. Т.к. ФР сходится абсолютно в точке x_0 , если ряд, составленный из модулей его членов, сходится в точке x_0 , то признак Вейерштрасса является и признаком абсолютной сходимости ФР на множестве X_0 .

2. Ряд (2) называется *мажорирующим рядом* для ряда (1) на множестве X_0 .

Пример 7. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость функционального ряда

$$(1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)^2 (2x)^{2n}}{x^2 + 3n + 4} \text{ на отрезке } [-1/4; 1/4].$$

◀ Оценим n -й член ряда (1) при условии, что $x \in [-1/4; 1/4]$:

$$\begin{aligned} |u_n(x)| &= \left| \frac{(n+2)^3 (2x)^{2n}}{x^2 + 3n + 4} \right| \leq \left| \begin{array}{l} \text{т.к. } x \in [-1/4; 1/4], \text{ то } |x| \leq \frac{1}{4} \\ \text{увеличим числитель} \end{array} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{(n+2)^3 \left(2 \cdot \frac{1}{4}\right)^{2n}}{x^2 + 3n + 4} \right| \leq \left| \begin{array}{l} x^2 \geq 0 \text{ уменьшим знаменатель} \end{array} \right| \leq \end{aligned}$$

*Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс – немецкий математик (1815 – 1897).

$$\leq \frac{(n+2)^3 \cdot (1/2)^{2n}}{3n+4} = \frac{(n+2)^3}{(3n+4)4^n} = c_n.$$

Для любого $x \in [-1/4; 1/4]$ получили, что $|u_n(x)| \leq c_n$.

Докажем, что ряд (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)^3}{(3n+4)4^n}$ сходится. Для

этого применим признак Даламбера.

$$\begin{aligned} \text{Т.к. } \ell &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+3)^3}{(3n+7)4^{n+1}} \cdot \frac{(3n+4)4^n}{(n+2)^3} = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+3}{n+2} \right)^3 \left(\frac{3n+4}{3n+7} \right) = \frac{1}{4} < 1, \text{ то ряд (2) сходится.} \end{aligned}$$

Из сходимости мажорирующего ряда (2) по признаку Вейерштрасса следует равномерная сходимость функционального ряда (1) на отрезке $[-1/4; 1/4]$. ►

1.3. Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема 4 (о непрерывности суммы ФР). Если ФР

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \Rightarrow S(x), x \in X_0 \text{ и } \forall n \in \mathbf{N} \ u_n(x) \text{ непрерывны на множе-}$$

стве X_0 , то сумма ряда $S(x)$ непрерывна на множестве X_0 .

Теорема 5 (о почленном интегрировании ФР). Пусть

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \Rightarrow S(x), x \in [a; b], \forall n \in \mathbf{N} \ \text{функции } u_n(x) \text{ непрерывны}$$

на отрезке $[a; b]$. Тогда для $\forall \alpha \in [a; b]$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\alpha}^x u_n(t) dt \Rightarrow \int_{\alpha}^x S(t) dt, x \in [a; b].$$

Теорема 6 (о почленном дифференцировании ФР). Пусть

$$\text{ФР (1)} \ \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightarrow S(x), x \in [a; b], \forall n \in \mathbf{N} \ \text{функции } u'_n(x) \text{ непре-}$$

равны на $[a; b]$ и (2) $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \Rightarrow f(x), x \in [a, b]$. Тогда

$$\forall x \in [a; b] \quad S'(x) = f(x).$$

§ 2. Степенные ряды и их свойства

2.1. Степенной ряд и его интервал сходимости

Опр. 1. ФР вида (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, где $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n \in \mathbf{R}$, называется *степенным рядом* (СР).

Замечание 1. Степенным также называется ФР (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$, т.к. с помощью замены переменных $y = x - x_0$ его можно привести к виду (1).

Областью определения СР (1) является множество всех действительных чисел. Определим, где этот ряд сходится.

Теорема (Абеля*). Если ряд (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ сходится в точке $x_1 \neq 0$, то он сходится абсолютно для $\forall x$, удовлетворяющего условию $|x| < |x_1|$; если ряд (1) расходится в точке x_2 , то он расходится для $\forall x$, удовлетворяющего условию $|x| > |x_2|$.

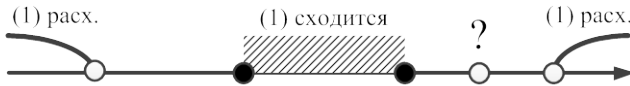
Рассмотрим некоторый СР (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Возможны случаи.

1. СР (1) сходится при $x \in \mathbf{R}$ (например, СР $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$).
2. СР (1) сходится только при $x = 0$ (например, ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} (nx)^n$).
3. Существуют такие x_1 и x_2 , что ряд (1) сходится в точке

* Абель Нильс Хенрик – норвежский математик (1802 – 1829).

x_1 и расходится в точке x_2 (например, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4^n}$ сходится в точке $x_1 = 3$ и расходится в точке $x_2 = 7$).

Рассмотрим третий случай подробнее. Т.к. ряд (1) сходится в точке x_1 , то по теореме Абеля он сходится на множестве $|x| < |x_1|$. Т.к. ряд (1) расходится в точке x_2 , то по теореме Абеля он расходится на множестве $|x| > |x_2|$. Остаются 2 интервала $(-|x_2|; -|x_1|)$ и $(|x_1|; |x_2|)$, на которых поведение ряда не исследовано. Найдем середину отрезка $[|x_1|; |x_2|]$ – точку $x_3 = \frac{|x_1| + |x_2|}{2}$ и определим, как себя ведет ряд (1) в точке x_3 .

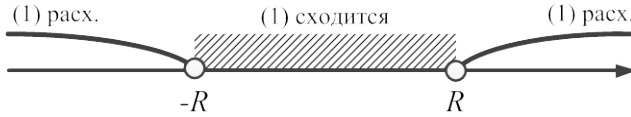


Если при $x = x_3$ ряд (1) сходится, то он будет сходиться на интервале $(-x_3; x_3)$, а если при $x = x_3$ ряд (1) расходится, то он будет расходиться на множестве $(-\infty; -x_3) \cup (x_3; +\infty)$.

Т.о., длина интервалов, на которых поведение ряда не исследовано, уменьшилась вдвое.

Поступая аналогично, мы получаем последовательность точек $\{x_k\}$, которая при $k \rightarrow \infty$, будет сходиться к некоторому числу R : $R = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k$, $R > 0$.

Опр. 2. Число $R > 0$ такое, что СР (1) сходится на интервале $(-R; R)$ и расходится на множестве $(-\infty; R) \cup (R; +\infty)$, называется *радиусом сходимости* СР (1). Интервал $(-R; R)$ называется *интервалом сходимости* СР.



Для нахождения радиуса сходимости CP можно использовать формулы:

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad (1)$$

или

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (2)$$

Если $R = 0$, то ряд (1) сходится только в точке $x = 0$. Если $R = +\infty$, то ряд (1) сходится на всей числовой оси.

Пример 1. Найти интервалы сходимости рядов (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4^n}$,

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ и (3) $\sum_{n=0}^{+\infty} (nx)^n$.

◀ 1. Рассмотрим сначала ряд (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4^n}$. Для него $a_n = \frac{1}{4^n}$.

Найдем радиус сходимости ряда по формуле (1):

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4^n} : \frac{1}{4^{n+1}} \right) = 4.$$

Сл-но, $(-4; 4)$ – интервал сходимости CP (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4^n}$.

2. Для ряда (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ имеем $a_n = \frac{1}{n!}$, поэтому:

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n!} : \frac{1}{(n+1)!} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty.$$

Сл-но, CP (2) имеет интервал сходимости $(-\infty; +\infty)$.

3. Для ряда (3) $\sum_{n=0}^{+\infty} (nx)^n$ имеем $a_n = n^n$, поэтому применим формулу (2) и получим:

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Т.к. $R = 0$, то ряд (3) сходится только при $x = 0$. ►

Замечание 2. Для СР $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ интервал сходимости имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$, где R – радиус сходимости, найденный по формулам (1) или (2).

Пример 2. Найти интервал сходимости СР $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{5n+1}$.

◀ Для данного ряда $x_0 = 2$, $a_n = \frac{3^n}{5n+1}$. Найдем радиус сходимости по формуле (1):

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3^n}{5n+1} : \frac{3^{n+1}}{5(n+1)+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n+6}{3(5n+1)} = \frac{1}{3}.$$

Т.о., интервал сходимости данного ряда – $\left(2 - \frac{1}{3}; 2 + \frac{1}{3} \right)$

или $\left(1\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3} \right)$. ►

2.2. Область сходимости степенного ряда

При исследовании СР (1) на сходимость получено, что он сходится на интервале $(-R; R)$ и расходится на множестве $(-\infty; R) \cup (R; +\infty)$. Остаются не исследованными две точки $x_1 = R$ и $x_2 = -R$. Поэтому, чтобы найти область сходимости СР, эти точки рассматриваются отдельно.

Пример 3. Найти область сходимости СР (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{5^n \sqrt{n}}$.

◀ Для данного ряда $x_0 = -3$, $a_n = \frac{1}{5^n \sqrt{n}}$,

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5^n \sqrt{n}} : \frac{1}{5^{n+1} \sqrt{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \right) = 5.$$

Поэтому ряд (1) сходится на интервале $(x_0 - R; x_0 + R) = (-8; 2)$ и расходится на множестве $(-\infty; -8) \cup (2; +\infty)$.

Исследуем поведение ряда (1) на границах интервала сходимости.

При $x = 2$ данный ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{5^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Полученный ЧР является обобщенным гармоническим рядом, и нам известно, что он расходится.

При $x = -8$ ряд (1) принимает вид $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-5)^n}{5^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Этот ЧР сходится условно (по теореме Лейбница).

Т.о., область сходимости ряда (1) – промежуток $[-8; 2)$. ▶

Замечание 3. При нахождении области сходимости СР можно не использовать формулы (1) или (2), а исследовать его на абсолютную сходимость с помощью признака Даламбера или алгебраического признака Коши.

Пример 4. Найти область сходимости ряда

$$(1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^{3n}}{64^n (n^2 + 1)}.$$

◀ Запишем ряд (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x-1|^{3n}}{64^n (n^2 + 1)}$, составленный из модулей членов ряда (1), и применим к нему признак Даламбера:

$$\begin{aligned} \ell &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{|x-1|^{3(n+1)}}{64^{n+1}((n+1)^2+1)} : \frac{|x-1|^{3n}}{64^n(n^2+1)} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x-1|^3(n^2+1)}{64(n^2+2n+2)} = \frac{|x-1|^3}{64} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} = \frac{|x-1|^3}{64}. \end{aligned}$$

В соответствии с признаком Даламбера ряд (2) сходится при $\ell < 1$, т.е. если $\frac{|x-1|^3}{64} < 1$. Решим это неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{|x-1|^3}{64} < 1 &\Leftrightarrow |x-1|^3 < 64 \Leftrightarrow |x-1| < 4 \Leftrightarrow 4 < x-1 < 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -3 < x < 5. \end{aligned}$$

Т.о., ряд (2) сходится при $x \in (-3; 5)$. Соответственно на интервале $(-3; 5)$ ряд (1) сходится абсолютно.

По признаку Даламбера ряд (2) расходится, если $\ell > 1$, то есть при $\frac{|x-1|^3}{64} > 1$. Т.о., ряд (2) расходится при $x \in (-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$. Ряд (1) при этом также расходится.

Рассмотрим случай, когда признак Даламбера неприменим, т.е. когда $\ell = 1$. Если $\ell = 1$, то $x = -3$ или $x = 5$.

При $x = -3$ ряд (2) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|-4|^{3n}}{64^n(n^2+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Этот ряд сходится, сл-но, ряд (1) при $x = -3$ сходится абсолютно.

При $x = 5$ ряд (2) принимает вид:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|4|^{3n}}{64^n(n^2+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Этот ряд сходится, сл-но, ряд (1) сходится абсолютно при $x = 5$.

Т.о., ряд (1) сходится абсолютно при $x \in (-3; 5)$ и в точках $x = -3$ и $x = 5$. Значит, он сходится на отрезке $[-3; 5]$. ►

2.3. Свойства степенных рядов

1. Если $R > 0$ – радиус сходимости СР (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, то ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[-\rho; \rho]$ для любого числа ρ такого, что $0 < \rho < R$.

2. Если $R > 0$ – радиус сходимости СР (1), а $S(x)$ – сумма ряда (1) на интервале $(-R; R)$, то функция $S(x)$ непрерывна на интервале $(-R; R)$.

3. Если $R > 0$ – радиус сходимости степенного ряда (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, то данный ряд можно сколько угодно раз почленно интегрировать на любом отрезке $[-\rho; \rho]$, где $0 < \rho < R$. При этом радиус его сходимости не изменяется.

4. Если $R > 0$ – радиус сходимости СР (1), то данный ряд можно сколько угодно раз почленно дифференцировать. При этом радиус его сходимости не изменяется.

Пример 5. Найти сумму ряда (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

◀ Т.к. $\frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x x^n dx$, то одновременно с рядом (1) рассмотрим

СР (2) $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Ряд (2) сходится на интервале $(-1; 1)$. Найдем

его сумму. Частичная сумма ряда (2) $S_n^{(2)}(x)$ имеет вид

$$S_n^{(2)}(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \left[\begin{array}{l} \text{сумма геометрической} \\ \text{прогрессии} \end{array} \right] = \\ = \frac{1 \cdot (1 - x^n)}{1 - x}.$$

При $x \in (-1; 1)$ $S^{(2)}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{(2)}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = 1-x$.

По свойству 3 СР ряд (2) можно почленно интегрировать, причем радиус его сходимости при этом не изменяется. Т.е.

$$\int_0^x S^{(2)}(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x x^n dx, \quad x \in (-1; 1).$$

Получим

$$\int_0^x \frac{1}{1-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x x^n dx \quad \text{или} \quad -\ln|1-x| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x \right).$$

$$\text{Т.е.} \quad -\ln|1-x| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Т.о., для любого $x \in (-1; 1)$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$. Значит,

ряд (1) сходится на интервале $x \in (-1; 1)$ к функции $S^{(1)}(x) = -\ln(1-x)$. ►

Пример 6. Найти сумму ряда (1) $\sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\sin^{n-1} x}{2^n}$.

◀ Обозначим $y = \sin x$. Тогда ряд примет вид $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n y^{n-1}}{2^n}$.

Т.к. $\frac{ny^{n-1}}{2^n} = \left(\frac{y^n}{2^n} \right)'$, то одновременно с рядом (1) рассмот-

рим ряд (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{2^n}$, для которого $a_n = \frac{1}{2^n}$, радиус сходимости:

$$R^{(2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2.$$

При этом на интервале $(-R^{(2)}; R^{(2)}) = (-2; 2)$ ряд (2) является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрес-

сии, поэтому

$$S^{(2)}(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{2^n} = \frac{y}{2} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^3 + \dots = \frac{\frac{y}{2}}{1 - \frac{y}{2}} = \frac{y}{2-y}.$$

По свойству 4 СР ряд (2) можно почленно дифференцировать, причем при этом радиус его сходимости не изменится.

Т.е. при $y \in (-2; 2)$ $(S^{(2)}(y))'_y = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{y^n}{2^n}\right)'_y$ или

$$\left(\frac{y}{2-y}\right)'_y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ny^{n-1}}{2^n}. \text{ Получим } \frac{2-2y}{(2-y)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ny^{n-1}}{2^n}.$$

Т.о., для любого $y \in (-2; 2)$

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ny^{n-1}}{2^n} = \frac{2-2y}{(2-y)^2} = S^{(1)}(y).$$

Т.к. $y = \sin x$, то $S^{(1)}(x) = \frac{2-2\sin x}{(2-\sin x)^2}$ при условии, что

$\sin x \in (-2; 2)$. Учитывая, что для любого $x \in \mathbf{R}$ $|\sin x| \leq 1$, то для любого $x \in \mathbf{R}$ $\sin x \in (-2; 2)$. Поэтому ряд (1) сходится при

всех $x \in \mathbf{R}$ и его сумма $S^{(1)}(x) = \frac{2-2\sin x}{(2-\sin x)^2}$. ►

Замечание 4. Рассмотренные примеры 5 и 6 показывают, что для вычисления суммы степенного ряда следует подобрать другой степенной ряд, сумму которого можно легко найти и каждый член которого является производной (или первообразной) соответствующего члена исходного ряда.

§ 3. Разложение функции в ряд Тейлора

3.1. Определение ряда Тейлора

В предыдущем параграфе мы изучили свойства СР и их сумм. Зная вид СР, мы можем в ряде случаев найти функцию,

которая является его суммой. Часто на практике возникает необходимость решать обратную задачу: можно ли для данной функции получить ее представление в виде СР? Как будут выглядеть коэффициенты этого ряда и его область сходимости?

Нам известно ([8], с. 33), что любую $(n + 1)$ раз дифференцируемую в окрестности точки x_0 функцию $y = f(x)$ можно представить по формуле Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x),$$

где $r_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора, записанный, например, в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Предположим, что функция $y = f(x)$ бесконечно дифференцируема (имеет конечную производную любого порядка) в окрестности точки x_0 . Тогда по аналогии с формулой Тейлора для функции $y = f(x)$ мы можем составить ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Данный ряд называется *формальным рядом Тейлора* для функции $f(x)$, и используется обозначение

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Название «формальный ряд Тейлора» говорит о том, что нам неизвестно: является ли данный степенной ряд сходящимся

*Тейлор Брук – английский математик (1685 — 1731).

и будет ли он сходиться именно к функции $f(x)$. Для ответа на эти вопросы используем следующие теоремы.

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие сходимости ряда Тейлора). *Формальный ряд Тейлора*

$$(1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \text{ сходитс} \text{я к функции } y = f(x) \text{ в точке}$$

x тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(x) = 0$, где $r_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора.

Теорема 2 (достаточное условие сходимости ряда Тейлора). *Если в некоторой окрестности точки x_0 все производные функции $y = f(x)$ равномерно ограничены (т.е. $\exists M > 0$ такое, что $\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \quad |f^{(n)}(x)| \leq M$), то формальный ряд Тейлора функции $y = f(x)$ сходится к функции $f(x)$ в этой окрестности точки x_0 .*

Мы изучили условия, при которых формальный ряд Тейлора функции $y = f(x)$ сходится к этой функции. Этот ряд является СР, сходящимся к функции $y = f(x)$. Возникает вопрос: может ли какой-то другой СР сходиться к функции $y = f(x)$? Справедлива следующая теорема.

Теорема 3 (о разложении функции в СР). *Если СР (2)*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ сходитс} \text{я к функции } y = f(x) \text{ на интервале}$$

$(x_0 - R; x_0 + R)$, где R – радиус сходимости СР, то он является рядом Тейлора для функции $y = f(x)$, т.е. его коэффициенты a_n удовлетворяют условию $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Опр. 1. Функция $y = f(x)$ называется *аналитической* в некоторой окрестности точки x_0 , если в этой окрестности она разлагается в СР.

Из теоремы 3 следует, что любая аналитическая функция является бесконечно дифференцируемой в окрестности точки x_0 .

Опр. 2. Если в ряде Тейлора $x_0 = 0$, то данный ряд называется *рядом Маклорена**.

3.2. Ряд Маклорена для некоторых элементарных функций

Рассмотрим разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций, наиболее часто используемые на практике:

$$1) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$2) \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$x \in (-\infty; +\infty);$$

$$3) \operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$x \in (-\infty; +\infty);$$

$$4) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

$$x \in (-\infty; +\infty);$$

$$5) \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$x \in (-\infty; +\infty);$$

*Маклорен Колин – шотландский математик (1698 — 1746).

$$\begin{aligned}
 6) (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \\
 &+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots = \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,
 \end{aligned}$$

$$x \in \begin{cases} [-1; 1], & \text{если } \alpha \geq 0, \\ (-1; 1], & \text{если } -1 < \alpha < 0, \\ (-1; 1), & \text{если } \alpha \leq -1; \end{cases}$$

$$7) \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

$$x \in (-1; 1) \text{ или } |x| < 1;$$

$$8) \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n,$$

$$x \in (-1; 1) \text{ или } |x| < 1;$$

$$9) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

$$x \in (-1; 1];$$

$$10) \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1; 1];$$

$$11) \arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in [-1; 1].$$

Докажем некоторые из перечисленных формул.

Пример 1. Получить разложение в ряд Маклорена для

функции $y = e^x$.

◀ Составим формальный ряд Маклорена для функции $y = e^x$:

$$\begin{array}{ll} y = e^x & y(x_0) = e^0 = 1 \\ y' = e^x & y'(x_0) = 1 \\ y'' = e^x & y''(x_0) = 1 \\ \dots & \dots \\ y^{(n)} = e^x & y^{(n)}(x_0) = 1 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Формальный ряд Маклорена для функции $y = e^x$ будет иметь вид: $e^x \sim 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Найдем радиус сходимости данного СР:

$$R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty.$$

Т.о., данный СР сходится на интервале $(-\infty; +\infty)$.

Покажем, что полученный степенной ряд сходится именно к функции $y = e^x$. Для этого запишем остаточный член формулы Тейлора

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = \frac{e^{0+\theta(x-0)}}{(n+1)!} (x-0)^{n+1} = \\ &= \frac{e^\theta x^{n+1}}{(n+1)!} \text{ и вычислим } \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим вспомогательный ФР (*) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^\theta x^{n+1}}{(n+1)!}$. Т.к. радиус сходимости ряда (*)

$$R^{(*)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^\theta}{(n+1)!} : \frac{e^\theta}{(n+2)!} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2) = +\infty,$$

то ряд (*) сходится при всех $x \in \mathbf{R}$. Тогда по необходимому условию сходимости числовых рядов n -й член ряда (*) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то есть $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^\theta x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

Т.о., при всех $x \in \mathbf{R}$ получили, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(x) = 0$. Т.е. ряд

Маклорена $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ сходится к функции $y = e^x$ при всех $x \in (-\infty; +\infty)$. ►

Пример 2. Получить разложение в ряд Маклорена для функции $y = \operatorname{sh} x$.

◀ Т.к. $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, то запишем разложение в ряд Мак-

лорена для функций e^x и e^{-x} :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty),$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Т.к. сходящиеся ряды можно почленно складывать (вычитать), то мы получим

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} &= (1-1) + \left(\frac{x}{1!} - \left(-\frac{x}{1!} \right) \right) + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^2}{2!} \right) + \left(\frac{x^3}{3!} - \left(-\frac{x^3}{3!} \right) \right) + \dots = \\ &= \frac{2x}{1!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty). \end{aligned}$$

Сходящийся ряд можно умножать (делить) на отличное от нуля число, поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{2x}{2} + \frac{2x^3}{2} + \frac{2x^5}{2} + \dots = \\ &= \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, x \in (-\infty; +\infty). \blacktriangleright \end{aligned}$$

Пример 3. Получить разложение в ряд Маклорена для функции $y = \ln(1+x)$.

◀ Рассмотрим разложение

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots, x \in (-1; 1).$$

По свойству 3 степенных рядов данный ряд можно почленно интегрировать, при этом интервал его сходимости не изменяется:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1+x} dx &= \int_0^x 1 dx - \int_0^x x dx + \int_0^x x^2 dx - \int_0^x x^3 dx + \dots + (-1)^n \int_0^x x^n dx + \dots + \\ &+ \ln|1+x| \Big|_0^x = x \Big|_0^x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^x + \frac{x^3}{3} \Big|_0^x - \frac{x^4}{4!} \Big|_0^x + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x + \dots \end{aligned}$$

Окончательно, подставив пределы интегрирования, мы получим:

$$\begin{aligned} \ln|1+x| &= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, x \in (-1; 1). \blacktriangleright \end{aligned}$$

Замечание. Сходимость данного ряда при $x = 1$ исследуется отдельно.

При разложении произвольных функций в ряд Тейлора можно использовать свойства СР (сумма двух рядов, почленное интегрирование и дифференцирование) и записанные формулы 1–11.

Пример 4. Разложить функцию $y = \frac{3}{2-x-x^2}$ в ряд Маклорена.

◀ Разложим функцию $y = \frac{3}{2-x-x^2}$ в сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов

$$y = \frac{3}{2-x-x^2} = \frac{3}{(1-x)(2+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{2+x}.$$

Найдем коэффициенты данного разложения

$$A(2+x) + B(1-x) = 3,$$

$$x=1: 3A=3 \rightarrow A=1, \quad x=-2: 3B=3 \rightarrow B=1.$$

Получим $y = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2+x}$. Запишем разложения для каждого слагаемого, применяя формулы 7 и 8:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \text{ если } |x| < 1,$$

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots \right),$$

$$\text{если } \left| \frac{x}{2} \right| < 1. \text{ Или } \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}, |x| < 2.$$

Тогда

$$y = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right) x^n,$$

$$\text{если } \begin{cases} |x| < 1, \\ |x| < 2 \end{cases} \text{ или } x \in (-1; 1) \blacktriangleright$$

Пример 5. Разложить функцию $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ в ряд Маклорена.

◀ Запишем ряд $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$, $x \in \mathbf{R}$.

Тогда для $y = \sin 3x$ получим (подставив вместо x в данный ряд $3x$) ряд Маклорена:

$$\sin 3x = 3x - \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{3^5 x^5}{5!} - \frac{3^7 x^7}{7!} + \dots$$

Почленно разделим ряд на $x \neq 0$:

$$\frac{\sin 3x}{x} = 3 - \frac{3^3 x^2}{3!} + \frac{3^5 x^4}{5!} - \frac{3^7 x^6}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n}$$

при $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Т.е. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n}$, $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. ▶

Пример 6. Разложить $f(x) = 2^{-x^2}$ в ряд Маклорена.

◀ Преобразуем функцию $f(x) = 2^{-x^2} = e^{\ln 2^{-x^2}} = e^{-x^2 \ln 2}$.

Используем табличное разложение

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} 2^{-x^2} &= e^{-x^2 \ln 2} = 1 - x^2 \ln 2 + \frac{x^4 \ln^2 2}{2!} - \frac{x^6 \ln^3 2}{3!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} \ln^n 2}{n!}, \quad x \in \mathbf{R}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Пример 7. Разложить функцию $y = f(x) = \frac{1}{x}$ в ряд Тейлора

ра в окрестности точки $x_0 = -2$.

◀ Преобразуем функцию

$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{(x+2)-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x+2}{2}}.$$

Используем разложение 7 в ряд Маклорена:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad x \in (-1; 1).$$

Получим (подставив вместо x в данный ряд $\frac{x+2}{2}$)

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{x+2}{2} + \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(x+2)^3}{8} + \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Данное равенство будет справедливо, если $\frac{x+2}{2} \in (-1; 1)$

или $\frac{|x+2|}{2} < 1$. Отсюда $|x+2| < 2$ или $-4 < x < 0$.

$$\text{Т.о., } f(x) = \frac{1}{x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{2^{n+1}}, \quad x \in (-4; 0). \blacktriangleright$$

Пример 8. Разложить функцию $f(x) = e^x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$.

◀ Преобразуем функцию $f(x)$, выразив $x - x_0$:

$$f(x) = e^x = e^{(x-1)+1} = e^1 \cdot e^{x-1} = e \cdot e^{x-1}.$$

Применим к функции e^{x-1} разложение 1, подставив вместо x разность $(x-1)$:

$$e^{x-1} = 1 + \frac{(x-1)}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-1)^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$$

при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Умножая данный ряд на число e , получаем:

$$f(x) = e \cdot e^{x-1} = e \cdot 1 + e \cdot \frac{(x-1)}{1!} + e \cdot \frac{(x-1)^2}{2!} + \dots + e \cdot \frac{(x-1)^n}{n!} + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e(x-1)^n}{n!}, \quad x \in (-\infty; +\infty). \blacktriangleright$$

Пример 9. Разложить функцию $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора по степеням $(x-2)$.

◀ Преобразуем функцию $f(x)$, выделив в аргументе выражение $(x-2)$:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi x}{4} &= \sin \left(\frac{\pi}{4}(x-2+2) \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4}(x-2) + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= [\text{используем формулу приведения}] = \cos \left(\frac{\pi}{4}(x-2) \right). \end{aligned}$$

Т.к. $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ при $x \in (-\infty; +\infty)$ (см. разложение 4), то, подставив вместо x выражение $\frac{\pi}{4}(x-2)$, получим:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{4} x &= \cos \left(\frac{\pi}{4}(x-2) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot \left(\frac{\pi}{4}(x-2) \right)^{2n}}{(2n)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n} (x-2)^{2n}}{4^{2n} \cdot (2n)!} \quad \text{при } x \in (-\infty; +\infty). \blacktriangleright \end{aligned}$$

§ 4. Приложение степенных рядов

Разложение функции в СР часто используется на практике. С его помощью можно вычислять значение функций с указанной точностью, приближенно вычислять определенные интегралы или решать разнообразные уравнения (трансцендентные, интегральные или дифференциальные). Рассмотрим некоторые из этих приложений.

4.1. Приближенное вычисление значений функции

Пусть задана функция $y = f(x)$, для которой известно ее

разложение в СР (ряд Тейлора) на некотором интервале $(-R; R)$. Требуется вычислить значение функции $y = f(x)$ при $x = x_1 \in (-R; R)$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$.

Т.к. функция представима в виде СР, то

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + \dots$$

Соответственно при $x = x_1$ получаем

$$f(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n + a_{n+1}x_1^{n+1} + \dots \quad (1)$$

Подберем номер n таким образом, чтобы остаток ряда (1) $R_n = a_{n+1}x_1^{n+1} + \dots$ удовлетворял условию $|R_n| < \varepsilon$.

Тогда $f(x_1) \approx S_n = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n$ с указанной точностью $\varepsilon > 0$.

Замечание 1. Существуют различные способы оценки остатка R_n ряда (1). Наиболее простая оценка получается в случае, когда ряд (1) удовлетворяет теореме Лейбница.

Пример 1. Вычислить значение \sqrt{e} с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

◀ Используем разложение функции $y = e^x$ в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$$

$$\text{Тогда } \sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1/2}{1!} + \frac{(1/2)^2}{2!} + \dots + \frac{(1/2)^n}{n!} + \frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$$

Подберем n т.о., чтобы

$$|R_n| = \left| \frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(1/2)^{n+2}}{(n+2)!} + \dots \right| < \varepsilon.$$

В нашем случае

$$\begin{aligned}
 R_n &= \frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{(1/2)^{n+2}}{(n+2)!} + \frac{(1/2)^{n+3}}{(n+3)!} + \dots = \\
 &= \frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1/2}{n+2} + \frac{1/4}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) < \\
 &< \left[\begin{array}{l} \text{уменьшим} \\ \text{знаменатель} \end{array} \right] < \frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) = \\
 &= \left[\begin{array}{l} \text{используем формулу суммы бесконечно} \\ \text{убывающей геометрической прогрессии} \end{array} \right] = \\
 &= \frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{(1/2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 2 = \frac{(1/2)^n}{(n+1)!}.
 \end{aligned}$$

Т.к. $R_n < \frac{(1/2)^n}{(n+1)!}$, то подберем n т.о., чтобы $\frac{(1/2)^n}{(n+1)!} < \varepsilon$,

тогда и $R_n < \varepsilon$.

При $n = 3$ имеем $\frac{(1/2)^3}{4!} = \frac{1}{8 \cdot 24} = \frac{1}{192} > 0,001$,

при $n = 4$ получим $\frac{(1/2)^4}{5!} = \frac{1}{16 \cdot 120} = \frac{1}{1920} < 0,001$.

Т.к. $R_4 < \varepsilon$, то с точностью до $\varepsilon = 0,001$

$$\sqrt{e} \approx S_4 = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{16!} = \frac{211}{128} \approx 1,64844. \blacktriangleright$$

Пример 2. Вычислить $\sqrt[3]{10}$ с точностью до $\varepsilon = \frac{1}{1000}$.

◀ Используем разложение функции $(1+x)^\alpha$ в ряд Маклорена при $\alpha = \frac{1}{3}$. Получим $\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} =$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!} x^2 + \frac{1}{3} \frac{\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!} x^3 + \dots = \\
&= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1 \cdot 2}{9 \cdot 2!} x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!} x^3 - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3^4 \cdot 4!} x^4 + \dots,
\end{aligned}$$

где $x \in [-1; 1]$.

В данном случае $1+x=10$, то есть $x=9 \notin [-1; 1]$, поэтому преобразуем наше выражение

$$\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{8+2} = \sqrt[3]{8\left(1+\frac{1}{4}\right)} = 2 \cdot \sqrt[3]{1+\frac{1}{4}} = 2 \cdot \left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Теперь используем разложение функции $\sqrt[3]{1+x}$ в ряд при $x = \frac{1}{4}$. Получим

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{10} &= 2 \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \\
&= 2 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1 \cdot 2}{9 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!} \cdot \frac{1}{4^3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3^4 \cdot 3!} \cdot \frac{1}{4^4} + \dots\right) = \\
&= 2 + \frac{1}{6} - \frac{4}{9 \cdot 2! \cdot 4^2} + \frac{20}{3^3 \cdot 3! \cdot 4^3} - \frac{160}{3^4 \cdot 4! \cdot 4^4} + \dots
\end{aligned}$$

Последний ряд удовлетворяет теореме Лейбница, поэтому остаток ряда $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Т.к. $\frac{20}{3^3 \cdot 3! \cdot 4^3} > \frac{1}{1000}$, а $\frac{160}{3^4 \cdot 4! \cdot 4^4} < \frac{1}{1000}$, то при приближенном вычислении суммы данного ряда достаточно взять четыре первых члена полученного ряда ($S \approx S_3$), при этом погрешность вычислений $|R_3| \leq \frac{160}{3^4 \cdot 4! \cdot 4^4} < \varepsilon$.

$$\text{Т.о., } \sqrt[3]{10} \approx 2 + \frac{1}{6} - \frac{4}{9 \cdot 2! \cdot 4^2} + \frac{20}{3^3 \cdot 3! \cdot 4^3} \approx 2,1547 \quad \text{с точностью}$$

стью до $\varepsilon = \frac{1}{1000}$. ►

4.2. Приближенное вычисление определенных интегралов

Разложение функции в СР используется при вычислении определенных (или неопределенных) интегралов в том случае, когда эти интегралы являются «неберущимися» или очень трудоемкими.

Чтобы вычислить $\int_a^b f(x)dx$, подынтегральную функцию раскладывают в ряд Тейлора на отрезке $[a; b]$, а затем используют свойство почленного интегрирования СР. Далее подбирают n т.о., чтобы остаток R_n полученного ряда был меньше заданной точности вычислений.

Тогда $\int_a^b f(x)dx \approx S_n$.

Пример 3. Вычислить $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

◀ Разложим функцию e^{-x^2} в СР. Так как $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ при

$x \in \mathbf{R}$, то

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \text{ при } x \in \mathbf{R}.$$

Сходящийся СР можно почленно интегрировать, поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \Big|_0^1 \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}. \end{aligned}$$

Полученный ЧР $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$ удовлетворяет теореме Лейбница (докажите самостоятельно!), поэтому его сумма $S \approx S_n$, если $|R_n| \leq a_{n+1} < \varepsilon$.

При $n = 4$ получаем $a_{n+1} = a_5 = \frac{1}{5! \cdot 11} = 0,00076 < \varepsilon$, поэтому $S \approx S_4$ с точностью до $\varepsilon = \frac{1}{1000}$. Следовательно,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx S_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0,747. \blacktriangleright$$

Замечание 2. Функция $y = e^{-x^2}$ и ее интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

имеют большое практическое значение и применяются в теории вероятностей для описания нормального распределения.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^{0,1} \cos(100x^2) dx$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

◀ Так как $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$, где $x \in \mathbf{R}$, то

$$\begin{aligned} \cos(100x^2) &= 1 - \frac{(100x^2)^2}{2!} + \frac{(100x^2)^4}{4!} - \frac{(100x^2)^6}{6!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{10^4 x^4}{2!} + \frac{10^8 x^8}{4!} - \frac{10^{12} x^{12}}{6!} + \dots \end{aligned}$$

СР можно почленно интегрировать, поэтому

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{0,1} \cos(100x^2) dx = \\
&= \int_0^{0,1} 1 dx - \frac{10^4}{2!} \int_0^{0,1} x^4 dx + \frac{10^8}{4!} \int_0^{0,1} x^8 dx - \frac{10^{12}}{6!} \int_0^{0,1} x^{12} dx + \dots = \\
&= x \Big|_0^{0,1} - \frac{10^4}{2!} \frac{x^5}{5} \Big|_0^{0,1} + \frac{10^8}{4!} \frac{x^9}{9} \Big|_0^{0,1} - \frac{10^{12}}{6!} \frac{x^{13}}{13!} \Big|_0^{0,1} + \dots = \\
&= 0,1 - \frac{0,1}{5 \cdot 2!} + \frac{0,1}{9 \cdot 4!} - \frac{0,1}{13 \cdot 6!} + \dots = \\
&= 0,1 \left(1 - \frac{1}{5 \cdot 2!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \frac{1}{13 \cdot 6!} + \dots \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 0,1}{(4n+1)(2n)!}.
\end{aligned}$$

Получили, что $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 0,1}{(4n+1)(2n)!}$.

Вычислим сумму полученного ряда с точностью до $\varepsilon = 0,001$. Т.к. данный ряд является сходящимся рядом типа

Лейбница, то $I \approx S_n$, если $a_{n+1} < \varepsilon$, где $a_n = \frac{0,1}{(4n+1)(2n)!}$.

При $n=0$ $a_{n+1} = a_1 = \frac{0,1}{5 \cdot 2} = 0,01 > \varepsilon$, при $n=1$

$$a_{n+1} = a_2 = \frac{0,1}{9 \cdot 4!} = \frac{0,1}{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{2160} < \frac{1}{1000}.$$

Поэтому $I \approx S_1 = 0,1 - 0,01 = 0,09$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$. ►

4.3. Приближенное решение ДУ

Рассмотрим два способа решения дифференциальных уравнений (ДУ) с помощью рядов.

1-й способ (метод последовательного дифференцирования).

Требуется найти решение задачи Коши

$$y' = f(x; y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Будем искать решение в виде ряда Тейлора

$$y = y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Значение $y(x_0)$ задано в виде начального условия $y(x_0) = y_0$. Чтобы найти $y'(x_0)$, подставим в ДУ $y' = f(x, y)$ значения $x = x_0$ и $y = y_0$, т.е. $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.

Чтобы определить $y''(x_0)$, продифференцируем уравнение $y' = f(x, y)$. Получим $y'' = (f(x, y))'_x = f'_x + f'_y \cdot y'$ (так как $y = y(x)$, то для нахождения y'' использовали формулу производной сложной функции). Тогда

$$y''(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot y'(x_0).$$

Аналогично, чтобы найти $y'''(x_0)$, продифференцируем уравнение $y'' = f'_x + f'_y \cdot y'$. Получим $y''' = (f'_x + f'_y \cdot y')'_x = f''_{x^2} + f''_{xy} \cdot y' + f''_{yx} \cdot y' + f''_{y^2} \cdot (y')^2 + f'_y \cdot y''$ и так далее.

Найденные значения производных подставляем в ряд и получаем решение задачи Коши. Данный метод можно применять для уравнений любого порядка.

Пример 5. Записать пять первых членов разложения в СР решения ДУ $y' = e^y + xy$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 0$.

◀ Т.к. $x_0 = 0$, то будем искать решение в виде ряда Маклорена

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{IV}(0)}{4!}x^4 + \dots$$

По условию $y(0) = 0$, тогда $y'(0) = (e^y + xy)|_{x=0, y=0} = 1$.

Продифференцируем уравнение $y' = e^y + xy$, чтобы вычислить y'' . Получим $y'' = (e^y + xy)'_x = e^y y' + y + xy'$.

$$\text{Отсюда } y''(0) = e^0 \cdot 1 + 0 + 0 \cdot 1 = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Аналогично } y''' &= (e^y y' + y + xy')'_x = \\ &= e^y (y')^2 + e^y y'' + y' + y' + xy'' = e^y y'' + 2y' + xy'' + e^y (y')^2, \\ y'''(0) &= e^0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + e^0 \cdot 1 = 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{IV} &= (e^y y'' + 2y' + xy'' + e^y (y')^2)'_x = \\ &= e^y y' y'' + e^y y''' + 2y'' + y'' + xy''' + e^y (y')^3 + e^y 2y' y'' = \\ &= 3e^y y' y'' + e^y y''' + 3y'' + xy''' + e^y (y')^3, \end{aligned}$$

$$y^{IV}(0) = 7.$$

Подставим найденные коэффициенты в ряд и получим

$$\begin{aligned} y(x) &= 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{4}{3!}x^3 + \frac{7}{4!}x^4 + \dots = \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{24}x^4 + \dots \end{aligned}$$

Запишем в ответ пять первых членов полученного разложения $y(x) \approx 0 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{24}x^4$. ►

Пример 6. Найти пять первых членов разложения в СР решения задачи Коши $y'' = 1 + x + x^2 - 2y^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

◀ Т.к. $x_0 = 1$, то ищем решение в виде

$$\begin{aligned} y(x) &= y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ &+ \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{y^{IV}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + \dots \end{aligned}$$

По условию задачи $y(x_0) = y(1) = 1$, $y'(x_0) = y'(1) = 2$.

Найдем y'' из данного дифференциального уравнения

$$y''(x_0) = (1 + x + x^2 - 2y^2) \Big|_{x=1, y=1, y'=2} = 1 + 1 + 1 - 2 = 1.$$

Найдем y''' и y^{IV} :

$$y''' = 1 + 2x - 4y \cdot y', \quad y'''(x_0) = y'''(1) = 1 + 2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -1,$$

$$y^{IV} = 2 - 4(y')^2 - 4y \cdot y'', \quad y^{IV}(x_0) = 2 - 4 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -6.$$

Подставим найденные коэффициенты в ряд и получим

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{-1}{3!}(x-1)^3 + \frac{-6}{4!}(x-1)^4 + \dots = \\ &= 1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots \end{aligned}$$

Запишем в ответ пять первых членов полученного разложения $y(x) \approx 1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$. ►

2-й способ (метод неопределенных коэффициентов). Этот способ, как правило, применяют для решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим его на примере ЛНДУ второго порядка $y'' + p_1y' + p_2y = f(x)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$.

Будем искать решение $y(x)$ этого уравнения в виде СР

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

с неопределенными коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Находим a_0 из условия $y(x_0) = y_0$, то есть

$$y_0 = y(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - x_0) + \dots + a_n(x_0 - x_0)^n + \dots = a_0.$$

Поэтому $a_0 = y_0$.

СР можно почленно дифференцировать, следовательно,

$$y' = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1} + \dots$$

Подставив $y'(x_0) = y'_0$ и $x = x_0$, найдем $a_1 = y'_0$.

Чтобы найти остальные коэффициенты $y(x)$, вычислим $y'' = 2a_1 + 6a_3(x - x_0) + \dots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \dots$ и подставим y , y' и y'' в исходное ДУ. При этом правую часть $f(x)$ этого ДУ также раскладываем в степенной ряд по степеням $(x - x_0)$.

Пример 7. Найти решение ДУ $y'' - 3y' + 2y = \ln(1+x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

◀ Т.к. $x_0 = 0$, то будем искать решение $y(x)$ в виде

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Т.к. $y(0) = 2$, то $a_0 = 2$.

Учитывая, что $y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$ и $y'(0) = 1$, получаем $a_1 = 1$. Найдем $y'' = 2a_1 + 6a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots$

Разложим функцию $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$ и подставим y , y' , y'' и $\ln(1+x)$ в данное ДУ:

$$\begin{aligned} & (2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots) - \\ & - 3(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots + n \cdot a_nx^{n-1} + \dots) + \\ & + 2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots) = \\ & = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \end{aligned}$$

Сложим ряды, стоящие в левой части данного уравнения $(2a_2 - 3a_1 + 2a_0) + (6a_3 - 6a_2 + 2a_1)x + (12a_4 - 9a_3 + 2a_2)x^2 +$
 $+ (20a_5 - 12a_4 + 2a_3)x^3 + \dots = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$

и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$\begin{cases} 2a_2 - 3a_1 + 2a_0 = 0, \\ 6a_3 - 6a_2 + 2a_1 = 1, \\ 12a_4 - 9a_3 + 2a_2 = -\frac{1}{2}, \\ 20a_5 - 12a_4 + 2a_3 = \frac{1}{3}, \\ \dots \end{cases}$$

Последовательно находим $a_2 = \frac{3a_1 - 2a_0}{2} = -\frac{1}{2}$,

$$a_3 = \frac{1 + 6a_2 - 2a_1}{6} = -\frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{-\frac{1}{2} + 9a_3 - 2a_2}{12} = -\frac{11}{24},$$

$$a_5 = \frac{\frac{1}{3} + 12a_4 - 2a_3}{20} = -\frac{23}{20} \text{ и т. д. В результате получим:}$$

$$y(x) = 2 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{11}{24}x^4 - \frac{23}{20}x^5 + \dots \blacktriangleright$$

ГЛАВА 7. РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 1. Тригонометрический ряд Фурье для 2π -периодической функции

Опр. 1. Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1)$$

называется *тригонометрическим рядом* (ТР). Его n -й член можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_n(x) &= a_n \cos nx + b_n \sin nx = \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos nx + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin nx \right) = \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} (\sin \varphi_n \cos nx + \cos \varphi_n \sin nx) = A_n \sin(nx + \varphi_n), \end{aligned}$$

где $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, а φ_n удовлетворяет условию

$$\sin \varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \cos \varphi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

Опр. 2. Функция вида $u_n(x) = A_n \sin(nx + \varphi_n)$ называется *простой гармоникой*. Число A_n называется *амплитудой гармоники*, а число φ_n – *начальной фазой*.

Опр. 3. Частичная сумма ряда (1)

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

называется *сложным гармоническим колебанием* и является суммой простых гармоник.

ТР (1) составлен из функций тригонометрической системы функций $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$. Данная система функций обладает свойствами ортогональности, т.е. при $n, m \in \{0, 1, 2, \dots\}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m, \end{cases} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0.$$

Рассмотрим, при каких условиях некоторую функцию $y = f(x)$ можно представить в виде ТР (1).

Теорема 1. Если ТР (1) равномерно сходится к функции $y = f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$, то его коэффициенты удовлетворяют равенствам

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \end{cases} \quad (2)$$

Опр. 4. Пусть $y = f(x)$ является 2π -периодической и интегрируемой на отрезке $[-\pi; \pi]$. ТР (1), коэффициенты которого определяются по формулам (2), называется *рядом Фурье** (РФ) для функции $y = f(x)$, а его коэффициенты называются *коэффициентами Фурье* для функции $y = f(x)$.

Запись $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ означает, что данный ряд является формальным рядом Фурье функции $y = f(x)$, т.е. его коэффициенты найдены по формуле (2).

Теорема 2 (Дирихле). Пусть 2π -периодическая функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям:

*Жан Батист Жозеф Фурье – французский математик и физик (1768 – 1830).

- 1) $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$, т.е. имеет на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода;
 2) $f(x)$ кусочно-монотонна на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Тогда формальный ряд Фурье функции $f(x)$ сходится, причем его сумма $S(x)$ удовлетворяет условиям:

1) $S(x) = f(x)$, если x – точка непрерывности функции $f(x)$;

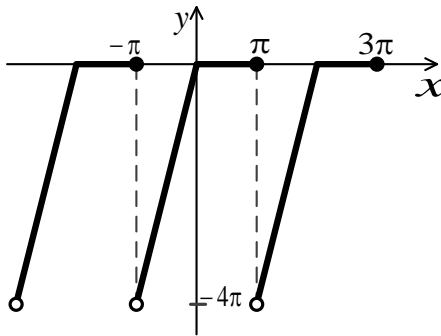
2) $S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, если x – точка разрыва функции $f(x)$.

Замечание. Напомним, что $f(x-0)$ и $f(x+0)$ – пределы функции $y = f(x)$ в точке x слева и справа соответственно.

Пример 1. Разложить в РФ 2π -периодическую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & x \in (-\pi; 0), \\ 0, & x \in [0; \pi] \end{cases}$$

◀ График функции $f(x)$ имеет вид:



Найдем коэффициенты ряда Фурье по формулам (2):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 4x dx + \int_0^{\pi} 0 dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(2x^2 \Big|_{-\pi}^0 \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} (0 - 2\pi^2) = -2\pi, \end{aligned}$$

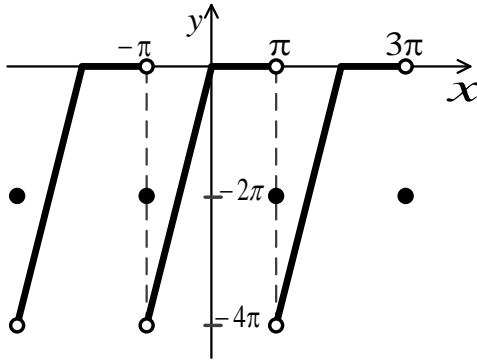
$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 4x \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} 0 \cdot \cos nx \, dx \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 4x \cos nx \, dx = \left. \begin{array}{l} \text{по частям } u = 4x; du = 4dx \\ dv = \cos nx dx; v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(4x \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \frac{1}{n} \sin nx \cdot 4 dx \right) = \\
 &= -\frac{4}{\pi n} \int_{-\pi}^0 \sin nx \, dx = \frac{4}{\pi n^2} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 = \frac{4}{\pi n^2} (1 - \cos \pi n) = \\
 &= \frac{4}{\pi n^2} (1 - (-1)^n),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 4x \sin nx \, dx = \\
 &= \left. \begin{array}{l} u = 4x; du = 4dx \\ dv = \sin nx dx; \\ v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{4x}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{4}{n} \int_{-\pi}^0 \cos nx \, dx \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(-0 + \frac{4(-\pi)}{n} \cos(-\pi n) + \frac{4}{n^2} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 \right) = -\frac{4\pi}{n} \cos \pi n = \\
 &= \frac{4}{\pi} (-1)^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 f(x) &\sim -\frac{2\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{\pi n^2} (1 - (-1)^n) \cos nx + \frac{4}{n} (-1)^{n+1} \sin nx \right) = \\
 &= \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n), \\ -2\pi, & x = \pi + 2\pi n, \end{cases} \quad \text{где } n \in \mathbf{Z}.
 \end{aligned}$$

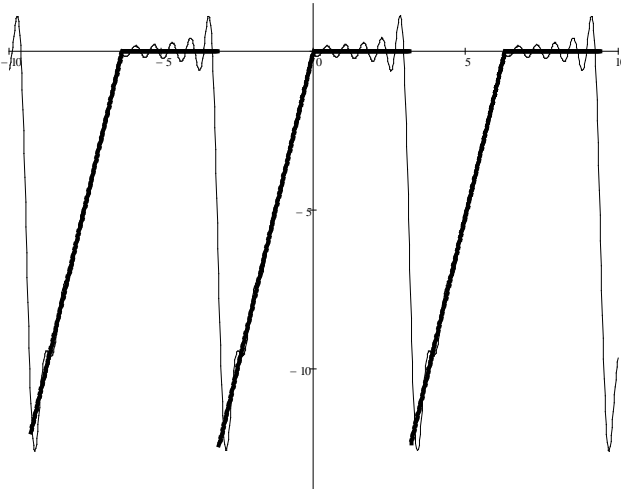
Сумма данного ряда изображена ниже.



Обратите внимание, что значение суммы РФ в точках разрыва функции:

$$S(\pi + 2\pi k) = \frac{f(\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2} = \frac{0 + (-4\pi)}{2} = -2\pi.$$

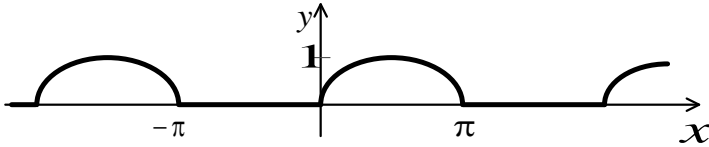
На следующем рисунке изображены функция $y = f(x)$ и частичная сумма ее ряда Фурье $S_{10}(x)$.



Пример 2. Найти разложение в РФ для функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi + 2\pi n; 0 + 2\pi n), \\ \sin x, & x \in [0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n], \end{cases} \text{ где } n \in \mathbf{Z}.$$

◀ График функции имеет вид



Найдем ее коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{1}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos nx dx =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin(x+nx) + \sin(x-nx)) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin x(1+n) + \sin x(1-n)) dx.$$

Если $1-n=0$, т.е. $n=1$, то $\sin x(1-n)=0$, поэтому полу-

чим $a_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x dx = -\frac{1}{4\pi} \cos 2x \Big|_0^{\pi} = 0.$

Если $1-n \neq 0$, т.е. $n \neq 1$, то получим

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin x(1+n) + \sin x(1-n)) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\cos x(1+n)}{1+n} - \frac{\cos x(1-n)}{1-n} \right) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\cos(n+1)\pi}{1+n} + \frac{\cos(n-1)\pi}{n-1} + \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1 - (-1)^{n+1}}{1+n} + \frac{1 + (-1)^{n-1}}{n-1} \right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k - 1 \text{ (} n \text{ — нечетное)}, \\ \frac{-2}{\pi(n^2 - 1)}, & n = 2k - 1 \text{ (} n \text{ — четное)}. \end{cases}$$

Аналогично

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cdot \sin nx \, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos(x - nx) - \cos(x + nx)) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos x(1 - n) - \cos x(1 + n)) \, dx.$$

Если $1 - n = 0$, т.е. $n = 1$, то $\cos x(1 - n) = 1$, поэтому получим $b_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2}$.

Если $1 - n \neq 0$, т.е. $n \neq 1$, то получим

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos x(1 - n) - \cos x(1 + n)) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin x(1 - n)}{1 - n} - \frac{\sin x(1 + n)}{1 + n} \right) \Big|_0^{\pi} = 0.$$

Таким образом, данная функция имеет разложение

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4k^2 - 1} \right) \cos(2kx).$$

Знак равенства можно подставить при всех x , так как данная функция является непрерывной на $(-\infty; +\infty)$. ►

§ 2. Разложение в ряд Фурье 2π -периодических четных и нечетных функций

Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет теореме Дирихле и является четной, то есть $f(-x) = f(x)$. Тогда ее коэффициенты Фурье можно вычислить по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = 0.$$

При этом ряд Фурье четной функции принимает вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx.$$

Такой ряд называется *рядом Фурье по косинусам*.

Если функция $y = f(x)$ является нечетной функцией, то есть $f(-x) = -f(x)$, то ее коэффициенты Фурье можно вычислить по формулам:

$$a_0 = a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

При этом ряд Фурье нечетной функции принимает вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx.$$

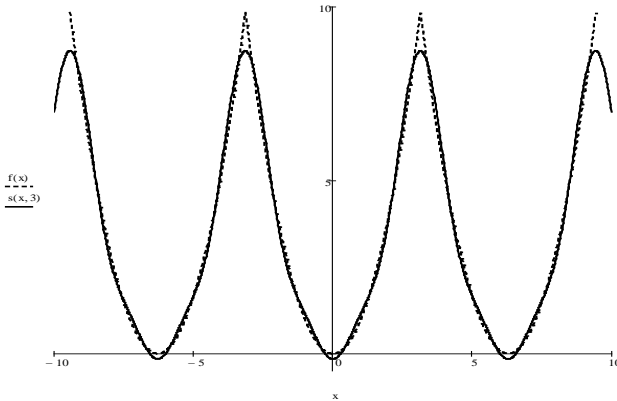
Такой ряд называется *рядом Фурье по синусам*.

Пример 1. Пусть функция $y = f(x)$ является 2π -периодической и удовлетворяет условию $f(x) = x^2$ при $x \in [-\pi; \pi]$. Найти ее разложение в ряд Фурье.

◀ Так как функция четная, то коэффициенты $b_n = 0$. Вычислим $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} u = x^2, \quad du = 2x dx \\ dv = \cos nx dx, \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2 \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right) = \\
 &= -\frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin nx dx, \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| = \\
 &= -\frac{4}{\pi n} \left(-\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{n} \cos nx \right) dx \right) = \\
 &= \frac{4}{\pi n^2} \left(\pi \cos \pi n - \int_0^{\pi} (\cos nx) dx \right) = \frac{4}{n^2} (-1)^n - \frac{4}{\pi n^3} \sin nx \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{n^2} (-1)^n.
 \end{aligned}$$

Тогда разложение параболической функции в ряд Фурье имеет вид $f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx = x^2, x \in [-\pi; \pi]$.



Выше представлены график функции $y = f(x)$ и ее частичная сумма ряда Фурье $S_3(x)$. ►

Замечание. Подставим в ряд $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$

значение $x = 0$. В результате получим $0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}$ или

$$-\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \dots$$

Т.о., используя разложение функций в ряд Фурье, можно находить суммы некоторых числовых рядов. Существуют специальные справочники, например [5], в которых представлены суммы наиболее часто встречающихся при решении практических задач рядов.

Пример 2. Пусть функция $y = f(x)$ является 2π -периодической и удовлетворяет условию $f(x) = x$ при $x \in (-\pi; \pi)$. Найти ее разложение в ряд Фурье.

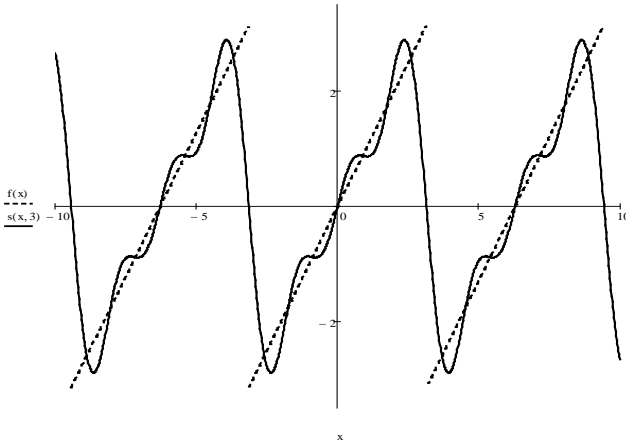
◀ Так как данная функция является нечетной, то $a_0 = a_n = 0$, найдем ее коэффициенты b_n .

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nxdx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = x \sin nxdx, \quad v = \frac{-\cos nx}{n} \end{array} \right| = \frac{2}{\pi} \left(\frac{-x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nxdx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\pi \cos \pi n}{n} + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = -\frac{2\pi}{\pi n} (-1)^n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Подставим найденные коэффициенты в ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \begin{cases} x, & x \in (-\pi; \pi), \\ 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

Ниже изображены функция $y = f(x)$ и ее частичная сумма $S_3(x)$. ▶



§ 3. Общий случай разложения в тригонометрический ряд Фурье

3.1. Разложение в ряд Фурье 2ℓ -периодических функций

Пусть функция $y = f(x)$ является 2ℓ -периодической и интегрируемой на отрезке $[-\ell; \ell]$. Тогда ряд вида

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} \right),$$

где $a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx$, $a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx$,

$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx$, является формальным рядом Фурье для функции $y = f(x)$. Для исследования данного ряда на сходимость применяем теорему Дирихле.

Если при этом $y = f(x)$ – четная функция, то она разлагается в ряд Фурье только по косинусам. То есть $b_n = 0$, а ряд имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{\ell},$$

где $a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) dx$, $a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx$.

Если функция $y = f(x)$ является нечетной, то она разлагается в ряд Фурье только по синусам. То есть $a_0 = a_n = 0$, а ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell},$$

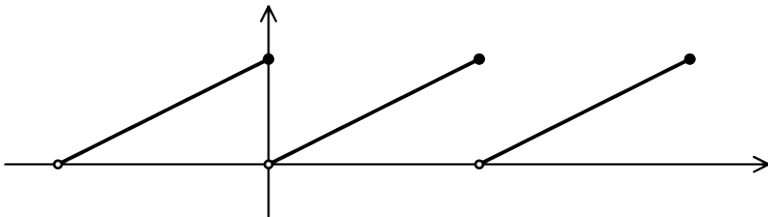
где $b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx$.

Замечание 1. При нахождении коэффициентов Фурье для 2ℓ -периодической функции будет полезно учитывать следующее: если $y = g(x)$ является 2ℓ -периодической функцией и интегрируема на отрезке $[0; 2\ell]$, то

$$\int_0^{2\ell} g(x) dx = \int_{-\ell}^{\ell} g(x) dx = \int_c^{2\ell+c} g(x) dx \text{ для любого } c \in \mathbf{R}.$$

Т.е. при вычислении коэффициентов Фурье можно выбирать любой промежуток длины 2ℓ , результат интегрирования от этого не изменится.

Пример 1. Разложим в ряд Фурье функцию, заданную графически.



◀ Эта функция является периодической с периодом $T = 2\ell = 4$. Поэтому $\ell = 2$. При этом $f(x) = \frac{x}{2}$, если $x \in (0; 4]$. Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = 2,$$

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos \frac{\pi n x}{2} dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 x \sin \frac{\pi n x}{2} dx = -\frac{2}{\pi n}.$$

Т.о., $y = f(x)$ имеет формальный ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} \right) =$$

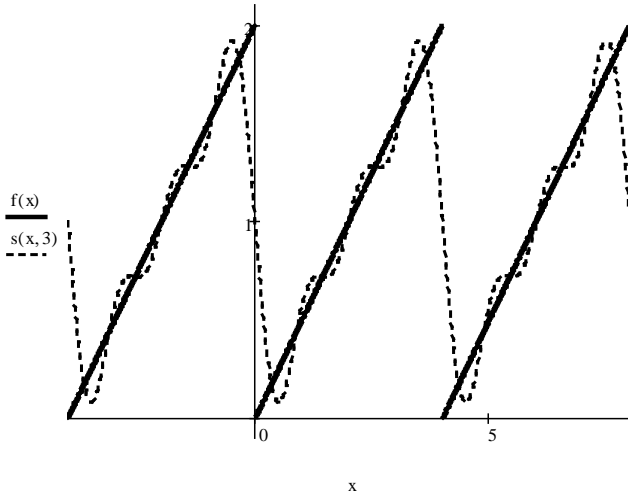
$$= \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(0 \cos \frac{\pi n x}{2} - \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} \right) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2}.$$

Применим теорему Дирихле и получим:

$$f(x) \sim 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in (0, 4), \\ 1, & x = 0, x = 4, \end{cases}$$

т.е. в точках непрерывности функции $y = f(x)$ ряд сходится к этой функции, а в точках разрыва – к

$$\frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{2+0}{2} = 1.$$



Выше представлены график функции $f(x)$ и частичная сумма ряда $S_3(x)$. ►

Замечание 2. Если 2ℓ -периодическая функция $f(x)$ такова, что $f(x) + C$ – нечетная функция (C – некоторое число), то $a_n = 0$ и разложение функции в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell}.$$

Обратите внимание, что данный ряд не является рядом Фурье по синусам, т.к. содержит дополнительное слагаемое $\frac{a_0}{2}$.

3.2. Разложение в ряд Фурье непериодической функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(0; d)$ и удовлетворяет на этом интервале теореме Дирихле, то есть является кусочно-непрерывной и кусочно-монотонной на отрезке $[0; d]$.

Для данной функции можно получить разложение в ряд Фурье: а) по косинусам, б) по синусам и в) общего вида.

а) Чтобы разложить функцию $y = f(x)$ в ряд по косинусам, рассмотрим вспомогательную периодическую функцию с периодом $T = 2d$ такую, что $y = g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0; d), \\ f(-x), & x \in (-d; 0) \end{cases}$. Т.е. продолжим исходную функцию $y = f(x)$ по четности и по периодичности.

Разложим полученную функцию $y = g(x)$ в ряд Фурье. Т.к. она является четной, то $b_n = 0$, для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ найдем

$$\text{дем} \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx, \quad \text{где}$$

$\ell = \frac{T}{2} = d$. Полученный ряд будет сходиться к функции

$y = f(x)$, если $x \in (0; d)$ – точка непрерывности этой функции.

б) Чтобы разложить функцию $y = f(x)$ в ряд по синусам, рассмотрим вспомогательную периодическую функцию с периодом $T = 2d$ такую, что $y = g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0; d), \\ -f(-x), & x \in (-d; 0) \end{cases}$.

Т.е. продолжим исходную функцию $y = f(x)$ по нечетности и по периодичности.

Разложим полученную функцию $y = g(x)$ в ряд Фурье. Так как она является нечетной, то $a_0 = a_n = 0$ и

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx, \quad \text{где} \quad \ell = \frac{T}{2} = d.$$

Полученный ряд будет сходиться к функции $y = f(x)$, если $x \in (0; d)$ – точка непрерывности этой функции.

в) Чтобы получить разложение в ряд Фурье общего вида, для функции $y = f(x)$ рассмотрим вспомогательную периодическую функцию с периодом $T = d$ такую, что $y = g(x) = f(x), x \in (0; d)$. Т.е. продолжим исходную функцию

$y = f(x)$ по периодичности. Разложим полученную функцию $y = g(x)$ в ряд Фурье

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} \right),$$

где $a_0 = \frac{1}{\ell} \int_0^d f(x) dx$, $a_n = \frac{1}{\ell} \int_0^d f(x) \cos \frac{\pi n x}{\ell} dx$,

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_0^d f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell} dx, \quad \ell = \frac{T}{2} = \frac{d}{2}.$$

Полученный ряд будет сходиться к функции $y = f(x)$, если $x \in (0; d)$ – точка непрерывности функции $y = f(x)$.

Замечание 3. Во всех трех случаях в точках разрыва функции $y = f(x)$ ряд Фурье сходится к среднему арифметическому пределов этой функции слева и справа, т.е. к числу $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$.

Пример 2. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} -2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3, & 1 < x < 2 \end{cases}$ в

ряд Фурье: а) по косинусам, б) по синусам, в) общего вида.

◀ **а)** Рассмотрим разложение данной функции по косинусам. Продолжим функцию $y = f(x)$ по четности, а затем по периодичности.

Период полученной функции $T = 2d = 2 \cdot 2 = 4$, следовательно, $\ell = \frac{T}{2} = 2$. Найдем коэффициенты ряда Фурье: $b_n = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (-2x) dx + \int_1^2 3 dx = 2,$$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \int_0^1 (-2x) \cos \frac{\pi n x}{2} dx + \int_1^2 3 \cos \frac{\pi n x}{2} dx =$$

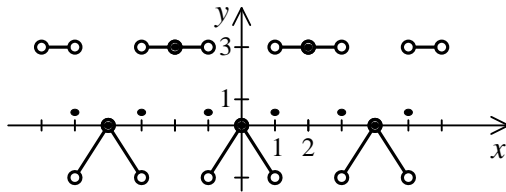
$$= -\frac{10}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{8}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{8}{\pi^2 n^2}.$$

Ряд Фурье функции $y = f(x)$ будет иметь вид

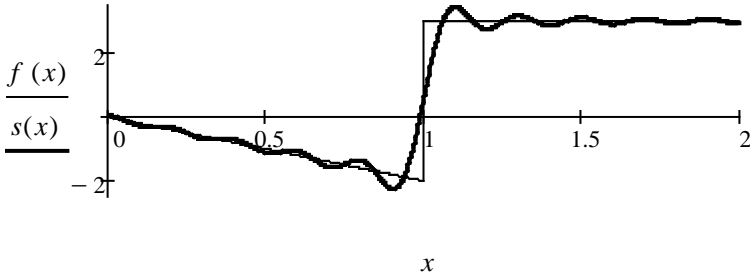
$$f(x) \sim 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{10}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \frac{8}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{8}{\pi^2 n^2} \right) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} -2x, & x \in (0; 1), \\ 3, & x \in (1; 2), \\ 0, & x = 0, \\ 3, & x = 2, \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

Сумма ряда изображена ниже.



На чертеже представлены график функции $f(x)$ и график частичной суммы $S_{20}(x)$ ее ряда Фурье.



б) Рассмотрим разложение $f(x) = \begin{cases} -2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3, & 1 < x < 2 \end{cases}$ по синусам.

Продолжим функцию по нечетности, а затем по периодичности. Период полученной функции $T = 4$, следовательно, $\ell = 2$. Найдем коэффициенты ее ряда Фурье: $a_0 = a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \sin \frac{\pi n x}{2} dx = \int_0^1 (-2x) \sin \frac{\pi n x}{2} dx + \int_1^2 3 \sin \frac{\pi n x}{2} dx =$$

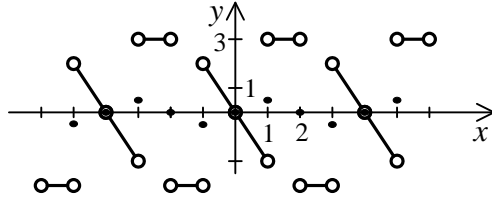
$$= \frac{10}{\pi n} \cos \left(\frac{\pi n}{2} \right) - \frac{8}{\pi^2 n^2} \sin \left(\frac{\pi n}{2} \right) - \frac{6}{\pi n} (-1)^n.$$

Т.о., ряд Фурье будет иметь вид:

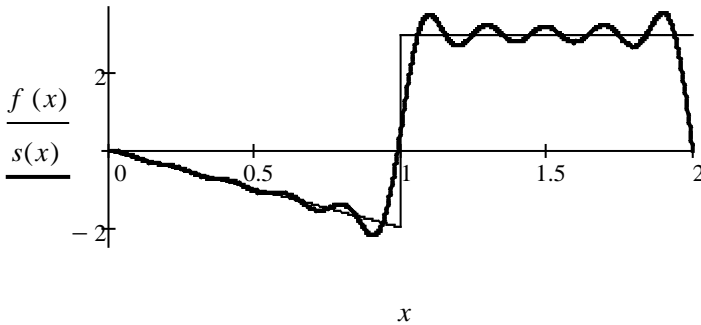
$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{10}{\pi n} \cos \left(\frac{\pi n}{2} \right) - \frac{8}{\pi^2 n^2} \sin \left(\frac{\pi n}{2} \right) - \frac{6}{\pi n} (-1)^n \right) \sin \left(\frac{\pi n}{2} \right) =$$

$$= \begin{cases} -2x, & x \in (0; 1), \\ 3, & x \in (1; 2), \\ 0, & x = 0, x = 2, \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

Сумма ряда изображена ниже.



На чертеже представлены график функции $f(x)$ и график частной суммы $S_{20}(x)$ ряда Фурье.



в) Рассмотрим разложение исходной функции $f(x) = \begin{cases} -2x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3, & 1 < x < 2 \end{cases}$ в ряд Фурье общего вида. Продолжим функцию по периодичности.

Период полученной функции $T = d = 2$, следовательно, $\ell = 1$. Найдем коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (-2x) dx + \int_1^2 3 dx = 2,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1} \int_0^2 f(x) \cos \frac{\pi n x}{1} dx = \int_0^1 (-2x) \cos(\pi n x) dx + \int_1^2 3 \cos(\pi n x) dx = \\ &= \frac{2}{\pi^2 n^2} (1 - (-1)^n), \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{1} \int_0^2 f(x) \sin \frac{\pi n x}{1} dx = \int_0^1 (-2x) \sin(\pi n x) dx + \int_1^2 3 \sin(\pi n x) dx =$$

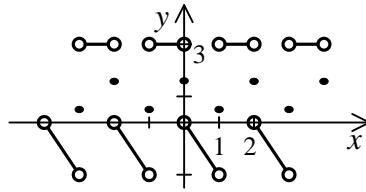
$$= \frac{5(-1)^n - 3}{\pi n}.$$

Ряд Фурье будет иметь вид:

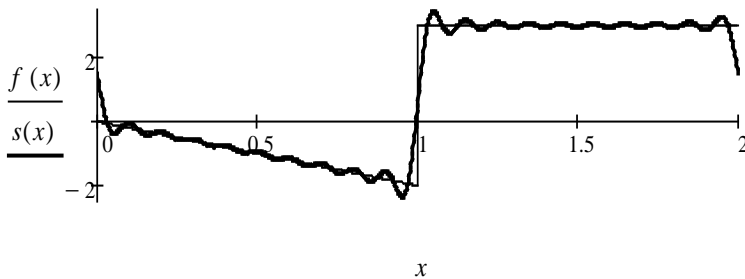
$$f(x) \sim 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi^2 n^2} \cos(\pi n x) + \frac{5(-1)^n - 3}{\pi n} \sin(\pi n x) \right) =$$

$$= \begin{cases} -2x, & x \in (0; 1), \\ 3, & x \in (1; 2), \\ \frac{3}{2}, & x = 0, x = 2, \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

Сумма ряда изображена ниже.



На чертеже представлены график функции $f(x)$ и график частной суммы $S_{20}(x)$ ряда Фурье.



§ 4. Ряд Фурье в комплексной форме

При решении различных задач физики и радиотехники принято записывать тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме, та как она алгебраически проще и более симметрична.

Формулы Эйлера $\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$, $\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$ по-

зволяют выразить тригонометрические функции через показательные функции с комплексным показателем. Поэтому тригонометрический ряд Фурье можно представить в комплексной форме.

Пусть 2ℓ -периодическая функция $y = f(x)$ имеет тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) \right).$$

Т.к. $\cos\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) = \frac{e^{i\frac{\pi n x}{\ell}} + e^{-i\frac{\pi n x}{\ell}}}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) = \frac{e^{i\frac{\pi n x}{\ell}} - e^{-i\frac{\pi n x}{\ell}}}{2i}$,

то

$$\begin{aligned} a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{\ell}\right) &= a_n \frac{e^{i\frac{\pi n x}{\ell}} + e^{-i\frac{\pi n x}{\ell}}}{2} + b_n \frac{e^{i\frac{\pi n x}{\ell}} - e^{-i\frac{\pi n x}{\ell}}}{2i} = \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\frac{\pi n x}{\ell}} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i\frac{\pi n x}{\ell}}. \end{aligned}$$

Введем обозначения $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$.

В результате ряд Фурье функции $y = f(x)$ примет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{\pi n x}{\ell}}. \quad (3)$$

Ряд (3) называется *рядом Фурье* для функции $y = f(x)$ в *комплексной форме*. Коэффициенты ряда Фурье в комплексной форме находят по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i \frac{\pi n x}{\ell}} dx. \quad (4)$$

Вопрос о сходимости ряда Фурье в комплексной форме решается с помощью теоремы Дирихле.

Пример 1. Записать ряд Фурье в комплексной форме для 2π -периодической функции $y = f(x)$ такой, что при $x \in (-\pi; \pi]$ $f(x) = e^{2x}$.

◀ Т.к. функция $y = f(x)$ имеет период $T = 2\pi$, то ее коэффициенты Фурье находятся по формуле (4) при $\ell = \pi$, т.е.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} e^{-i \frac{\pi n x}{\pi}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x - inx} dx = \frac{1}{2\pi(2 - in)} e^{(2-in)x} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi(2 - in)} \left(e^{(2-in)\pi} - e^{-(2-in)\pi} \right) = \frac{1}{2\pi(2 - in)} \left(e^{2\pi} e^{-in\pi} - e^{-2\pi} e^{in\pi} \right), \end{aligned}$$

Т.к. $e^{\pm in\pi} = \cos(\pm n\pi) + i \sin(\pm n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$, то

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi(2 - in)} \left(e^{2\pi} (-1)^n - e^{-2\pi} (-1)^n \right) = \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi(2 - in)} \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2} = \frac{(-1)^n}{\pi(2 - in)} \operatorname{sh}(2\pi). \end{aligned}$$

Ряд Фурье функции $y = f(x)$ будет иметь вид

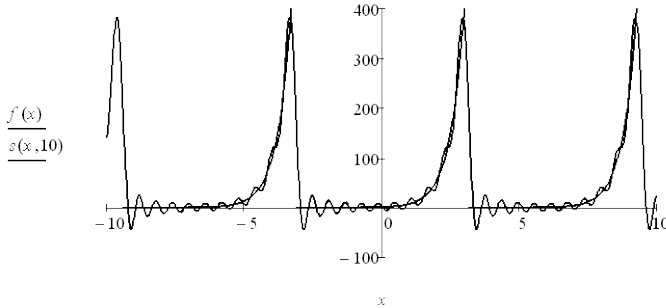
$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(2 - in)} \operatorname{sh}(2\pi) e^{in x} = \frac{\operatorname{sh}(2\pi)}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2 - in)} e^{in x}.$$

Применим к полученному ряду теорему Дирихле

$$\frac{\operatorname{sh}(2\pi)}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2 - in)} e^{in x} = \begin{cases} e^{2x}, & x \in (-\pi; \pi), \\ \frac{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}{2} = \operatorname{ch}(2\pi), & x = \pm\pi. \end{cases}$$

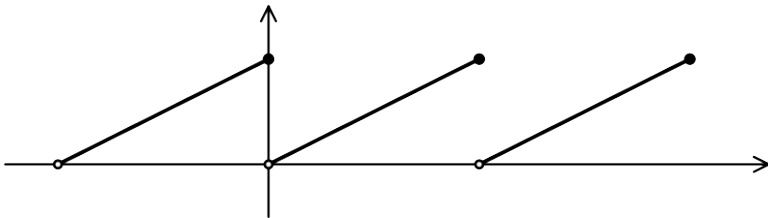
Т.о., в точках непрерывности функции $y = f(x)$ ряд Фурье сходится к этой функции, а в точках разрыва $x = \pi(2m + 1)$, где $m \in \mathbf{Z}$, к числу $\operatorname{ch}(2\pi)$.

Ниже представлены график функции $y = f(x)$ и частичная сумма ее ряда Фурье $S_{10}(x)$.



(Отметим, что частичная сумма ряда Фурье в комплексной форме имеет вид $S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{i \frac{\pi k x}{\ell}}$.) ►

Пример 2. Разложить в ряд Фурье в комплексной форме функцию $y = f(x)$, заданную графически.



◀ Данная функция $y = f(x)$ является периодической с периодом $T = 2\ell = 4$, поэтому $\ell = 2$. При этом $f(x) = \frac{x}{2}$, если

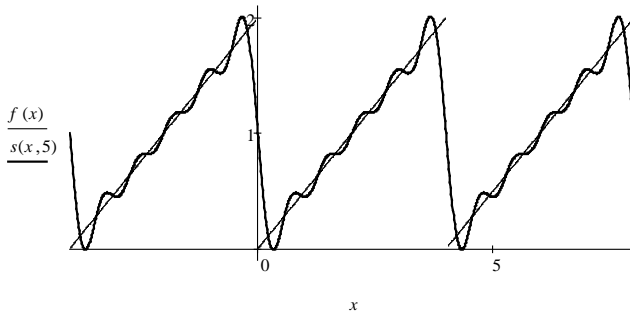
$x \in (0; 4]$. Вычислим ее коэффициенты Фурье: $c_0 = \frac{1}{4} \int_0^4 \frac{x}{2} dx = 1$,

$$c_n = \frac{1}{4} \int_0^4 \frac{x}{2} e^{-i \frac{\pi n x}{2}} dx = [\text{интегрируем по частям}] = \frac{i}{\pi n}.$$

Ряд Фурье для функции $y = f(x)$ имеет вид

$$f(x) \sim 1 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{i}{\pi n} e^{i \frac{\pi n x}{2}} = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in (0; 4), \\ 1, & x = 0, x = 4. \end{cases}$$

Ниже представлены график функции $y = f(x)$ и частичная сумма ее ряда Фурье $S_5(x)$. ►



РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

	Тема	ФАИТУ	ФРТ	ФЭ
1	Операционное исчисление	Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: МГТУ, 2002. Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М., 1971, 1981.	Краснов М.Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М., 1971,1981.	Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1985. Т.2.
2	Числовые и функциональные ряды	Власова Е.А. Ряды. М.: МГТУ, 2006. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1985. Т.2.	Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Вся высшая математика. М.:УРСС, 2000-2001.Т. 3.	Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1985. Т.2.
3	Ряды Фурье	Власова Е.А. Ряды. М.: МГТУ, 2006. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1985. Т.2.	Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Вся высшая математика. М.:УРСС, 2000-2001, Т.3.	Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1985. Т.2.

4	Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы	Гаврилов В.Р., Иванова Б.Б., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. М.: МГТУ, 2003. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1985. Т.2.	Краснов М.Л., Киселев А.И. и др. Вся высшая математика. М.: УРСС, 2000-2001. Т.4.	Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М., 1985. Т.2.
---	--	---	---	--

Дополнительная литература

1. Выгодский М.Я. Справочник по ВМ. 13-е изд. М.: Физ-мат. лит., 1995.
2. Данко П.Е. и др. ВМ в упражнениях и задачах в 2-х частях. М.: Высш. школа, 1996.
3. Зими́на О.В., Кириллов А.И., Сальникова Т.А. Высшая математика (Решебник). М., 2005.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. М., 2006.
5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: 1981.
6. Справочное пособие по ВМ. Т.1,2 / И.И. Ляшко, А.Н. Боярчук и др. М.: УРСС, 1995.
7. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах: учеб. пособие для вузов. В 3 т. СПб., 2003.
8. Опорные конспекты по высшей математике. Часть 2: учеб. пособие / К.В. Бухенский, Н.В. Елкина, Н.Н. Маслова, К.А. Ципоркова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т.–Рязань, 2010.–240 с.