

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МЕЖДУНАРОДНАЯ АКАДЕМИЯ ИНФОРМАТИЗАЦИИ
СОЮЗ МАШИНОСТРОИТЕЛЕЙ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МИНИСТЕРСТВО ПРОМЫШЛЕННОСТИ, ИННОВАЦИОННЫХ
И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ РЯЗАНСКОЙ ОБЛАСТИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ В.Ф. УТКИНА

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИИ

СТНО-2023

**VI МЕЖДУНАРОДНЫЙ НАУЧНО-
ТЕХНИЧЕСКИЙ ФОРУМ**

Сборник трудов

Том 5

Рязань
2023

УДК 004 + 001.1 + 681.2+ 681.2+ 681.3+681.5
С 568

Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2023 [текст]: сб. тр. VI междунар. науч.-техн. форума: в 10 т. Т.5./ под общ. ред. О.В. Миловзорова. – Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2023.

ISBN 978-5-7722-0373-6

Т.1: – 182 с.,: ил.

ISBN 978-5-7722-0378-1

Сборник включает труды участников VI Международного научно-технического форума «Современные технологии в науке и образовании» СТНО-2023.

В сборнике освещаются вопросы математического моделирования, новых технологий в радиотехнике, телекоммуникациях, электротехнике и радиоэлектронике, вопросы полупроводниковой наноэлектроники, приборостроения, лазерной, микроволновой техники, силовой промышленной электроники, новые технологии в измерительной технике и системах, биомедицинских системах, алгоритмическое и программное обеспечение вычислительной техники, вычислительных сетей и комплексов, вопросы систем автоматизированного проектирования, обработки изображений и управления в технических системах, перспективные технологии в машиностроительном и нефтехимическом производствах, новые технологии и методики в высшем образовании, в т.ч. вопросы гуманитарной и физико-математической подготовки студентов, обучения их иностранным языкам, перспективные технологии электронного обучения, в том числе, дистанционного, вопросы экономики, управления предприятиями и персоналом, менеджмента, а также вопросы гуманитарной сферы.

Авторская позиция и стилистические особенности сохранены.

УДК 004 + 001.1 + 681.2+ 681.2+ 681.3+681.5

ISBN 978-5-7722-0373-6

ISBN 978-5-7722-0378-1

© Рязанский государственный
радиотехнический университет, 2023

ИНФОРМАЦИЯ О VI МЕЖДУНАРОДНОМ ФОРУМЕ «СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИИ» СТНО-2023

VI Международный научно-технический форум «Современные технологии в науке и образовании» СТНО-2023 состоялся 01.03.2022-03.03.2022 в г. Рязань в Рязанском государственном радиотехническом университете имени В.Ф. Уткина.

В рамках форума «Современные технологии в науке и образовании» СТНО-2023 состоялась работа четырех Международных научно-технических конференций:

«Современные технологии в науке и образовании. Радиотехника и электроника», секции

- Радиотехнические системы и устройства;
- Телекоммуникационные системы и устройства;
- Цифровые информационные технологии реального времени;
- Промышленная силовая электроника, электроэнергетика и электроснабжение;
- Физика полупроводников, микро- и наноэлектроника;
- Микроволновая, оптическая и квантовая электроника;
- Актуальные задачи химических технологий;

«Современные технологии в науке и образовании. Вычислительная техника и автоматизированные системы», секции

- Алгоритмическое и программное обеспечение вычислительных систем и сетей;
- ЭВМ и системы;
- Информационные технологии в конструировании электронных средств;
- Модели искусственного интеллекта в САПР;
- Информационные системы и защита информации;
- Математические методы в научных исследованиях;
- Обработка данных, изображений и управление в технических системах;
- Геоинформационные и космические технологии;
- Автоматизация производственно-технологических процессов в приборо- и машиностроении;
- Информационно-измерительные устройства и системы в технике и медицине.
- Стандартизация и управление качеством;
- Информационные системы и технологии;

«Современные технологии в науке и образовании. Экономика и управление», секции;

- Современные технологии государственного и муниципального управления;
- Экономика, менеджмент и организация производства;
- Бухгалтерский учет, анализ и аудит;
- Экономическая безопасность;
- Внешнеэкономическая деятельность;

«Современные технологии в науке и образовании. Новые технологии и методы в высшем образовании», секции

- Современные технологии электронного обучения;
- Иностранный язык в техническом вузе;
- Лингвистика и межкультурная коммуникация;
- Направления и формы гуманитаризации высшего образования и гуманитарная подготовка студентов;
- Методы преподавания и организация учебного процесса в вузе;
- Физико-математическая подготовка студентов;
- Особенности военного образования на современном этапе.

Организационный комитет Форума:

Чиркин М.В., ректор, д.ф.-м.н., проф. – председатель

Гусев С.И., проректор по научной работе и инновациям, д.т.н., проф. – зам. председателя;

Корячко А.В., проректор по учебной работе, к.т.н., доц. – зам. председателя;

Миловзоров О.В., зам. начальника управления организации научных исследований, к.т.н., доц. – координатор, главный редактор сборника трудов Форума;

Миронов В.В., ответственный редактор сборника трудов Форума;

Устинова Л.С., начальник отдела информационного обеспечения – отв. за информационную поддержку;

Трубицына С.Г., вед. инженер – секретарь оргкомитета;

Благодарова И.А., ведущий программист – секретарь оргкомитета;

члены оргкомитета:

Бабаян П.В., зав. кафедрой автоматизации и информационных технологий в управлении, к.т.н., доц.;

Бухенский К.В., зав. кафедрой высшей математики, к.ф.-м.н., доц.;

Витязев В.В., зав. кафедрой телекоммуникаций и основ радиотехники, д.т.н., проф.;

Губарев А.В., доцент кафедры информационно-измерительной и биомедицинской техники, к.т.н., доц.;

Дмитриев В.Т., зав. кафедрой радиоуправления и связи, к.т.н., доц.;

Евдокимова Е.Н., зав. кафедрой экономики, менеджмента и организации производства, д.э.н., проф.;

Еремеев В.В., директор НИИ «Фотон», д.т.н., проф.;

Есенина Н.Е., зав. кафедрой иностранных языков, к.п.н., доц.;

Жулев В.И., зав. кафедрой информационно-измерительной и биомедицинской техники, д.т.н., проф.;

Карпунина Е.В., доцент кафедры экономической безопасности, анализа и учета, к.э.н., доц.;

Клейносова Н.П., директор центра дистанционного обучения, к.п.н., доц.;

Ключко В.К., профессор кафедры автоматизации и информационных технологий в управлении, д.т.н., проф.;

Коваленко В.В., зав. кафедрой химической технологии, к.т.н., доц.;

Корячко В.П., зав. кафедрой систем автоматизированного проектирования вычислительных средств, д.т.н., проф.;

Костров Б.В., зав. кафедрой электронных вычислительных машин, д.т.н., проф.;

Кошелев В.И., зав. кафедрой радиотехнических систем, д.т.н., проф.;

Крошила С.В., доцент кафедры вычислительной и прикладной математики, к.т.н., доц.;

Круглов С.А., зав. кафедрой промышленной электроники, д.т.н., доц.;

Куприна О.Г., доцент кафедры иностранных языков, к.филол.н., доц.;

Ленков М.В., зав. кафедрой автоматизации информационных и технологических процессов, к.т.н., доц.

Литвинов В.Г., зав. кафедрой микро- и наноэлектроники, д.ф.-м.н., доц.;

Лукиянова Г.С., доцент кафедры высшей математики, к.ф.-м.н., доц.;

Мельник О.В., профессор кафедры информационно-измерительной и биомедицинской техники, д.т.н., доц.;

Митрошин А.А., доцент кафедры систем автоматизированного проектирования вычислительных средств, к.т.н., доц.;

Овечкин Г.В., зав. кафедрой вычислительной и прикладной математики, д.т.н., проф.;

Паршин Ю.Н., зав. кафедрой радиотехнических устройств, д.т.н., проф.;

Перфильев С.В., зав. кафедрой государственного, муниципального и корпоративного управления, д.э.н., проф.;

Подгорнова Н.А., доцент кафедры государственного, муниципального и корпоративного управления, к.э.н., доц.;

Пржегорлинский В.Н., зав. кафедрой информационной безопасности, к.т.н., доц.;

Пылькин А.Н., профессор кафедры вычислительной и прикладной математики, д.т.н., проф.;

Рохлина Т.А., доцент кафедры иностранных языков, к.филол.н., доц.;

Сапрыкин А.Н., доцент кафедры систем автоматизированного проектирования вычислительных средств, к.т.н., доц.;

Семенов А.Р., ст.преподаватель кафедры химической технологии, к.ф.-м.н.;

Серебряков А.Е., зам. зав. кафедрой электронных приборов, к.т.н.;

Скрипкина О.В. доцент кафедры экономической безопасности, анализа и учета, к.э.н., доц.;

Соколов А.С., зав. кафедрой истории, философии и права, д.и.н.;

Таганов А.И., профессор кафедры космических технологий, д.т.н., проф.;

Тарасова В.Ю., ассистент кафедры электронных вычислительных машин, магистр;

Харитонов А.Ю., нач. военного учебного центра, полковник, к.т.н., доц.;

Холопов С.И., декан ф-та автоматики и информационных технологий в управлении, зав. кафедрой автоматизированных систем управления, к.т.н., доц.;

Чеглакова С.Г., зав. кафедрой экономической безопасности, анализа и учета, д.э.н., проф.;

Челебаев С.В., доцент кафедры автоматизированных систем управления, к.т.н., доц.

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИИ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ»

СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ»

УДК 510.644; ГРНТИ 27.03.33

ОЦЕНКА ПОЛНОЙ НЕЧЕТКОЙ РЕГРЕССИИ ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ LR-ТИПА С АНАЛИТИЧЕСКИ ОБРАТИМЫМИ ФУНКЦИЯМИ ФОРМЫ

К.В. Бухенский, А.Н. Конюхов, А.Б. Дюбуа, С.С. Сёмина

Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, chronos@bk.ru

Аннотация. Выведены аналитические формулы для LR-коэффициентов однофакторной модели полной нечеткой регрессии (ПНР), включая функции формы. Методика расчетов – метод наименьших квадратов (МНК) применительно к α -сечениям положительных унимодальных нечетких чисел (НЧ) с произвольными аналитически обратимыми функциями формы. Описана область применимости полученных формул, высказаны предложения по совершенствованию методики оценки.

Ключевые слова: нечеткое множество, нечеткое число LR-типа, функция принадлежности, функция формы, α -сечение, полная нечеткая регрессия, метод наименьших квадратов.

FULLY FUZZY REGRESSION ESTIMATION FOR POSITIVE LR-TYPE NUMBERS HAVING ANALYTICALLY INVERTIBLE FORM FUNCTIONS

K.V. Bukhensky, A.N. Konyukhov, A.B. Dubois, S.S. Semina

Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, chronos@bk.ru

Abstract. Analytical formulas for LR-coefficients (including form functions) of fully fuzzy regression model are derived. The calculations are based upon ordinary least squares (OLS) applied to α -cuts of positive unimodal LR-type fuzzy numbers (FNs) having arbitrary analytically invertible form functions. The formulas limitations are discussed as well as possible ways of improvement the estimation technique.

Keywords: fuzzy set, LR-type fuzzy number, membership function, shape function, α -cut, fully fuzzy regression, ordinary least squares.

Модель нечеткой регрессии применяется во многих прикладных задачах: нечеткой классификации, распознавания образов и др., а также в тех случаях, когда использование классической регрессии не приводит к удовлетворительным результатам (малая выборка, сложности с предположениями о спецификации модели и пр.) [1].

Известно, что классическая регрессионная модель оперирует случайными величинами, в силу чего именно стохастическая неопределенность (неопределенность I рода) определяет особенности построения и анализа классической регрессии. В то же время можно привести немало примеров, когда регрессоры и (или) зависимые величины характеризуются в значительной мере так называемой неопределенностью II рода, например, когда эмпирическая база формируется на основе субъективных суждений. Если неопределенность II рода превалирует, может оказаться целесообразным построение модели нечеткой регрессии.

С основными понятиями теории нечетких множеств, используемыми в данном материале, можно ознакомиться в разнообразных источниках [2-3].

В самом общем виде на выборке из n нечетких пар $(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j)$ может быть сформулирована модель полной нечеткой регрессии (ПНР)

$$\tilde{y}_j = \tilde{a}_0 \oplus \tilde{a}_1 \odot \tilde{x}_j \oplus \tilde{e}_j, \quad (1)$$

где все величины – суть нечеткие числа (НЧ):

$\tilde{x}_j$ – значения регрессора,

$\tilde{y}_j$ – значения зависимой переменной ($j = \overline{1, n}$);

$\tilde{a}_0, \tilde{a}_1$ – нечеткие коэффициенты;

$\oplus, \odot$ – операции сложения и умножения НЧ в смысле принципа обобщения Заде [3];

$\tilde{e}_j$ – остаток регрессии (можно показать, что это также НЧ).

С нашей точки зрения сама концепция ПНР коренным образом отличается от классической регрессии: это функционально представленная «наилучшая» в смысле заданных критериев взаимосвязь между нечеткими множествами (НМ). При этом видоизменяется и сама задача нечеткого регрессионного анализа: теперь необходимо установить зависимость между функциями принадлежности НМ – регрессоров и зависимых переменных. Поэтому в более широком понимании ПНР может рассматриваться как принципиально новая модель, а не модернизация обычной регрессии (в узком смысле).

ПНР является наименее изученной в классе разнообразных моделей частично нечетких регрессий [4]. В качестве одной из причин по не столь широкому ее использованию является нелинейность, возникающая при умножении нечеткого коэффициента $\tilde{a}_1$ на нечеткий регрессор $\tilde{x}$. Тем не менее, все остальные модели так или иначе являются более простыми частными случаями ПНР. Подходы, применяемые к оценке параметров нечеткой регрессии также многообразны: начиная от метода наименьших квадратов (МНК) и минимизации нечеткости остатков, заканчивая нейро-нечеткими и генетическими алгоритмами. Вместе с тем, в подавляющем большинстве исследований применяются треугольные НЧ. Мы поставим задачу аналитической оценки коэффициентов ПНР для случая произвольных аналитически обратимых функций формы исходных нечетких данных, заданных унимодальными НЧ LR-типа. При этом один из критериев – максимальное соответствие формы функции принадлежности расчетного значения и фактического.

Пусть имеется выборка пар НЧ «нечеткий регрессор – нечеткий отклик» объема n с функциями принадлежности (ФП) $(\mu_{\tilde{x}_j}(z), \mu_{\tilde{y}_j}(z))$, представленных в LR-форме, т.е.

$$\mu_{LR}(z) = [m_1, m_2, ls, rs]_{LR}(z) = \begin{cases} L\left(\frac{m_1 - z}{ls}\right), & \text{если } m_1 - ls \leq z < m_1, \\ 1, & \text{если } m_1 \leq z \leq m_2, \\ R\left(\frac{z - m_2}{rs}\right), & \text{если } m_2 < z \leq m_2 + rs, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2)$$

где $z \in U$ – универсум на котором заданы НЧ;

$m_1 \leq z \leq m_2$ – ядро НЧ;

$ls > 0$ и $rs > 0$ – левый и правый спрэды НЧ;

$L(t), R(t): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ – левая и правая функции формы (ФФ), т.е. непрерывные убывающие функции на отрезке, такие что $R(0) = L(0) = 1$ и $R(1) = L(1) = 0$, [3].

При $m_1 = m_2 = m$ получаются унимодальные НЧ, которыми мы и будем оперировать далее.

Аргументы ФП будем опускать, а само обозначение НЧ будем отождествлять с его ФП. Применяем декомпозицию исходного НМ на совокупность α -сечений, являющихся обычными отрезками действительной числовой оси: если имеется НМ $\tilde{A}$, то $\tilde{A} = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$, где сечение уровня α есть $A_{\alpha} = \{z \in U \mid \mu_{\tilde{A}}(z) \geq \alpha\}$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Запишем α -сечения при $0 \leq \alpha \leq 1$ всех исходных данных модели (нижнее подчеркивание обозначает левый конец, а верхнее подчеркивание – правый конец упорядоченного четкого отрезка):

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_j)_{\alpha} &= [\underline{x}_{j\alpha}, \overline{x}_{j\alpha}] = [mx_j - lxx_j Lx_j^{-1}(\alpha), mx_j + rsx_j Rx_j^{-1}(\alpha)], \\ (\tilde{y}_j)_{\alpha} &= [\underline{y}_{j\alpha}, \overline{y}_{j\alpha}] = [my_j - lyy_j Ly_j^{-1}(\alpha), my_j + ryy_j Ry_j^{-1}(\alpha)], \end{aligned} \quad (3)$$

а также нечетких коэффициентов ПНР:

$$\begin{aligned} (\tilde{a}_0)_{\alpha} &= [\underline{a}_{0\alpha}, \overline{a}_{0\alpha}] = [ma_0 - lsa_0 La_0^{-1}(\alpha), ma_0 + rsa_0 Ra_0^{-1}(\alpha)], \\ (\tilde{a}_1)_{\alpha} &= [\underline{a}_{1\alpha}, \overline{a}_{1\alpha}] = [ma_1 - lsa_1 La_1^{-1}(\alpha), ma_1 + rsa_1 Ra_1^{-1}(\alpha)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что сечения нечетких коэффициентов регрессии пока неизвестны, причем неизвестны не только сами структурные параметры – моды и спреды $ma_0, lsa_0, rsa_0, ma_1, lsa_1, rsa_1$, но и ФФ нечетких коэффициентов $La_0^{-1}(\alpha), Ra_0^{-1}(\alpha), La_1^{-1}(\alpha)$ и $Ra_1^{-1}(\alpha)$. Можно лишь утверждать, что параметры ПНР являются нечеткими числами LR-типа в силу известных свойств арифметических операций над отрезками действительной числовой оси, определения НЧ и НЧ LR-типа, в частности [2, 3].

Произвольное сечение расчетного значения зависимой переменной $\tilde{y}_j^*$ в соответствии с правилами интервальной арифметики будет:

$$(\tilde{y}_j^*)_{\alpha} = (\tilde{a}_0)_{\alpha} + (\tilde{a}_1 \odot \tilde{x}_j)_{\alpha} = [\underline{a}_{0\alpha} + \underline{P}_{j\alpha}, \overline{a}_{0\alpha} + \overline{P}_{j\alpha}], \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \underline{P}_{j\alpha} &= \min(\underline{a}_{1\alpha} \cdot \underline{x}_{j\alpha}, \underline{a}_{1\alpha} \cdot \overline{x}_{j\alpha}, \overline{a}_{1\alpha} \cdot \underline{x}_{j\alpha}, \overline{a}_{1\alpha} \cdot \overline{x}_{j\alpha}), \\ \overline{P}_{j\alpha} &= \max(\underline{a}_{1\alpha} \cdot \underline{x}_{j\alpha}, \underline{a}_{1\alpha} \cdot \overline{x}_{j\alpha}, \overline{a}_{1\alpha} \cdot \underline{x}_{j\alpha}, \overline{a}_{1\alpha} \cdot \overline{x}_{j\alpha}). \end{aligned} \quad (6)$$

В качестве критерия использовали взвешенный по сечениям при помощи $w(\alpha)$ функционал, поставив задачу оптимизации следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_0^1 \left[\left((\tilde{y}_j^*)_{\alpha} - (\tilde{y}_j)_{\alpha} \right)^2 + \left((\tilde{y}_j^*)_{\alpha} - (\tilde{y}_j)_{\alpha} \right)^2 \right] w(\alpha) d\alpha \rightarrow \min, \\ \int_0^1 w(\alpha) d\alpha = 1, \\ w(1) = w(0) = 1 = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} w(\alpha), \\ lsa_0 > 0, \quad rsa_0 > 0, \quad lsa_1 > 0, \quad rsa_1 > 0. \end{cases} \quad (7)$$

О выборе весовой функции $w(\alpha)$. Краевые единичные значения необходимы для нахождения структурных параметров коэффициентов ПНР обычным МНК, в то же время максимальный вес может соответствовать элементам с наименьшей нечеткостью (это носитель НЧ и его мода). Минимальное значение можно назначить наиболее нечеткому 0,5-сечению. Нормировка необходима для сопоставления результатов минимизации при различных вариантах $w(\alpha)$. Перечисленным выше требованиям, например, удовлетворяют функции $w(\alpha) = 3(2\alpha - 1)^2$ или $w(\alpha) = 2|2\alpha - 1|$. В качестве простейшего варианта можно принять $w(\alpha) = 1$, когда все α -сечения полагают равноправными.

Структурные параметры $ma_0, lsa_0, rsa_0, ma_1, lsa_1, rsa_1$ определяем из (7) при $\alpha=0$ и $\alpha=1$. Для простоты рассуждений, предположим, что все эмпирические НЧ, включая нечеткий коэффициент $\tilde{a}_1$, (заметим, что коэффициенты неизвестны *a priori*), имеют носители на $\mathbb{R}^+$. Тогда координата левого конца α -сечения расчетного значения (для правого рассуждения аналогичны) будет

$$\begin{aligned} (\tilde{y}_j^*)_{\alpha} &= ma_0 - lsa_0 La_0^{-1}(\alpha) + (ma_1 - lsa_1 La_1^{-1}(\alpha)) \cdot (mx_j - lxs_j Lx_j^{-1}(\alpha)) = \\ &= ma_0 + ma_1 mx_j - lsa_0 La_0^{-1}(\alpha) - ma_1 lxs_j Lx_j^{-1}(\alpha) - lsa_1 mx_j La_1^{-1}(\alpha) + lsa_1 lxs_j Lx_j^{-1}(\alpha) La_1^{-1}(\alpha). \end{aligned} \quad (8)$$

Соответственно

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left((\tilde{y}_j^*)_{\alpha} - (\tilde{y}_j)_{\alpha} \right)^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(ma_0 + ma_1 mx_j - lsa_0 La_0^{-1}(\alpha) - ma_1 lxs_j Lx_j^{-1}(\alpha) - \right. \\ &\quad \left. - lsa_1 mx_j La_1^{-1}(\alpha) + lsa_1 lxs_j Lx_j^{-1}(\alpha) La_1^{-1}(\alpha) - my_j + lsy_j Ly_j^{-1}(\alpha) \right)^2 \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (7) с учетом (9) при $\alpha=1$ получаем обычную оценку МНК для модальных параметров нечетких коэффициентов $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1$:

$$ma_1 = \frac{\text{cov}(mx, my)}{\sigma^2(mx)}; \quad ma_0 = \langle my \rangle - ma_1 \langle mx \rangle, \quad (10)$$

где $\text{cov}(mx, my)$ – ковариация векторов mx, my ;

$\sigma^2(mx) = \text{cov}(mx, mx)$ – дисперсия вектора mx ;

$\langle my \rangle$ – среднее арифметическое значение компонент my_j вектора my . Стандартное обозначение вектора не применяем для удобочитаемости формул.

Минимизация (7) при $\alpha=0$, очевидно, даст оценку МНК для векторов соответственных пар левых $(mx_j - lxs_j, my_j - lsy_j)$ и пар правых $(mx_j + rsx_j, my_j + rsy_j)$ крайних точек носителей НЧ-регрессора и зависимой переменной соответственно:

$$lsa_1 = ma_1 - \frac{\text{cov}(mx - lxs, my - lsy)}{\sigma^2(mx - lxs)}; \quad lsa_0 = \langle lsy \rangle - ma_1 \langle lxs \rangle - lsa_1 \langle mx - lxs \rangle, \quad (11)$$

$$rsa_1 = -ma_1 + \frac{\text{cov}(mx + rsx, my + rsy)}{\sigma^2(mx + rsx)}; \quad rsa_0 = \langle rsy \rangle - ma_1 \langle rsx \rangle - rsa_1 \langle mx + rsx \rangle. \quad (12)$$

Теперь, имея известные структурные параметры нечетких коэффициентов $ma_0, lsa_0, rsa_0, ma_1, lsa_1, rsa_1$, минимизируем функционал

$$\begin{aligned} & \Phi(La_0^{-1}(\alpha), Ra_0^{-1}(\alpha), La_1^{-1}(\alpha), Ra_1^{-1}(\alpha), \alpha) = \\ & = \sum_{j=1}^n \int_0^1 \left(\left(\underline{(\tilde{y}_j^*)}_\alpha - \underline{(\tilde{y}_j)}_\alpha \right)^2 + \left(\overline{(\tilde{y}_j^*)}_\alpha - \overline{(\tilde{y}_j)}_\alpha \right)^2 \right) w(\alpha) d\alpha, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\underline{(\tilde{y}_j^*)}_\alpha = \underline{f}_j(La_0^{-1}(\alpha), La_1^{-1}(\alpha), \alpha)$; $\overline{(\tilde{y}_j^*)}_\alpha = \overline{f}_j(Ra_0^{-1}(\alpha), Ra_1^{-1}(\alpha), \alpha)$ – суть расчетные значения α -сечений зависимой переменной.

В соответствии с уравнением Эйлера обратные функции формы нечетких коэффициентов ПНР можно определить из двух независимых систем уравнений

$$\frac{\partial}{\partial(La_k^{-1})} \sum_{j=1}^n \left(\underline{(\tilde{y}_j^*)}_\alpha - \underline{(\tilde{y}_j)}_\alpha \right)^2 = 0; \quad \frac{\partial}{\partial(Ra_k^{-1})} \sum_{j=1}^n \left(\overline{(\tilde{y}_j^*)}_\alpha - \overline{(\tilde{y}_j)}_\alpha \right)^2 = 0, \quad k = 0, 1. \quad (14)$$

Заметим, что результат при таком подходе не зависит от весовой функции $w(\alpha)$. Она играет лишь роль в обеспечении граничных условий. Проще говоря, (14) есть не что иное, как оценка МНК для произвольных α -сечений, поэтому решение (14) легко выписать, обобщая соотношения (10)-(12):

$$\begin{aligned} La_1^{-1}(\alpha) &= \frac{1}{lsa_1} \left[ma_1 - \frac{\text{cov}(mx_j - lxx_j Lx_j^{-1}(\alpha), my_j - lyy_j Ly_j^{-1}(\alpha))}{\sigma^2(mx_j - lxx_j Lx_j^{-1}(\alpha))} \right], \\ Ra_1^{-1}(\alpha) &= \frac{1}{rsa_1} \left[-ma_1 + \frac{\text{cov}(mx_j + rsx_j Rx_j^{-1}(\alpha), my_j + rsy_j Ry_j^{-1}(\alpha))}{\sigma^2(mx_j + rsx_j Rx_j^{-1}(\alpha))} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} La_0^{-1}(\alpha) &= \frac{1}{lsa_0} \left[\langle lyy_j Ly_j^{-1}(\alpha) \rangle - ma_1 \langle lxx_j Lx_j^{-1}(\alpha) \rangle - lsa_1 La_1^{-1}(\alpha) \langle mx_j - lxx_j Lx_j^{-1}(\alpha) \rangle \right], \\ Ra_0^{-1}(\alpha) &= \frac{1}{rsa_0} \left[\langle ryy_j Ry_j^{-1}(\alpha) \rangle - ma_1 \langle rsx_j Rx_j^{-1}(\alpha) \rangle - rsa_1 Ra_1^{-1}(\alpha) \langle mx_j + rsx_j Rx_j^{-1}(\alpha) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

В общем виде, очевидно, такую систему возможно решать только численно. Однако, если принять, что ФФ различных значений регрессора одинаковы $Lx_j^{-1}(\alpha) = Lx^{-1}(\alpha)$, $Rx_j^{-1}(\alpha) = Rx^{-1}(\alpha)$, причем также и для зависимой переменной $Ly_j^{-1}(\alpha) = Ly^{-1}(\alpha)$, $Ry_j^{-1}(\alpha) = Ry^{-1}(\alpha)$, то формулы (15)-(16) примут вид:

$$\begin{aligned} La_1^{-1}(\alpha) &= \frac{1}{lsa_1} \left[ma_1 - \frac{\text{cov}(mx - lxx Lx^{-1}(\alpha), my - lyy Ly^{-1}(\alpha))}{\sigma^2(mx - lxx Lx^{-1}(\alpha))} \right], \\ Ra_1^{-1}(\alpha) &= \frac{1}{rsa_1} \left[-ma_1 + \frac{\text{cov}(mx + rsx Rx^{-1}(\alpha), my + rsy Ry^{-1}(\alpha))}{\sigma^2(mx + rsx Rx^{-1}(\alpha))} \right], \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} La_0^{-1}(\alpha) &= \frac{1}{lsa_0} \left[\langle lyy Ly^{-1}(\alpha) \rangle - ma_1 \langle lxx Lx^{-1}(\alpha) \rangle - lsa_1 La_1^{-1}(\alpha) \langle mx - lxx Lx^{-1}(\alpha) \rangle \right], \\ Ra_0^{-1}(\alpha) &= \frac{1}{rsa_0} \left[\langle ryy Ry^{-1}(\alpha) \rangle - ma_1 \langle rsx Rx^{-1}(\alpha) \rangle - rsa_1 Ra_1^{-1}(\alpha) \langle mx + rsx Rx^{-1}(\alpha) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

В развернутом виде формулы (17) расписываются с помощью элементов матрицы ковариаций, например первая примет вид

$$La_1^{-1}(\alpha) = \frac{1}{lsa_1} \left[ma_1 - \frac{\text{cov}(mx, my) - \text{cov}(lsx, my)Lx^{-1}(\alpha) - (\text{cov}(lsy, mx) - \text{cov}(lsx, lsy)Lx^{-1}(\alpha))Ly^{-1}(\alpha)}{\text{cov}(mx, mx) - 2\text{cov}(lsx, mx)Lx^{-1}(\alpha) + \text{cov}(lsx, lsx)(Lx^{-1}(\alpha))^2} \right]. \quad (19)$$

Таким образом решение поставленной задачи представлено в виде комплекса аналитических соотношений: сначала по формулам (10)-(12) определяются структурные параметры коэффициентов ПНР $ma_0, lsa_0, rsa_0, ma_1, lsa_1, rsa_1$, затем по формулам (17)-(18) определяются обратные ФФ этих нечетких коэффициентов.

Для построения прогноза нет необходимости обращать ФФ коэффициентов ПНР. Значительно удобнее получить прогноз в форме совокупности α -сечений:

$$\begin{cases} \left(\tilde{y}^* \right)_\alpha (mx^*, lsx^*, \alpha) = ma_0 - lsa_0 La_0^{-1}(\alpha) + (ma_1 - lsa_1 La_1^{-1}(\alpha))(mx^* - lsx^* Lx^{-1}(\alpha)) \\ \left(\tilde{y}^* \right)_\alpha (mx^*, rsx^*, \alpha) = ma_0 + rsa_0 Ra_0^{-1}(\alpha) + (ma_1 + rsa_1 Ra_1^{-1}(\alpha))(mx^* + rsx^* Rx^{-1}(\alpha)), \end{cases} \quad (20)$$

где mx^*, lsx^*, rsx^* – структурные параметры прогнозного значения LR-регрессора с ФФ $Lx(t)$ и $Rx(t)$; соответственно обратные ФФ регрессора – $Lx^{-1}(\alpha)$ и $Rx^{-1}(\alpha)$.

Теперь о проблемах, связанных с использованием данного подхода. В (8) и далее мы предполагали (*a priori*), что коэффициент $\tilde{a}_1$ ПНР является положительным НЧ. Очевидно, вполне возможны ситуации, когда *a posteriori* это оказывается не так. Применение МНК в таком случае приводит к появлению отрицательных или нулевых спредов. Поэтому необходимо в рамках данной статьи дополнить комплекс формул условиями их применимости.

Обозначим

$$\underline{a}_1 = \frac{\text{cov}(mx - lsx, my - lsy)}{\sigma^2(mx - lsx)}, \quad \bar{a}_1 = \frac{\text{cov}(mx + rsx, my + rsy)}{\sigma^2(mx + rsx)}. \quad (21)$$

Тогда условие положительности спредов коэффициента $\tilde{a}_1$

$$\underline{a}_1 < ma_1 < \bar{a}_1. \quad (22)$$

Геометрически это означает, что угловой коэффициент ma_1 обычной линейной регрессии, построенный по модальным точкам (mx_j, my_j) больше углового коэффициента регрессии $\underline{a}_1$ для левых границ носителей регрессора и зависимой НЧ $(mx_j - lsx_j, my_j - lsy_j)$ и меньше такового для правых границ $(mx_j + rsx_j, my_j + rsy_j)$. В совокупности с требованием положительности спредов коэффициента $\tilde{a}_0$, получим условия применимости выведенных формул, которые можно проверить *a priori* по выборке:

$$\begin{cases} \underline{a}_1 < ma_1 < \bar{a}_1; \\ \bar{a}_1 \left(1 + \frac{\langle rsx \rangle}{\langle mx \rangle} \right) - \frac{\langle rsy \rangle}{\langle mx \rangle} < ma_1 < \underline{a}_1 \left(1 - \frac{\langle lsx \rangle}{\langle mx \rangle} \right) + \frac{\langle lsy \rangle}{\langle mx \rangle}. \end{cases} \quad (23)$$

Проведем вычислительный эксперимент. Сгенерированная выборка (рис. 1) поделена на две части: первые семь наблюдений предназначены для оценки выборочной модели ПНР, оставшиеся три – для прогноза. Формат матриц: первая строка – значения мод, вторая – вели-

чины левых спрэдов, третья – правых спрэдов соответственно регрессора X и зависимой переменной Y.

$$X = \begin{pmatrix} 5.143 & 5.587 & 6.29 & 7.265 & 8.583 & 10.244 & 12.101 & 14.031 & 16.795 & 19.334 \\ 1.061 & 1.73 & 2.258 & 2.548 & 2.288 & 2.656 & 2.945 & 3.288 & 4.048 & 3.91 \\ 0.581 & 1.089 & 1.557 & 2.589 & 2.829 & 4.021 & 4.056 & 4.614 & 4.939 & 6.436 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 10.043 & 13.084 & 11.979 & 15.069 & 14.189 & 17.244 & 16.225 & 19.025 & 18.016 & 21.47 \\ 3.445 & 4.554 & 5.483 & 6.42 & 7.409 & 7.854 & 8.041 & 9.413 & 9.69 & 9.821 \\ 10.391 & 10.89 & 12.064 & 13.956 & 14.483 & 13.585 & 15.015 & 15.799 & 16.006 & 15.576 \end{pmatrix}$$

Рис. 1. Выборка нечетких чисел для оценки коэффициентов ПНР (пояснения по тексту)

Функции принадлежности значений регрессора и зависимой переменной представлены на рисунке 2. Функции формы регрессора – линейные, зависимой переменной: левая – линейная, правая – гармоническая.

Проверка условий (23) дает положительный результат для выборки и ее частей.

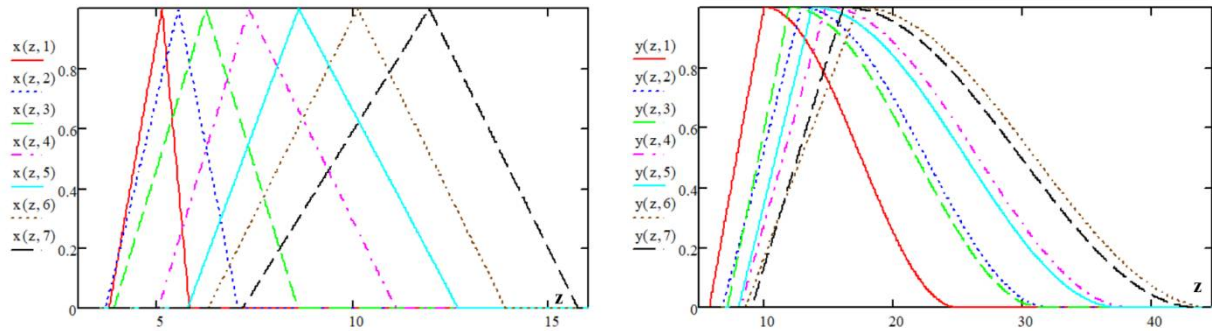


Рис. 2. Функции принадлежности значений регрессора (слева) и значений зависимой переменной (слева)

Получены следующие структурные параметры коэффициентов регрессии и функции формы:

$$\tilde{a}_1 = [0.846185, 0.102848, 0.972482]_{La_1, Ra_1}, \quad \tilde{a}_0 = [7.2087, 3.3206, 9.4953]_{La_0, Ra_0},$$

где обратные ФФ вычисляются по формулам (17)-(18) с помощью рассчитанной ковариационной матрицы и вектора средних значений (рис. 3).

$$M_{\text{cvar}} := \begin{pmatrix} \text{cvar}(mx, mx) & \text{cvar}(mx, my) & \text{cvar}(mx,lsx) & \text{cvar}(mx,lsy) & \text{cvar}(mx,rsx) & \text{cvar}(mx,rsy) \\ \text{cvar}(my, mx) & \text{cvar}(my, my) & \text{cvar}(my,lsx) & \text{cvar}(my,lsy) & \text{cvar}(my,rsx) & \text{cvar}(my,rsy) \\ \text{cvar}(lsx, mx) & \text{cvar}(lsx, my) & \text{cvar}(lsx,lsx) & \text{cvar}(lsx,lsy) & \text{cvar}(lsx,rsx) & \text{cvar}(lsx,rsy) \\ \text{cvar}(lsy, mx) & \text{cvar}(lsy, my) & \text{cvar}(lsy,lsx) & \text{cvar}(lsy,lsy) & \text{cvar}(lsy,rsx) & \text{cvar}(lsy,rsy) \\ \text{cvar}(rsx, mx) & \text{cvar}(rsx, my) & \text{cvar}(rsx,lsx) & \text{cvar}(rsx,lsy) & \text{cvar}(rsx,rsx) & \text{cvar}(rsx,rsy) \\ \text{cvar}(rsy, mx) & \text{cvar}(rsy, my) & \text{cvar}(rsy,lsx) & \text{cvar}(rsy,lsy) & \text{cvar}(rsy,rsx) & \text{cvar}(rsy,rsy) \end{pmatrix} \quad M_{\text{means}} := \begin{pmatrix} \text{mean}(mx) \\ \text{mean}(my) \\ \text{mean}(lsx) \\ \text{mean}(lsy) \\ \text{mean}(rsx) \\ \text{mean}(rsy) \end{pmatrix}$$

Рис. 3. Ковариационная матрица и вектор средних значений для расчета обратных ФФ коэффициентов ПНР

Графики рассчитанных обратных ФФ коэффициентов $\tilde{a}_1, \tilde{a}_0$ ПНР изображены на рисунке 4.

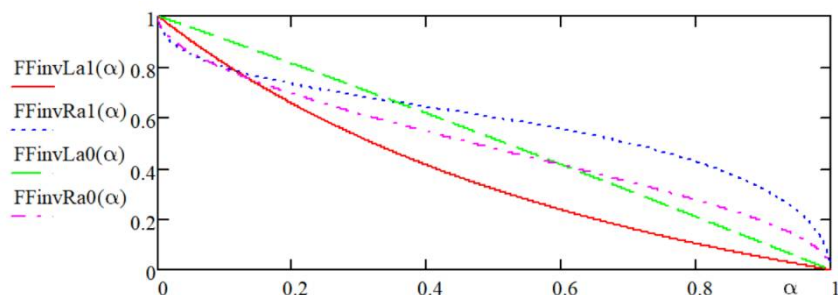


Рис. 4. Графики обратных функций формы нечетких коэффициентов $\tilde{a}_1, \tilde{a}_0$.

Прогнозные значения зависимой переменной по полученной модели (рис. 5).

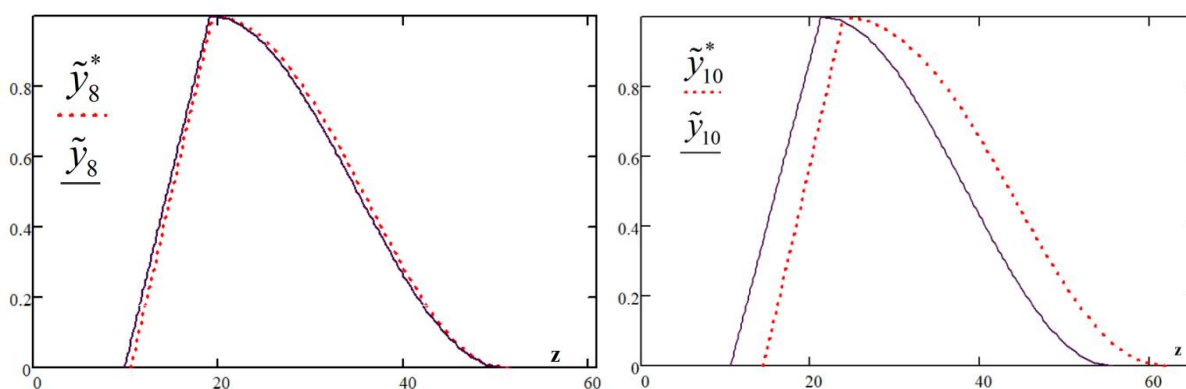


Рис. 5. Прогнозные (пунктирная линия) и фактические (сплошная линия) значения зависимой переменной при значениях регрессора $\tilde{x}_8$ (слева) и $\tilde{x}_{10}$ (справа)

Вывод

Модель может использоваться при сформулированных ограничениях (23). Возможные направления поиска способов снятия (ослабления) ограничений. 1. Переход к системе координат, в которой условия положительности спрэдов будут выполнены, с последующим обратным преобразованием найденного решения. 2. Решение задачи вариационной оптимизации с полноценной реализацией правила умножения α -сечений (6), вероятно через усовершенствование функционала с учетом возможности возникновения коэффициента $\tilde{a}_1$ с неопределенным знаком (левый конец носителя – отрицательный, правый – положительный).

Библиографический список

1. Shapiro, A.F. (2005). Fuzzy regression models. Article of Penn State University, 102(2), 373–383.
2. Бакулева М.А., Корячко В.П., Орешков В.И. Интеллектуальные системы и нечеткая логика - Москва, КУРС, ИНФРА-М, 2017. 352 с.
3. Конюхов А.Н., Дюбуа А.Б., Сафошкин А.С. Основы теории нечетких множеств. Часть 2: учеб. пособие / А.Н.Конюхов, А.Б.Дюбуа, А.С.Сафошкин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2018. 108 с.
4. Škrabánek, P., Marek, J. Models used in fuzzy linear regression. In Proceedings of the 17th Conference on Applied Mathematics – APLIMAT 2018, Bratislava, Slovak Republic, 6–8 February 2018; pp. 955–964.

УДК 510.644; ГРНТИ 27.03.33

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ «ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СПРЭДОВ» ПРИ ОЦЕНКЕ МОДЕЛИ ПОЛНОЙ НЕЧЕТКОЙ РЕГРЕССИИ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

К.В. Бухенский, А.Н. Конюхов, А.Б. Дюбуа, Д.О. Попова

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, chronos@bk.ru*

Аннотация. В результате применения обычного метода наименьших квадратов (МНК) для оценки полной нечеткой регрессии (ПНР) может возникнуть так называемая проблема «отрицательных спрэдов», т.е. когда расчетные коэффициенты регрессии не являются нечеткими числами (НЧ) по определению. В статье предложена методика применения ортогонального преобразования векторов структурных параметров α -сечений эмпирических НЧ с целью обхода проблемы «отрицательных спрэдов». Результаты вычислительных экспериментов демонстрируют значительное снижение ошибки аппроксимации модели.

Ключевые слова: функция принадлежности, нечеткое число LR-типа, функция формы, полная нечеткая регрессия, метод наименьших квадратов, ковариационная матрица α -сечений, ортогональное преобразование.

ONE POSSIBLE SOLUTION OF «NEGATIVE SPREADS» PROBLEM FOR FULLY FUZZY REGRESSION MODEL ORDINARY LEAST SQUARES ESTIMATES

K.V. Bukhensky, A.N. Konyukhov, A.B. Dubois, D.O. Popova

*Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, chronos@bk.ru*

Abstract. By using ordinary least squares (OLS) for fully fuzzy regression (FFR) estimation so called «negative spreads» problem can arise, i.e. coefficients obtained could not be treated as fuzzy numbers (FNs) by definition. This paper describes the technique of empirical α -cut FNs vectors structural parameters orthogonal transformation in order to bypass estimates «negative spreads» problem. Computational experiments confirm the significant approximation error drop.

Keywords: membership function, LR-type fuzzy number, shape function, fully fuzzy regression, ordinary least squares, α -cut covariance matrix, orthogonal transformation.

Мы продолжаем в рамках форума рассмотрение модели полной нечеткой регрессии (ПНР) на выборке из n нечетких пар $(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j)$ вида

$$\tilde{y}_j = \tilde{a}_0 \oplus \tilde{a}_1 \odot \tilde{x}_j \oplus \tilde{e}_j, \quad (1)$$

в которой $\tilde{x}_j, \tilde{y}_j$ – положительные эмпирические значения регрессора и зависимой переменной соответственно в LR-представлении. Подробное описание модели (1) и процедуры оценки нечетких коэффициентов $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1$ содержится в тезисах доклада «Оценка полной нечеткой регрессии для положительных нечетких чисел LR-типа с аналитически обратимыми функциями формы» настоящего форума.

Применение обычного МНК для модели ПНР сопряжено с весьма существенными требованиями, накладываемыми на структуру выборки, несоблюдение которых приводит к недопустимым с точки зрения теории нечетких множеств оценкам МНК (отрицательные спрэды нечетких коэффициентов ПНР, немонотонные функции формы LR-коэффициентов регрессии и т.п.). Вместе с тем даже в таких случаях возможно наблюдать адекватный результат аппроксимации исходных данных [1].

Было бы удобно, чтобы полученные в результате оценки коэффициенты ПНР имели не только положительные спрэды (так как НЧ непременно выпуклое нечеткое множество), но и были знакоопределенными (желательно положительными), чтобы использовать *единственный* вариант умножения α -сечений НЧ коэффициента $\tilde{a}_1$ и нечеткого неотрицательного

регрессора $\tilde{x}$, а именно левый конец сечения $(\tilde{a}_1 \odot \tilde{x})_\alpha$ – произведение левых концов, а правый конец – произведение правых концов сечений $(\tilde{a}_1)_\alpha$ и $(\tilde{x})_\alpha$ (здесь и далее уровень $0 \leq \alpha \leq 1$). Тогда расчетные значения концов сечения зависимой переменной $\tilde{y}$ (нижнее подчеркивание – левый конец, верхнее подчеркивание – правый) в силу правил интервальной арифметики:

$$\begin{cases} \underline{(\tilde{y})}_\alpha = ma_0 - lsa_0 La_0^{-1}(\alpha) + (ma_1 - lsa_1 La_1^{-1}(\alpha))(mx_j - lxx_j Lx^{-1}(\alpha)) \\ \overline{(\tilde{y})}_\alpha = ma_0 + rsa_0 Ra_0^{-1}(\alpha) + (ma_1 + rsa_1 Ra_1^{-1}(\alpha))(mx_j + rsx_j Rx^{-1}(\alpha)) \end{cases} \quad (2)$$

где $Lx^{-1}(\alpha), Rx^{-1}(\alpha)$ – обратные функции формы (ФФ) эмпирических данных регрессора,

$La_0^{-1}(\alpha), Ra_0^{-1}(\alpha), La_1^{-1}(\alpha)$ и $Ra_1^{-1}(\alpha)$ – обратные ФФ нечетких коэффициентов [2,3].

Для достижения поставленной цели сначала необходимо найти МНК-оценки для исходной выборки. Если они неудовлетворительны, применить соответствующее ортогональное преобразование векторов структурных параметров пары «регрессор-зависимая переменная» $Data(j) = (mx_j, my_j, lxx_j, lyy_j, rsx_j, rsy_j)^T$. Однако, рассматривая НЧ как единый объект, необходимо преобразовывать не только структурные параметры при $\alpha=0$ и $\alpha=1$, но и всех α -сечений. Для этого от вектора $Data(j)$ структурных параметров j -ой пары исходных соответственных данных для построения ПНР перейдем к вектору α -сечений этих структурных параметров:

$$Data(j, \alpha) = (mx_j, my_j, lxx_j Lx^{-1}(\alpha), lyy_j Ly^{-1}(\alpha), rsx_j Rx^{-1}(\alpha), rsy_j Ry^{-1}(\alpha))^T, j = \overline{1, n} \quad (3)$$

где mx, my и другие величины могут рассматриваться как случайные векторы с их эмпирическими реализациями $mx = (mx_1, mx_2, \dots, mx_j, \dots, mx_n)^T$ и т.д.

Примечание: для наглядности записей обозначение вектора везде опускаем. Заметим также, что $Data(j) = Data(j, 0)$.

Вектор средних арифметических значений α -сечений (далее вектор α -средних) получается усреднением эмпирической базы:

$$AVG(\alpha) = (\langle mx \rangle, \langle my \rangle, \langle lxx \rangle Lx^{-1}(\alpha), \langle lyy \rangle Ly^{-1}(\alpha), \langle rsx \rangle Rx^{-1}(\alpha), \langle rsy \rangle Ry^{-1}(\alpha))^T. \quad (4)$$

Аналогично расширяем и ковариационную матрицу, перейдя от структурных параметров (при $\alpha=0$ и $\alpha=1$) данных к структурным параметрам произвольных их α -сечений (далее α -ковариационная матрица):

$$MCVAR(\alpha) = AVG(Data(j, \alpha) \cdot Data(j, \alpha)^T) - AVG(\alpha) \cdot AVG(\alpha)^T, \quad (5)$$

матрица получается размерности 6.

Расчет параметров ПНР теперь можно производить по каждому α -сечению, обобщив приведенные в наших тезисах «Оценка полной нечеткой регрессии для положительных нечетких чисел LR-типа с аналитически обратимыми функциями формы» оценки:

$$ma_1 = \frac{MCVAR(1)_{1,2}}{MCVAR(1)_{1,1}}; \quad ma_0 = AVG(1)_2 - ma_1 AVG(1)_1, \quad (6)$$

$$lsa_1(\alpha) = ma_1 - \frac{MCVAR(\alpha)_{1,2} - MCVAR(\alpha)_{1,4} - MCVAR(\alpha)_{2,3} + MCVAR(\alpha)_{3,4}}{MCVAR(\alpha)_{1,1} - 2MCVAR(\alpha)_{1,3} + MCVAR(\alpha)_{3,3}},$$

и т.д., причем спрэды оцениваемых параметров ПНР уже являются функциями α и их можно визуализировать в виде графиков, чтобы оценить наличие / отсутствие отрицательных спрэдов при каких-либо значениях α , а также монотонность длины сечений.

Были взяты выборки НЧ-регрессора и НЧ-зависимой переменной, представленные матрицами (рис. 1). Формат матриц: первая строка – значения мод mx_j и my_j ; вторая – величины левых спрэдов lsx_j и lsy_j ; третья – правых спрэдов rsx_j и rsy_j унимодальных регрессора $\tilde{X}$ и зависимой переменной $\tilde{Y}$ соответственно:

$$X = \begin{pmatrix} 5.104 & 5.405 & 5.941 & 6.608 & 7.581 & 8.646 & 10.039 \\ 1.502 & 0.817 & 1.2305 & 2.754 & 1.2825 & 1.331 & 4.2215 \\ 0.429 & 1.278 & 2.6115 & 3.2695 & 4.1485 & 2.1685 & 2.5405 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 5.0205 & 6.545 & 6.0465 & 7.4945 & 7.1095 & 8.4065 & 7.8395 \\ 1.4061 & 2.2254 & 2.0139 & 2.6253 & 2.4528 & 3.1929 & 2.766 \\ 5.6025 & 5.379 & 4.984 & 5.3635 & 5.6535 & 5.914 & 5.95 \end{pmatrix}$$

Рис. 1. Выборка нечетких чисел для оценки коэффициентов ПНР:
все функции формы значений регрессора и зависимой переменной – линейные, т.е. $F(t) = 1 - t$.

Графический анализ результатов расчета формул (6) дает основание считать, что непосредственное применение МНК к исходным данным было некорректно. Так, на рис. 2 (слева) видно, что α -сечения правого спрэда практически везде отрицательны, причем сама функция $rsa_1(\alpha)$ является возрастающей, в то время как должна убывать при $0 \leq \alpha \leq 1$. Как результат – искаженная ФП коэффициента ПНР $\tilde{a}_1$ (справа), построенная по α -сечениям (можно констатировать, что $\tilde{a}_1$ вовсе не является НЧ, так как это невыпуклое НМ, в т.ч., правый спрэд отрицательный). Следовательно, *a priori* выполненные операции по его получению некорректны.

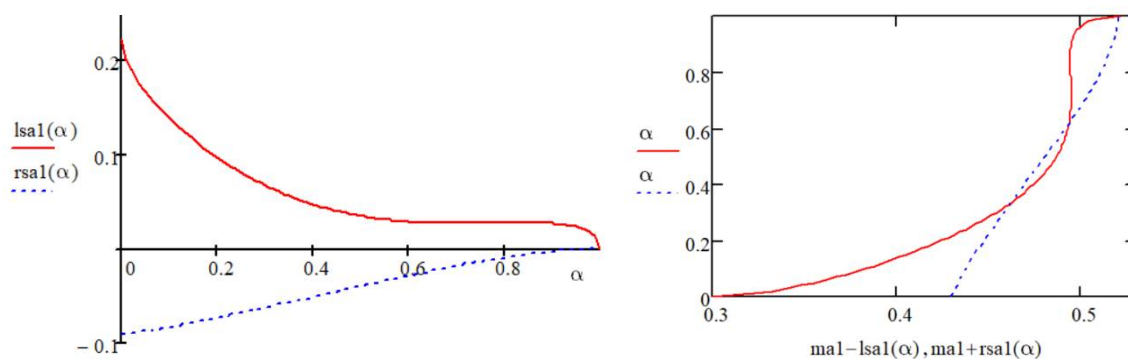


Рис. 2. Иллюстрация проблемы «отрицательного спрэда» (слева)
и его последствий для оценки коэффициента ПНР $\tilde{a}_1$ (справа)

Для коррекции ситуации мы использовали набор ортогональных преобразований шестикомпонентных векторов α -структурных параметров (3), применяя три основные матрицы поворота $MCVAR(\alpha)$ $T_{mx,my}(\beta)$, $T_{lsx,lsy}(\delta)$, $T_{rsx,rsy}(\gamma)$ (приведены в блочном представлении):

$$T_{mx,my}(\varphi) = \begin{pmatrix} V_2(\varphi) & O_2 & O_2 \\ O_2 & E_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & E_2 \end{pmatrix}; T_{lsx,lsy}(\varphi) = \begin{pmatrix} E_2 & O_2 & O_2 \\ O_2 & V_2(\varphi) & O_2 \\ O_2 & O_2 & E_2 \end{pmatrix}; T_{rsx,rsy}(\varphi) = \begin{pmatrix} E_2 & O_2 & O_2 \\ O_2 & E_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & V_2(\varphi) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где O_n и E_n – нулевая и единичные матрицы размерности n ;

$V_2(\varphi)$ – матрица поворота двухкомпонентного вектора на угол φ :

$$V_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (8)$$

а также дополнительные (для коррекции возможного появления отрицательных спрэдов и неположительных НЧ в исходной выборке) матрицы поворотов $T_{rsx,lsy}(\varphi)$, $T_{lsx,rsy}(\varphi)$:

$$T_{rsx,lsy}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_{lsx,rsy}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & 0 & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \varphi & 0 & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (9)$$

Столбцы (строки) ортогональных матриц (7,9) соответствуют компонентам векторов α -структурных параметров mx_j , my_j , $lsx_j Lx^{-1}(\alpha)$, $lsy_j Ly^{-1}(\alpha)$, $rsx_j Rx^{-1}(\alpha)$, $rsy_j Ry^{-1}(\alpha)$.

Итоговое преобразование описывается матрицей

$$T(\beta, \delta, \gamma, \varphi, \psi) = T_{rsx,lsy}(\psi) \cdot T_{lsx,rsy}(\varphi) \cdot T_{lsx,lsy}(\gamma) \cdot T_{rsx,rsy}(\delta) \cdot T_{mx,my}(\beta), \quad (10)$$

причем ковариационная матрица преобразуется как

$$MCVAR'(\alpha) = T(\beta_0, \delta_0, \gamma_0, \varphi_0, \psi_0) \cdot MCVAR(\alpha) \cdot T(\beta_0, \delta_0, \gamma_0, \varphi_0, \psi_0)^T \quad (11)$$

а векторы данных и средних как

$$\begin{aligned} Data'(j, \alpha) &= T(\beta_0, \delta_0, \gamma_0, \varphi_0, \psi_0) \cdot Data(j, \alpha), \quad j = \overline{1, n}, \\ AVG'(\alpha) &= T(\beta_0, \delta_0, \gamma_0, \varphi_0, \psi_0) \cdot AVG(\alpha). \end{aligned} \quad (12)$$

Численно были определены допустимые наборы значений углов поворота, один из которых для данной совокупности $\beta_0 = -0.350$, $\delta_0 = \gamma_0 = \varphi_0 = 0.175$, $\psi_0 = 0.350$. В качестве ограничений задачи поиска параметров преобразований применялись условия положительности спрэдов коэффициентов ПНР, положительность самих коэффициентов (носитель целиком лежит на положительной полуоси); в то же время в ходе преобразования не должны появиться отрицательные спрэды у исходных данных и сами данные должны оставаться положительными. Вообще, проблема оптимизации такого преобразования представляет собой отдельное исследование, причем в простейшем случае линейной ФФ она, вероятно, может быть решена и аналитически.

По итогам преобразований получены адекватные зависимости спрэдов от α (рис. 3), причем в НЧ-коэффициент при регрессоре, также неотрицателен.

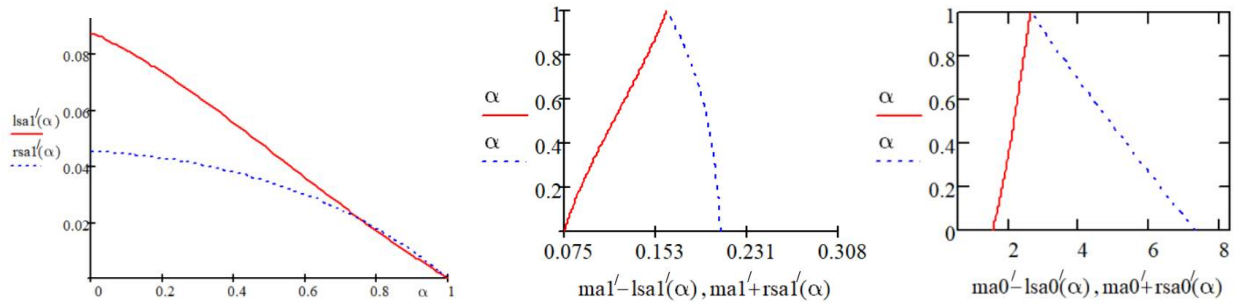


Рис. 3. Откорректированные путем ортогонального преобразования спрэды α -сечений (слева), положительный коэффициент $\tilde{a}_1$ (центр), коэффициент $\tilde{a}_0$ (справа).

Обратные функции формы коэффициентов ПНР получаем по формулам

$$L'a_k^{-1}(\alpha) = \frac{lsa'_k(\alpha)}{lsa'_k(0)}, \quad R'a_k^{-1}(\alpha) = \frac{rsa'_k(\alpha)}{rsa'_k(0)}, \quad k = 0, 1. \quad (13)$$

Функции формы всех НЧ-коэффициентов удовлетворяют после преобразования всем требованиям аксиоматики ФФ, что видно из рисунка 4.

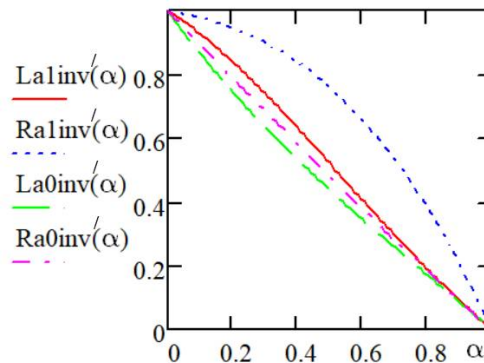


Рис. 4. ФФ нечетких коэффициентов ПНР (справа) после ортогонального преобразования (10)

Расчетные значения зависимой переменной в виде концов α -сечения после преобразования рассчитываются в соответствии с α -уровневым принципом обобщения Заде и правилами интервальной арифметики [3]. Здесь мы обеспечили условия «единой формулы», так как в результате преобразования и коэффициент ПНР при регрессоре и исходные данные – суть положительные НЧ. Следовательно, расчетное значение α -сечений зависимой переменной в преобразованных (отмечены «штрихом») величинах будет

$$\begin{cases} (\tilde{y}')_{\alpha}(j, \alpha) = ma'_0 - lsa'_0(\alpha) + (ma'_1 - lsa'_1(\alpha))(Data'(j, \alpha)_1 - Data'(j, \alpha)_3) \\ (\tilde{y}')_{\alpha}(j, \alpha) = ma'_0 + rsa'_0 Ra_0^{-1}(\alpha) + (ma'_1 + rsa'_1 Ra_1^{-1}(\alpha))(Data'(j, \alpha)_1 + Data'(j, \alpha)_5), \end{cases} \quad (14)$$

Получив расчетные α -сечения (14), необходимо провести обратное преобразование

$$Data(j, \alpha) = T(\beta_0, \delta_0, \gamma_0, \varphi_0, \psi_0)^T Data'(j, \alpha), \quad j = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Рисунок 5 визуально подтверждает адекватность расчетных НЧ $\tilde{y}_{pj}$ по ПНР фактическим данным $\tilde{y}_j$ (номера наблюдений $j=1$ и $j=7$).

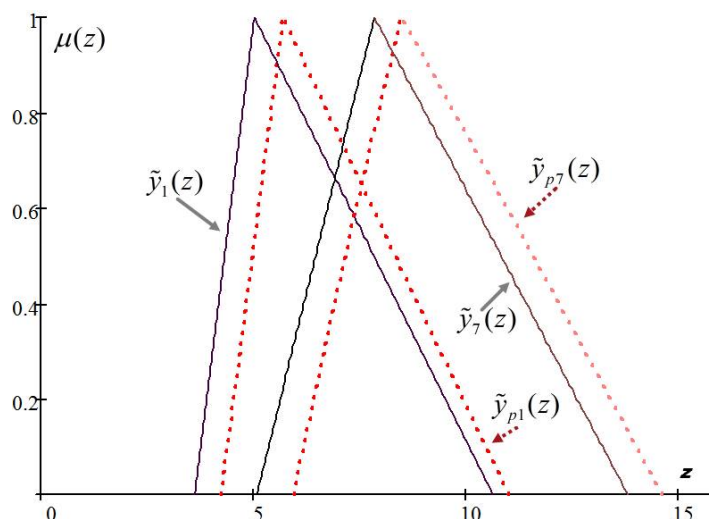


Рис. 5. Функции принадлежности фактических значений зависимой переменной с номерами 1 и 7 (сплошная линия) и соответствующих расчетных значений (пунктирная линия)

Для обоснованного суждения об адекватности полученной модели рассчитаем среднеквадратическую ошибку аппроксимации по формуле:

$$ERR = \frac{1}{(N+1)n} \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha} \sqrt{\left(\left(\tilde{y}_p \right)_{\alpha} (j, \alpha) - \left(\tilde{y} \right)_{\alpha} (j, \alpha) \right)^2 + \left(\left(\tilde{y}_p \right)_{\alpha} (j, \alpha) - \left(\tilde{y} \right)_{\alpha} (j, \alpha) \right)^2}. \quad (16)$$

При степени дискретизации 0,001 ($N=1001$) на оценочной выборке ($n=7$) получено при использовании описанной методики значение $ERR_1 = 0.671$, в то время как при прямом применении МНК к исходным данным $ERR = 4.016$. То есть, среднеквадратическая ошибка аппроксимации значительно снизилась.

Вывод

Предложена методика решения проблемы «отрицательных спрэдов» при применении обычного МНК для оценки параметров ПНР по α -уровневому принципу. Сначала производится обычная МНК-оценка, затем производится анализ α -сечений на предмет неположительности спрэдов и других очевидных проблем оценок (невыпуклость, неестественные функции формы, не удовлетворяющие аксиоматике LR-нечетких чисел и т.п.). Если эти проблемы имеются, то применяем ортогональное преобразование поворота шестикомпонентного вектора α -структурных параметров.

Отметим и недостаток данного подхода. Для построения прогноза необходимо сначала преобразовать исходные данные, рассчитать прогноз по преобразованным данным, а затем применить обратное преобразование. Таким образом, модель ПНР работает только по преобразованным данным.

Библиографический список

1. Chang PT, Lee ES. Fuzzy linear regression with spreads unrestricted in sign. Comput. Math. Appl. 1994; 28(4): 61–70.
2. Бакулева М.А., Корячко В.П., Орешков В.И. Интеллектуальные системы и нечеткая логика - Москва, КУРС, ИНФРА-М, 2017. 352 с.
3. Конюхов А.Н., Дюбуа А.Б., Сафoshкин А.С. Основы теории нечетких множеств. Часть 2: учеб. пособие / А.Н.Конюхов, А.Б.Дюбуа, А.С.Сафoshкин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2018. 108 с.

УДК 658.562 ГРНТИ 81.14.15

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ

Н.В. Бакулин

*Тульский государственный университет,
Российская Федерация, Тула, info@tsu.tula.ru*

Аннотация. Рассматривается модель системы мелкосерийного производства и алгебраические аспекты моделирования. Моделирование при этом рассматривается как процесс определения такой динамики системы, которая описывала бы реальный процесс в соответствии с заранее принятыми допущениями.

Ключевые слова: производственная система, математическое моделирование

ALGEBRAIC ASPECTS OF PRODUCTION SYSTEM MODELING

N.V. Bakulin

*Tula State University,
Russia, Tula, info@tsu.tula.ru*

The summary. A model of a small-scale production system and algebraic aspects of modeling are considered. In this case, modeling is considered as the process of determining such a system dynamics that would describe the real process in accordance with previously accepted assumptions.

Keywords: production system, mathematical modeling

При проектировании и моделировании больших систем, таких как отраслевые и межотраслевые системы, удобно рассматривать их как целеустремленные (ЦУС) [1, 2]. В терминах ЦУС рассмотрим пример постановки функциональной задачи при моделировании мелкосерийного производства.

Рассмотрим модель мелкосерийного производства - систему с шестью производственными линиями [3]. Рассматриваемый процесс включает в себя большое число операций: сверления, точения, шлифовки, машинной обработки, сборки и окраски. С целью ограничения числа переменных эти операции можно описать меньшим числом операций, на выполнение каждой из которых требуется T часов. Операциями, значительно меньше T часов, можно либо пренебречь, либо включить их в состав других. Операции большой длительности можно разбить на T - часовые части (подоперации). В качестве переменных состояния вводятся шесть скоростей потоков деталей $x_1, x_2, \dots, x_6$, каждая из которых выражается числом деталей в неделю, и три переменных уровня запасов x_7, x_8, x_9 , каждая из которых выражается числом деталей. При этом обозначим через x_7 и x_8 число деталей, ожидающих дальнейшей обработки в точках слияния двух или большего числа производственных линий. Переменная x_9 – объем готовой продукции, ожидающей отправки потребителю. Скорость поставок продукции потребителю обозначим через f , она выражается числом деталей в неделю. Каждая i -я производственная линия требует u_i человеко-часов в неделю (управляющая переменная). На обработку одной детали в ходе одной операции или последовательности операций требуется $1/\beta$ человеко-часов.

Для того, чтобы представить блок-схему потоков, рассмотрим девять блоков единичной задержки и обозначим их входы через $x_1(k), x_2(k), \dots, x_9(k)$. На выходы блоков задержки с такими входами в момент времени k должны поступать сигналы $x_1(k+1), x_2(k+1), \dots, x_9(k+1)$. Построим эти сигналы. Например, используя множитель α для преобразования переменных скорости в переменные уровня, умножая $x_6(k)$ и $-f(k)$ на α и складывая полученные произведения с величиной $x_9(k)$, получаем $x_9(k+1)$.

Если $u_7 = 1/\beta_7$ человеко-часов в неделю, то по прошествии времени задержки T , величина x_6 будет равна одной детали в неделю. В результате за время T на складе накопится α деталей, если не производились поставки потребителю. В то же время, поскольку операция, соответствующая x_6 , заключается в сборке четырех деталей или блоков (см.[3]), то из накопившегося в течение периода T запаса x_8 нужно вычесть 4α деталей.

Проанализировав таким образом взаимосвязи всех переменных $x_1, x_2, \dots, x_8$, получаем полную блок-схему, состоящую из блоков единичной задержки, мультипликаторов и сумматоров в соответствии с уравнениями:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= \beta_2 u_2(k); \\x_2(k+1) &= x_1(k); \\x_3(k+1) &= x_2(k); \\x_4(k+1) &= x_3(k); \\x_5(k+1) &= \beta_6 u_6(k); \\x_6(k+1) &= \beta_7 u_7(k); \\x_7(k+1) &= x_7(k) + \alpha \beta_3 u_3(k) + \alpha \beta_4 u_4(k) - 2\alpha \beta_6 u_6(k); \\x_8(k+1) &= x_8(k) + \alpha \beta_1 u_1(k) + \alpha x_4(k) + \alpha \beta_5 u_5(k) + \alpha x_5(k) - 4\alpha \beta_7 u_7(k); \\x_9(k+1) &= x_9(k) + \alpha x_6(k) - \alpha f(k).\end{aligned}$$

В векторно - матричной форме система записывается в виде:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Cf(k).$$

Описание модели в пространстве состояний рассматривается как результат конструирования, допускающий модификацию и повторное конструирование при изменении окружающих условий. Моделирование при этом рассматривается как процесс определения такой динамики системы, которая описывала бы реальный процесс в соответствии с заранее принятыми допущениями.

Полученную модель линейной системы можно описать с помощью аппарата абстрактной алгебры. В основе линейной системы лежит пара (X, A) , где X – пространство состояний, и $A: X \rightarrow X$ – линейное преобразование, описывающее изменение состояния системы под воздействием одиночного нулевого входного сигнала $u(k) = 0$. Пару (X, A) назовем динамикой системы. Дополнительные свойства системы описываются входным отображением $B: U \rightarrow X$, которое тоже является линейным преобразованием. Исследуем поведение системы при условии, что ее начальное состояние равно нулю. Подаваемую на вход последовательность $u(n), \dots, u(0)$, в которой $u(j) \in U$ поступает в момент времени $k = -j$, можно представить как бесконечную слева последовательность

$$(\dots, 0, \dots, 0, u(n), u(n-1), \dots, u(0))$$

и ввести множество всех таких последовательностей

$$U^{**} = \{(\dots, u(j), \dots, u(1), u(0))\}.$$

Здесь каждое $u(j) \in U$, но только конечное число $u(j) \neq 0$.

Если известно, что система находится в начальном состоянии 0 и на вход до момента времени $k = 0$ поступает последовательность

$$u = (\dots, u(j), \dots, u(1), u(0)) \in U^{**},$$

то состояние системы в момент $k + 1$ будет, очевидно, описываться равенством

$$r(u) = \sum_{j \geq 0} A^j B u(j),$$

в котором сумма конечна, так как последовательность u имеет конечный носитель.

Таким образом, состояние $r(u)$ достигается из нулевого состояния с помощью входной последовательности u . Поэтому отображение

$$r: U^{**} \rightarrow X: u \rightarrow \sum_{j \geq 0} A^j B u(j)$$

называется отображением достижимости для пары (A, B) . Такая пара достижима, если каждое состояние достижимо из нулевого состояния, т.е. r отображает U^{**} на X , или $X = r(U^{**})$.

Линейное отображение r сохраняет динамику. Чтобы установить это, введем понятие динамоморфизма как формализацию отображения, сохраняющего динамику [4]. Динамоморфизмом из динамики (X, A) в динамику (X', A') называется линейное отображение $h: X \rightarrow X'$, сохраняющее динамику в том смысле, что диаграмма (рис.1) коммутативна.

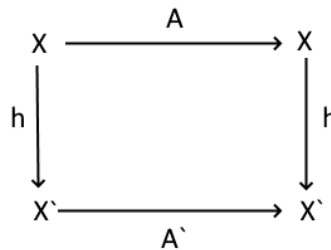


Рис. 1. Диаграмма 1

Это значит, что если имеются два различных пути из одной вершины в другую, то образы отображений, определяемых этими путями, должны быть одинаковы.

В приведенной выше диаграмме имеется лишь одна такая пара путей (рис.2 и рис.3).

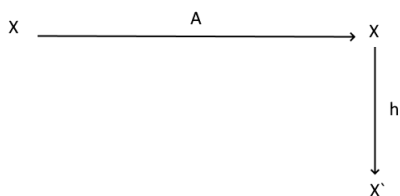


Рис. 2. Диаграмма 2

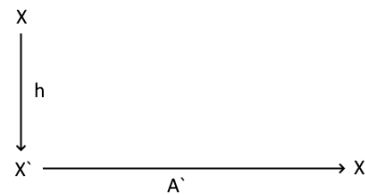


Рис. 3. Диаграмма 3

И поэтому коммутативность означает, что $h(A(x)) = A'(h(x))$ для любого x из X . Отметим, что размерности X и X' могут быть различными. Легко убедиться, что r - динамоморфизм.

Эту теорию можно обобщить с помощью теории категорий. Категория Kat задается классом объектов, причем для любых двух объектов V, W имеется множество $Kat(V, W)$, которое называется множеством Kat - морфизмов из V в W , и для любых объектов V, W, Z существует отображение композиции:

$$Kat(V, W) \times Kat(W, Z) \rightarrow Kat(V, Z): (V \xrightarrow{f} W, W \xrightarrow{g} Z) \rightarrow V \xrightarrow{gf} Z.$$

Для каждого объекта V выделен единичный элемент id_V множества $Kat(V, V)$.

В описанной системе выполняются следующие аксиомы:

$$(fg)h = f(gh) \text{ для всех } V \xrightarrow{h} W, W \xrightarrow{g} Z, Z \xrightarrow{f} Y;$$

$$V \xrightarrow{id_V} V \xrightarrow{f} W = V \xrightarrow{f} W = V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{id_W} W.$$

Стандартной называется категория Set , объекты которой - множества, а морфизмы - отображения. Множество $Set(V, W)$ включает в себя все отображения из множества V на множество W , при этом

$$id_V: V \rightarrow V : v \rightarrow v.$$

является тождественным отображением, а композиция морфизмов определяется как обычная композиция отображений:

$$(gf)(v) = g(f(v)).$$

Пусть Kat - произвольная категория. Тогда динамикой системы в Kat является пара (X, A) , где X - объект категории Kat , а $A: X \rightarrow X$ представляет собой Kat -морфизм. Морфизм динамик $g: (X, A) \rightarrow (X', A')$, называемый динамоморфизмом, есть Kat -морфизм $g: X \rightarrow X'$, такой, что $A'g = gA$ в соответствии с диаграммой (рис.4).

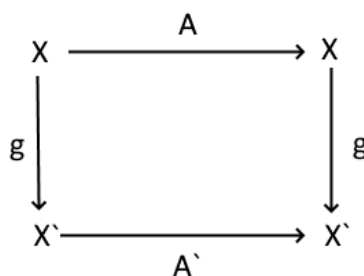


Рис. 4. Диаграмма 4

Очевидно, что тождественное отображение $id_X: (X, A) \rightarrow (X, A)$ является динамоморфизмом и что композиция динамоморфизма $f: (X_1, A_1) \rightarrow (X_2, A_2)$ и динамоморфизма $g: (X_2, A_2) \rightarrow (X_3, A_3)$ - тоже динамоморфизм:

$$(gf)A_1 = g(fA_1) = g(A_2f) = (gA_2)f = (A_3g)f = A_3(gf).$$

Это порождает категорию динамик в Kat , которую обозначим через $Dyn(Kat)$ (ее объекты - динамики системы, а морфизмы - динамоморфизмы). Системой в категории Kat называется четверка $S = (X, A, U, B)$, такая что (X, A) - динамика системы в Kat , а B представляет собой Kat -морфизм вида $B: U \rightarrow X$ (входное отображение).

Покажем, как можно определить достижимость для системы в категории Kat . Имеем два линейных преобразования:

$$u_0^n: U \rightarrow U^{**}: u(0) \mapsto (...0, ..., 0, u(0)),$$

$$z: U^{**} \rightarrow U^{**}: (...u(j), ..., u(1), u(0)) \mapsto (...u(j-1), ..., u(0), 0).$$

Они обладают тем свойством, что для любой заданной пары линейных отображений $U \xrightarrow{B} X$ и $X \xrightarrow{A} X$ существует единственное линейное отображение $r: U^{**} \rightarrow X$ такое, что диаграмма (рис.5) коммутативна.

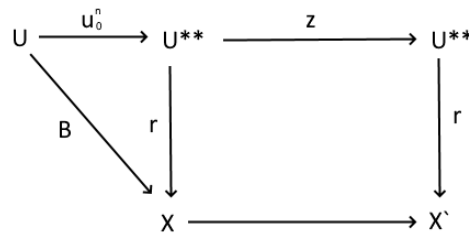


Рис. 5. Диаграмма 5

Это отображение определяется соотношением

$$r(..., u(j), ..., u(1), u(0)) = \sum_{j \geq 0} A^j B u(j).$$

Последнее справедливо в силу соотношений:

$$r(..., u(j), ..., u(1), u(0)) = r\left(\sum_{j \geq 0} z^j u_0^n(u(j))\right) = \sum_{j \geq 0} r(z^j u_0^n(u(0))) = \sum_{j \geq 0} A^j r u_0^n(u(j))$$

(из прямоугольной части диаграммы) или $= \sum_{j \geq 0} A^j B u(j)$ (из треугольной части диаграммы).

Используя введенные обозначения, будем говорить, что для линейной системы множества X и U есть модули над одним и тем же кольцом R , а отображения $A: X \rightarrow X, B: U \rightarrow X$ есть модульные гомоморфизмы. Обобщение конечномерных векторных пространств с помощью теории R -модулей не добавляет особых алгебраических трудностей в теорию линейных систем.

Для любого кольца R можно образовать категорию $R-Mod$, объекты которой суть R -модули, а морфизмы линейные отображения:

$$R-Mod(V, W) = \{V \xrightarrow{h} W \mid h - \text{линейно}\}.$$

Композиция определяется обычным образом:

$$fg(v) = f(g(v)),$$

а тождественное отображение как $id_V: V \rightarrow V, id_V(v) = v$.

Последнее отображение линейно. Эта система удовлетворяет аксиомам теории категорий. Если $\mathfrak{R}$ - поле действительных чисел, то $\mathfrak{R}-Mod$ есть просто категория Vect действительных векторных пространств и линейных отображений.

Р. Калман представил исключительно изящное выражение для алгебраической структуры линейных динамических систем [5]. В его подходе на основе теории модулей рассматриваются линейные системы, для которых пространства входных сигналов и состояний - конечномерные векторные пространства над полем $\mathfrak{R}$. Р. Калман вводит $\mathfrak{R}$ -гомоморфизмы $A \in Hom_{\mathfrak{R}}(X, X), B \in Hom_{\mathfrak{R}}(U, X)$ и рассматривает составной объект (A, B) , моделируемый уравнением

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),$$

где $k \in \mathbb{Z}, u(k) \in U, x(k) \in X, \mathbb{Z}$ - множество целых чисел.

Обобщением категории $\mathfrak{R}-Mod$ является нечеткая категория $\mathfrak{R}-MOD$, объекты которой - действительные векторные пространства, и для любых двух векторных пространств V, W задается нечеткое отображение $\mathfrak{R}-Mod(V, W) \rightarrow [0, 1]$.

Если T - еще одно векторное пространство и если

$$u \in \mathfrak{R} - MOD(V, W), u' \in \mathfrak{R} - MOD(W, T),$$

то композиция $u' \cdot u \in \mathfrak{R} - MOD(V, T)$ определяется отображением $\mathfrak{R} - Mod(V, T) \rightarrow [0, 1]$ вида:

$$h \in \mathfrak{R} - Mod(V, T) \rightarrow (u \circ u')(h).$$

Далее рассмотрим два морфизма категории $\mathfrak{R} - Mod$:

$$A \in \mathfrak{R} - MOD(X, X), B \in \mathfrak{R} - MOD(U, X).$$

Определим их сумму как нечеткий морфизм категории $\mathfrak{R} - Mod$, задаваемый выражением

$$w \in \mathfrak{R} - Mod(X, X) \rightarrow (A + B)(w).$$

Пусть SET – нечеткая категория над категорией Set , объекты которой – множества, а морфизмы – отображения множеств. Нечеткая категория SET получается также как $\mathfrak{R} - MOD$ из $\mathfrak{R} - Mod$. Это означает, что если взять траекторию $\{1, 2, \dots, k\} \rightarrow X$, обозначаемую через (k, X) , то нечеткой траекторией будет функция $Set(k, X) \rightarrow [0, 1]$ или элемент нечеткой категории $SET(Z, X)$, где Z – множество целых чисел. Точно также входная последовательность есть элемент нечеткой категории $SET(Z, U)$.

Существующую инъекцию $\{1, 2, \dots, k\} \xrightarrow{i} \{1, 2, \dots, k+1\}$ можно интерпретировать как переход от момента времени k к моменту времени $k+1$ в соответствии с отображением

$$Set(k+1, X) \xrightarrow{i'} Set(k, X).$$

Условие коммутативности для диаграммы (рис.6) будет иметь вид:

$$t(k+1) = At(k) + Bu(k).$$

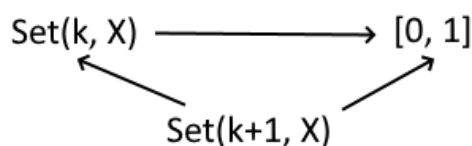


Рис. 6. Диаграмма 6

Таким образом, траектория t , которая рассматривается как нечеткое множество, имеет ступенчатую форму и определяется нечеткими преобразованиями A и B и нечеткой входной последовательностью $u(k)$. При заданных степенях значимости преобразований мы оказываемся в состоянии описать все возможные траектории моделируемой системы.

Библиографический список

1. Акофф Р., Эмери Ф. О целеустремленных системах. М.: Советское радио, 1974. - 271 с.
2. Бакулин Н.В. Аналитическое определение объектов проектирования отраслевой системы планирования. //Дифференц. уравнения и прикл. задачи. Тула, 2016. с. 17 - 22.
3. Christensen J., Brogan W. Modelling and optimal control of a production process. - Int. J. of systems science, 1971, v.1, №3, pp. 247-255.
4. Arbib M., Manes E. Foundations of system theory: Decomposable systems/ - Automatica, 1974, v 10, p. 285 - 301.
5. Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб. Очерки по математической теории систем. -М.: Мир, 1971. -398 с.

УДК 311.14; ГРНТИ 83.03.41

ИНДЕКС НАУЧНОЙ РЕСПЕКТАБЕЛЬНОСТИ КОНФЕРЕНЦИЙ, ФОРУМОВ, СИМПОЗИУМОВ НА ОСНОВЕ ПУБЛИКАЦИОННЫХ ДАННЫХ ИХ УЧАСТНИКОВ

В.В. Миронов

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, mironovlv@mail.ru*

Аннотация. В работе проведено краткое исследование информативности широко известного индекса цитирования Хирша (оценки публикационной активности научных работников), вскрыты его достоинства и недостатки. Как развитие идеи представлены два существенно новых (абсолютный и относительный) индекса оценки научной респектабельности (представительности) уже научных мероприятий (конференций, симпозиумов, форумов) на основе публикационных данных их участников в данном мероприятии. Вводимые индексы просты в использовании, включают в себя уже привычную для научного сообщества методологию индекса Хирша и позволяют ранжировать научные мероприятия в зависимости от значений индексов. Приведен пример оценки представительности Международного форума СТНО-2022 в Рязанском государственном университете им. В.Ф. Уткина.

Ключевые слова: библиометрия, наукометрический показатель, индекс Хирша, новый индекс представительности научных мероприятий.

INDICE OF SCIENTIFIC RESPECTABILITY OF CONFERENCES, FORUMS, SYMPOSIUMS ON THE BASIS OF PUBLICATION DATA OF THEIR PARTICIPANTS

Valya Mironov

*Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, mironovlv@mail.ru*

The summary. In the paper, a brief study of the information content of the well-known Hirsch citation index (assessment of the publication activity of scientists) was carried out, its advantages and disadvantages were revealed. As a development of the idea, two essentially new (absolute and relative) indexes for assessing the scientific respectability (representativeness) of already scientific events (conferences, symposiums, forums) are presented based on the publication data of their participants in this event. The indexes introduced are easy to use, include the H-index methodology already familiar to the scientific community, and allow ranking scientific events depending on the index values. An example of assessing the representativeness of the STNO-2022 International Forum in Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin is given.

Keywords: bibliometrics, scientometric indicator, Hirsch index, new index of representativeness of scientific events

Всё будет хорошо!

Введение

Индекс Хирша. Индекс Хирша (или, говорят и пишут, h-индекс) – это числовой наукометрический индекс (предложенный в 2005 г. американским ученым-астрофизиком Хорхе Хиршем для целевого учета публикаций коллег-физиков [1]). Индекс h есть условная числовая характеристика «производительности труда» учёного, определяемая по данным его публикаций и цитирования его работ.



* **Миронов Валентин Васильевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики РГРТУ, профессор по специальности 05.13.01 – «Системный анализ, управление и обработка данных (физико-математические дисциплины)», автор 180 работ в различных областях математики и ее приложений.

Индекс Хирша быстро стал популярен не только в среде физиков, но и вообще в научной среде, распространяясь чуть ли не на все виды на-

учной деятельности. Индекс оценили и чиновники-управленцы, которые получили инструмент ранжирования ученых, научных коллективов и учреждений,

Что такое индекс Хирша для ученого? Если h его статей из их цитируются в каких-то научных базах h или более раз каждая, и при каждой из оставшихся статей цитируются менее h раз, то индекс публикационной активности ученого есть h . Хорошо известно, что индекс Хирша не всегда достигает своих целей, Дело в том, что публичный h -индекс ученого порой (и достаточно часто!) не соответствует реальному вкладу этого ученого в отрасль его науки. С другой стороны, h -индекс прост в вычислении и в первом приближении неплохо оценивает активность ученого в написании статей.

Эти и другие недостатки предложения Хирша стали причиной многих предложения по усилению оценки активности ученого, как на основе идей Хирша, так и на других принципах ([2 – 13]). Но и эти нововведения также имеют каждый свои недостатки. Главная проблема многих нововведений в том, что они отходят от уже всем привычной и повсеместно применяемой методики, другие имеют неоправданную вычислительную сложность, третьи декларируют маловесомые преимущества над h -индексом, и, наконец, нельзя сбрасывать со счетов психологическое неприятие неочевидных модернизаций.

Новые идеи. В недавних работах [14, 15] автором предложены, как альтернатива индексу Хирша, четыре новые индексы цитирования – M -индекс и его обобщение – взвешенный M -индекс, а также G -индекс сверхвысокого цитирования и его обобщение – взвешенный G -индекс. Для удобства сравнения публикационной активности ученых введены псевдонормы новых индексов. Все новые индексы просты в использовании, включают в себя уже, как неотъемлемую часть, привычную для научного сообщества методологию Хирша и одновременно на порядок информативнее последней.

Идея данной работы. В данной статье новые авторские идеи из работ [14, 15] перенесены на задачу построения индексов научной респектабельности (представительности) конференций, форумов, симпозиумов на основе публикационных данных их участников. Вводятся простые (по технике подсчета) и одновременно информативные индексы на основе оценки публикационной активности участников данного мероприятия в зависимости от их ученой степени. Это позволяет ранжировать научные мероприятия и вклад ученых в их респектабельность, независимо от характера научной отрасли.

Говоря просто, приближенно (для первичного понимания идеи решения, чему учил нас Д. Гильберт!), чем больше «статей» представили «доктора наук» на мероприятие (с учетом соавторства), тем выше рейтинг (индекс) мероприятия. Точно идея будет описана далее в настоящей работе.

Простые взвешенные индексы респектабельности

Введем необходимые определения, данные для алгоритмов, и дадим некоторые комментарии к ним.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Расположим данные всех докторов наук (достаточно ограничиться ФИО докторов – фамилия, имя, отчество) списком сверху вниз. Напротив каждой фамилии докторов выставим дробные слагаемые (баллы), каждое из которых есть рациональная (будем говорить «публикационная») дробь $\frac{1}{n}$, где число 1 в числителе есть фиксация публикации доктора в трудах мероприятия, а n – это число авторов данной публикации (включая доктора, разумеется). Каждому ФИО доктора припишем порядковый номер $i = 1, 2, \dots, N$ (сверху вниз, N – число докторов наук) и вычислим для каждого доктора сумму всех таких публикационных дробей и запишем ее в параметре $S_i = \sum \frac{1}{n}$, где индекс есть номер ФИО доктора в списке.

Составленный список ФИО докторов и соотнесенными параметрами S_i назовем названием «D-список» мероприятия.

По определению простой взвешенный индекс (докторов) есть число $\mu = [\sum_{i=1}^N S_i]_{1,0}$, где скобки $[\dots]_{1,0}$ обозначают функцию части числа с точностью до целых долей. К примеру, $[\sqrt{2}]_{1,0} = 1,0$, в то время, как $\sqrt{2} = 1,41421 \dots$

Замечание 1. Индекс μ является некоторым аналогом индекса h Хирша (информационный квадрат Хирша есть прямоугольник со сторонами h на h и «площадью» h^2) и одновременно аналогом «индекса Миронова» (h, p, q) , формируемого из 3-х информационных прямоугольников: квадрата Хирша «площадью» h^2 , «хвоста» цитирования «площадью» p^2 и «подвала» цитирования «площадью» q^2 . В данном случае информационных прямоугольник имеет стороны μ на μ/i и «площадь» μ .

Если $\mu = n$, то содержательно это означает, что в трудах мероприятия представлено (усреднено) n работ, написанных докторами без соавторов. *Конец замечания.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. По аналогии с D-списком мероприятия сформируем ND-список, куда войдут аналогичные данные для всех других участников (не докторов наук) мероприятия, общим числом M .

Простой взвешенный индекс не докторов наук есть число $\eta = [\sum_{i=1}^M S_i]_{1,0}$.

Относительный взвешенный индекс респектабельности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Относительным индексом респектабельности мероприятия назовем число $T = ([\mu / (\mu + \eta)]_{0,01}) \cdot 100\%$, где скобки $[\dots]_{0,01}$ обозначают функцию части числа с точностью до сотых долей.

К ПРИМЕРУ, если $T = 10\%$, то содержательно в рамках предлагаемой методики усреднения на 10 единиц (трудов без соавторов) опубликованного в трудах мероприятия научного вклада докторов наук приходится 100 усредненных единиц (трудов без соавторов) научного вклада всех (включая докторов) участников мероприятия.

Обобщенный (абсолютный) индекс респектабельности

ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ 4 Обобщенный (абсолютный) индекс респектабельности (представительности) конференций, форумов, симпозиумов (везде далее – мероприятий) на основе публикационных данных их участников, есть упорядоченная тройка чисел

$$R = (T, N, q), \quad (1)$$

где T – относительный индекс респектабельности;

N – число докторов наук, принявших участие в мероприятии;

q – число работ (статей, тезисов доклада и т.п.), представленных докторами наук без авторства.

Сравнение индексов респектабельности двух мероприятий

На основе формулы (1) определим критерий сравнения индексов респектабельности двух мероприятий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Для двух научных мероприятий M_1 и M_2 с индексами респектабельности $R_1 = (T_1, N_1, q_1)$ и $R_2 = (T_2, N_2, q_2)$ соответственно положим по определению, что M_1 респектабельнее (представительнее) M_2 , если (и только если)

$$R_1 > R_2 \stackrel{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} T_1 > T_2, \\ (T_1 = T_2) \wedge (N_1 > N_2), \\ (T_1 = T_2) \wedge (N_1 = N_2) \wedge (q_1 > q_2). \end{cases} \quad (2)$$

В противном случае, по определению, мероприятий M_1 и M_2 имеют одинаковый индекс респектабельности ($R_1 = R_2$).

Расчет индекса респектабельности для международного научно-технического форума «Современные технологии в науке и образовании» – СТНО-2022

В 2022 г. в Рязанском государственном радиотехническом университете им. В.Ф. Уткина прошел V международный научно-технический форум «Современные технологии в науке и образовании» – СТНО-2022.

Проанализируем по предложенной в статье методике уровень респектабельности каждого тома форума на основе публикационных данных в 10-ти томах трудов СТНО-2022 [16].

Том 1. Доктора науки их баллы.

1. Потапов Александр Алексеевич = 1;
2. Чайко Елена Валерьевна = 1/4;
3. Батенков Кирилл Александрович = 1+1/2 = 3/2;
4. Самойлов Сергей Александрович = 1/3;
5. Костров Виктор Васильевич = 1/2.

Общее число участников – **61**.

Простой индекс респектабельности докторов 1-го тома $\mu_1 = 3$.

Простой индекс не докторов 1-го тома $\eta_1 = 33$.

Относительный индекс респектабельности 1-го тома $T_1 = 8\%$.

Общий индекс респектабельности 1-го тома $R_1 = (8\%, 5, 1)$.

Том 2. Доктора наук и их баллы.

1. Панфилов Виктор Иванович = 1/2;
2. Мишин Владимир Юрьевич = 1/4+1/6 = 5/12;
3. Морозов Дмитрий Анатольевич = 1/6;
4. Морев Сергей Павлович = 1/6+1/2 = 2/3;
5. Чиркин Михаил Викторович = 1/4;
6. Шальнев Виктор Александрович = 1/2;
7. Баскаков Александрович Николай = 1/2;
8. Иванов Александр Иванович = 1/3;
9. Васин Алексей Васильевич = 1/2;
10. Литвинов Владимир Георгиевич = 1/3 + 1/2 = 5/6;
11. Холомина Татьяна Андреевна = 1/4;
12. Трубицын Андрей Афанасьевич = 1/2;
13. Махмудов Мурад Набиевич = 1/4;
14. Шестеркин Василий Иванович = 1/8.

Общее число участников – **91**.

Простой индекс респектабельности докторов 2-го тома $\mu_2 = 5$.

Простой индекс не докторов 1-го тома $\eta_2 = 17$.

Относительный индекс респектабельности 2-го тома $T_2 = 23\%$.

Общий индекс респектабельности 2-го тома $R_2 = (23\%, 14, 0)$.

Том 3. Доктора наук и их баллы.

1. Скворцов Сергей Владимирович = 1/2;
2. Перепелкин Дмитрий Александрович = 1/2 + 1/2 + 1/2 = 3/2.

Общее число участников – **73**.

Простой индекс респектабельности докторов 3-го тома $\mu_3 = 2$.

Простой индекс не докторов 3-го тома $\eta_3 = 27$.

Относительный индекс респектабельности 3-го тома $T_3 = 6 \%$.

Общий индекс респектабельности 3-го тома $R_3 = (6 \%, 2, 0)$.

Том 4. Доктора наук и их баллы.

1. Каширин Игорь Юрьевич = $1 + 1 = 2$;
2. Белов Владимир Викторович = $1/2 + 1/2 = 1$;
3. Пылькин Александр Николаевич = $1/3 + 1/2 = 5/6$;
4. Костров Борис Васильевич = $1/4 + 1/5 = 9/20$;
5. Рябинин Алексей Валерьевич = $1/3$;
6. Дубинин Владимир Николаевич = $1/4$;
7. Евдокимова Елена Николаевна = $1/2$;
8. Михеев Анатолий Александрович = $1/2$.

Общее число участников – **83**.

Простой индекс респектабельности докторов 4-го тома $\mu_4 = 6$.

Простой индекс не докторов 4-го тома $\eta_4 = 31$.

Относительный индекс респектабельности 4-го тома $T_4 = 16\%$.

Общий индекс респектабельности 4-го тома $R_4 = (16\%, 8, 2)$.

Том 5. Доктора наук и их баллы.

1. Дмитриев Олег Сергеевич = $1/2$;
2. Миронов Валентин Васильевич = $1+1+1+1 = 4$;
3. Чернов Владимир Георгиевич = 1 ;
4. Багров Александр Викторович = $1/3$;
5. Муртазов Андрей Константинович = $1/3$;
6. Белов Владимир Викторович = $1/2$;
7. Ключко Владимир Константинович = 1 .

Общее число участников – **45**.

Простой индекс респектабельности докторов 5-го тома $\mu_5 = 6$.

Простой индекс не докторов 5-го тома $\eta_5 = 21$.

Относительный индекс респектабельности 5-го тома $T_5 = 22 \%$.

Общий индекс респектабельности 4-го тома $R_5 = (22 \%, 7, 6)$.

Том 6. Доктора наук и их баллы.

1. Таганов Александр Иванович = $1/3 + 1/3 = 2/3$;
2. Васильев Е.П. = $1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/3 = 11/6$;
3. Пруцков Александр Викторович = 1 ;
4. Немтинов Владимир Алексеевич, = $1/2$;
5. Чернов Евгений Иванович, = $1/2 + 1/2 = 1$;
6. Жулев Владимир Иванович = $1/3$.

Общее число участников – **65**.

Простой индекс респектабельности докторов 6-го тома $\mu_6 = 5$.

Простой индекс не докторов 6-го тома $\eta_6 = 32$.

Относительный индекс респектабельности 6-го тома $T_6 = 14 \%$.

Общий индекс респектабельности 6-го тома $R_6 = (14 \%, 6, 1)$.

Том 7. Доктора наук и их баллы.

1. Евдокимова Елена Николаевна, = $1/2 + 1/2 = 1$;
2. Белов Владимир Викторович = $1/2$;
3. Перфильев Сергей Валерьевич = $1/2 + 1/2 = 1$.

Общее число участников – **63**.

Простой индекс респектабельности докторов 7-го тома $\mu_7 = 2$.

Простой индекс не докторов 7-го тома $\eta_6 = 30$.

Относительный индекс респектабельности 7-го тома $T_7 = 6 \%$.

Общий индекс респектабельности 7-го тома $R_7 = (6 \%, 3, 0)$.

Том 8. Доктора наук и их баллы.

1. Чеглакова Светлана Григорьевна = 1/2;

2. Карзаева Наталья Николаевна = 1.

Общее число участников – 55.

Простой индекс респектабельности докторов 8-го тома $\mu_8 = 1$.

Простой индекс не докторов 8-го тома $\eta_8 = 48$.

Относительный индекс респектабельности 8-го тома $T_8 = 2 \%$.

Общий индекс респектабельности 8-го тома $R_8 = (2 \%, 2, 1)$.

Том 9. Доктора наук и их баллы.

1. Гребенкина Лидия Константиновна = 1/2;

2. Соколов Александр Станиславович = 1/2.

Общее число участников – 117.

Простой индекс респектабельности докторов 9-го тома $\mu_9 = 1$.

Простой индекс не докторов 9-го тома $\eta_9 = 45$.

Относительный индекс респектабельности 9-го тома $T_9 = 2 \%$.

Общий индекс респектабельности 9-го тома $R_9 = (2 \%, 2, 0)$.

Том 10. Доктора наук и их баллы.

1. Коновалов Сергей Валерьевич = 1/3;

2. Шефер Ольга Робертовна = 1/3;

3. Бурлакова Татьяна Вячеславовна = 1/2;

4. Белов Владимир Викторович = 1/2.

Общее число участников – 110.

Простой индекс респектабельности докторов 10-го тома $\mu_{10} = 1$.

Простой индекс не докторов 10-го тома $\eta_{10} = 45$.

Относительный индекс респектабельности 10-го тома $T_{10} = 2 \%$.

Общий индекс респектабельности 10-го тома $R_{10} = (2 \%, 4, 0)$.

В целом по всем трудам СТНО-2022 данные таковы:

Общее число участников – 763.

Простой индекс респектабельности докторов СТНО $\mu_{\text{СТНО}} = 32$.

Простой индекс респектабельности не докторов СТНО $\eta_{\text{СТНО}} = 329$.

Относительный индекс респектабельности СТНО $T_{\text{СТНО}} = 9 \%$.

Общий индекс респектабельности СТНО $R_{\text{СТНО}} = (9 \%, 53, 11)$.

Хорошо это или плохо?

Ранжирование научных мероприятий по индексу респектабельности

Представляется, что ранжирование научных мероприятий по индексу респектабельности может быть проведено по эвристическому правилу:

Если общий индекс респектабельности $R > 30\%$, то «отлично».

Если $10\% < R \leq 30\%$, то «хорошо».

Если $2\% < R \leq 10\%$, то «удовлетворительно».

Если $0\% < R \leq 2\%$, то «неплохо».

Если $R = 0\%$, то «всё будет хорошо».

Замечание 2. Аналогично может быть рассмотрен индекс представительности отдельного ученого за некое число K мероприятий и выделены наиболее часто публикующиеся ученые (в усредненном понимании числа их публикаций). *Конец замечания.*

Заключение

Эта работа – попытка отойти от принятых субъективных шаблонов и схем в оценке уровня респектабельности (представительности) научных мероприятий: конференций, симпозиумов, форумов, поставить этот процесс оценки на объективную, научную основу.

Предложенная методика не имеет аналогов, и одновременно находится в полном соответствии с классической методикой Хирша и ее более «продвинутыми» модернизациями в теме оценки публикационной активности научных работников.

Такая объективная оценка поможет выделить лидеров и аутсайдеров представления научной деятельности и тем самым стимулировать их публикационную активность на мероприятиях. Кроме того, методика позволяет подключить к этому процессу искусственный интеллект (ИИ) и проанализировать более «тонкие» его моменты на основе нестандартных логик [17 – 21].

Попытка передать этот анализ ИИ может сопровождаться появлением *вирусов* в управлении этим программным комплексом. Преодоление влияния вирусов планируется осуществить на основе теории вирусов, разработанной на кафедре высшей математики РГРТУ [автор анонсирует выход в свет предположительно в 2023 г. научной монографии В.В. Миронов, В.В. Тарасов* (главный автор) ТЕОРИЯ СИНТЕЗА НАДЕЖНЫХ СХЕМ И АНТИВИРУСОВ В СИСТЕМАХ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ, посвященной основателю теории вирусов Тарасову Вячеславу Владимировичу].

В заключение я хочу поблагодарить Кристину В. Миронову (к.т.н., ведущий специалист крупной IT-компании) за полезные советы в реализации идеи и за помощь в поиске и анализе очень большой информации по всей этой проблематике в сети Интернет.

Библиографический список

1. Hirsch, J. E. An index to quantify an individual's scientific research output / J. E. Hirsch // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America — 2005. — Vol. 102. - № 46. — P. 16569—16572.
2. Tagiew, R Behavior mining in h-index ranking game/ R. Tagiew, D.I. Ignatov // CEUR Workshop Proceedings. — 2017. — Vol. 1968. — P. 52—61.
3. Имаев, В. Технологии увеличения индекса Хирша и развитие имитационной науки / В. Имаев // Комиссия РАН по борьбе с лженаукой и фальсификацией научных исследований. В защиту науки. — 2016. — № 17. — С. 38—51.
4. Демина, Н. Хиршемания и хиршефобия / Н. Демина // «Троицкий вариант — Наука». — Режим доступа: <https://trv-science.ru/2016/12/06/khirshemaniya-i-khirshefobiya/>
5. Михайлов, О.В. Новая версия индекса Хирша – j-индекс / О.В. Михайлов // Вестник РАН. - 2014. - Т. 84, № 6. — С. 532—535.
6. Egghe, L. Theory and practise of the g-index / L. Egghe // Scientometrics. – 2006. - Vol. 69. - No 1. - pp. 131—152.
7. Kosmulski, M. I. A bibliometric index / M.I. Kosmulski // Forum Akademickie. — 2006. — Vol. 11. — p. 31.
8. Prathap, G. Hirsch-type indices for ranking institutions' scientific research output / G. Prathap // Current Science journal. — 2006. — Vol. 91 (11). — P. 1439.
9. Jones, T. Finding a Way Through the Scientific Literature: Indexes and Measures /T. Jones, S. Huggett, J. Kamalski // World Neurosurgery. — 2011. — Vol. 76. - № 1, 2. — pp. 36—38.
10. Холодов, А.С. Об индексах цитирования научных работ / А.С. Холодов // Вестник РАН. – 2015. - Т. 85, № 4. - С. 310-320
11. Мазов, Н.А. Альтернативные подходы к оценке научных результатов / Н.А. Мазов, В.Н. Гуреев // Вестник РАН. - 2015. - Т. 85, № 2. – С. 115-122.
12. Кузнецов, А.В. Для начала надо навести порядок в существующей системе РИНЦ. Письма в редакцию / А.В. Кузнецов // Вестник РАН. - 2014. - Т. 84, № 3. - С. 268-269.
13. Waltman, L. Robust Evolutionary Algorithm Design for Socio-Economic Simulation: Some Comments / Ludo Waltman, Nees Jan van Eck. // Comput. Econ. — 2009. - 33:103–105, DOI 10.1007/s10614-008-9148-0.
14. Миронов, В.В. Новые индексы публикационной активности / В.В. Миронов // Вестник РАН, 2020, Т. 90, № 10, С. 959 – 966.

15. Миронов, В.В. Обработка данных о публикационной активности автора в составе авторского коллектива с учетом квартилей журналов / В.В. Миронов // Научно-техническая информация. Серия 2. Информационные процессы и системы, 2020, № 11, С. 30 – 35.
16. Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2022 [текст]: сб. тр. V междунар. науч.-техн. форума: в 10 т. Т.5./ под общ. ред. О.В. Миловзорова. – Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2022.
17. Миронов, В. В. Применение алгебры логики в моделях технических систем: история и современность / В.В. Миронов, Е.Б. Федосова // Вопросы истории естествознания и техники. – 2022. – Т. 43. – С. 328-349 .
18. Миронов, В.В. Новые алгебры логики на индексированных логических множествах / В.В. Миронов // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2022 [текст]: сб. тр. V междунар. науч.-техн. форума: в 10 т. Т.5./ – Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2022. С. 29 – 43.
19. Миронов, В.В. Новые некоммутативные алгебры логики. / В.В. Миронов / В.В. Миронов // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2022 [текст]: сб. тр. V междунар. науч.-техн. форума: в 10 т. Т.5./ – Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2022. С. 43 – 54.
20. Миронов, В.В. Новые алгебры логики на логических словах и проблема тождеств. / В.В. Миронов // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2022 [текст]: сб. тр. V междунар. науч.-техн. форума: в 10 т. Т.5./ – Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2022. С. 54 – 69.
21. Миронов, В.В. Конечные, конечномерные и конечнопорожденные абелевы алгебры логики / В.В. Миронов // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2022 [текст]: сб. тр. V междунар. науч.-техн. форума: в 10 т. Т.5./ – Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2022. С. 69 – 76.

УДК 519.65; ГРНТИ 27.43.15

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ СГЛАЖЕННОЙ ОЦЕНКИ ВЕКТОРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

К.А. Ципоркова, Г.С. Лукьянова

*Рязанский государственный радиотехнический университет,
Россия, Рязань, ktsiporkova@list.ru*

Аннотация. В настоящей работе рассматривается возможность улучшения качества оценивания компонент случайного вектора, основанием для которой является использование корреляционной связи между ними. Оценка строится в виде взвешенной суммы слагаемых ортогонального разложения измерений. Получен алгоритм оптимального выбора весовых коэффициентов.

Ключевые слова: векторный полезный сигнал, ортогональное разложение, сглаженная оценка, критерий качества.

THE METHOD OF ORTHOGONAL DECOMPOSITIONS IN THE CONSTRUCTION OF A SMOOTHED ESTIMATE OF A VECTOR RANDOM PROCESS

K.A. Tsiporkova, G.S. Lukyanova

*Ryazan State Radiotechnical University,
Russia, Ryazan, ktsiporkova@list.ru*

Abstract. In this paper, we consider the possibility of improving the quality of estimating the components of a random vector, the basis for which is the use of a correlation relationship between them. The estimate is constructed as a weighted sum of the terms of the orthogonal expansion of the measurements. The algorithm of optimal choice of weight coefficients is obtained.

Keywords: vector useful signal, orthogonal decomposition, smoothed evaluation, quality criterion.

1. Векторный полезный сигнал $\bar{\xi}(t) = \text{col}(\xi_i(t))_{i=1}^n$, компоненты которого $\xi_i(t)$ имеют нулевое математическое ожидание, измеряется с ошибкой $\bar{v}(t) = \text{col}(v_i(t))_{i=1}^n$, некоррелированной с полезным сигналом ($M[\bar{v}(t)] = \bar{0}$):

$$\bar{\eta}(t) = \bar{\xi}(t) + \bar{v}(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Статистическая модель полезного сигнала и помехи задается матрицами ковариаций:

$$R = [R_{ij}(t_1, t_2)]_{i,j=1}^n = [M[\xi_i(t_1)\xi_j(t_2)]]_{i,j=1}^n;$$

$$N = [N_{ij}(t_1, t_2)]_{i,j=1}^n = [M[v_i(t_1)v_j(t_2)]]_{i,j=1}^n.$$

Условия центрированности полезного сигнала и помехи приняты для упрощения преобразований и повышения наглядности результатов. Отказ от этих условий не меняет на качественном уровне алгоритма решения и получаемых результатов.

Качество сглаженной на интервале наблюдения оценки $\hat{\xi}$ определяется величиной квадратичного критерия

$$\begin{aligned} J &= \int_0^T M \left[\left(\hat{\xi}(t) - \bar{\xi}(t) \right)^T B \left(\hat{\xi}(t) - \bar{\xi}(t) \right) \right] dt = \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \int_0^T b_{lm} M \left[\left(\hat{\xi}_l(t) - \bar{\xi}_l(t) \right) \left(\hat{\xi}_m(t) - \bar{\xi}_m(t) \right) \right] dt \end{aligned} \quad (1)$$

где $B = [b_{lm}]_{l,m=1}^n$ - симметрическая положительно определенная матрица, выбор элементов которой диктуется содержанием решаемой задачи.

Оценка $\hat{\xi}_i(t)$ строится на основе разложения измерений $\eta_j(t)$ по заданной ортонормированной системе функций $\{\varphi_k(t)\}$ [1]

$$\eta_j(t) = \sum_k \gamma_{jk} \varphi_k(t); \gamma_{jk} = \int_0^T \eta_j(t) \varphi_k(t) dt.$$

Наличие корреляционной связи между компонентами полезного сигнала является основанием для включения в структуру оценки $\hat{\xi}_i(t)$ слагаемых, формируемых не только за счет разложения $\eta_i(t)$, но и всех остальных измерений

$$\hat{\xi}_i(t) = \sum_k \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} \gamma_{jk} \varphi_k(t), \quad (2)$$

где $a_{ij}^{(k)}$ - весовые коэффициенты, определяющие «вклад» измерений $\eta_j(t)$ в структуру оценки $\hat{\xi}_i(t)$ [2].

Таким образом, задача оптимизации сглаженной оценки формируется следующим образом

$$J = \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n b_{lm} J_{lm} \rightarrow \min_{a_{ij}^{(k)}}, \quad (3)$$

$$\text{где } J_{lm} = \int_0^T M \left[\left(\sum_k \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} \gamma_{jk} \varphi_k(t) - \bar{\xi}_l(t) \right) \left(\sum_s \sum_{p=1}^n a_{mp}^{(s)} \gamma_{ps} \varphi_s(t) - \bar{\xi}_m(t) \right) \right] dt.$$

2. В целях компактности изложения запишем выражение для критерия (1) в матричной форме. Введем обозначения $A_k = [a_{ij}^{(k)}]_{i,j=1}^n$; $\Gamma_k = \text{col}(\gamma_{jk})_{j=1}^n$. Тогда формула (2) для сглаженной оценки принимает вид

$$\hat{\xi}(t) = \sum_k A_k \Gamma_k \varphi_k(t) \quad (2')$$

В результате

$$J = \int_0^T M \left[\left(\sum_k A_k \Gamma_k \varphi_k(t) - \bar{\xi}(t) \right)^T B \left(\sum_s A_s \Gamma_s \varphi_s(t) - \bar{\xi}(t) \right) \right] dt = \\ = \int_0^T M [\bar{\xi}^T(t) B \bar{\xi}(t)] dt - 2 \sum_k \int_0^T M [(A_k \Gamma_k)^T \bar{\xi}(t)] \varphi_k(t) dt + \sum_k M [(A_k \Gamma_k)^T B (A_k \Gamma_k)] \quad (1')$$

После преобразований критерий качества окончательно выглядит так:

$$J = J_0 - \sum_k H_k, \quad (1'')$$

где $J_0 = \int_0^T M [\bar{\xi}^T(t) B \bar{\xi}(t)] dt$;

$$H_k = G_k \left(2 \bar{\xi}^T(t_1) A_k^T B \bar{\xi}(t_2) - \bar{\eta}^T(t_1) A_k^T B A_k \bar{\eta}(t_2) \right);$$

$$G_k(R(t_1, t_2)) = \int_0^T \int_0^T R(t_1, t_2) \varphi_k(t_1) \varphi_k(t_2) dt_1 dt_2.$$

Задача оптимизации (3), таким образом, сводится к максимизации H_k , зависящих от n^2 параметров $a_{ij}^{(k)}$, $i, j = \overline{1, n}$.

Действуя стандартным образом приходим к системе n^2 уравнений:

$$\frac{\partial H_k}{\partial a_{ij}^{(k)}} = 0 \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n b_{i\alpha} G_k(R_{j\beta} + N_{j\beta}) a_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{\alpha=1}^n b_{i\alpha} G_k(R_{j\alpha}); \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Условие разрешимости (4), т.е. невырожденности матрицы $[b_{i\alpha} G_k(R_{j\beta} + N_{j\beta})]_{\alpha, \beta=1}^n$ сводится к выполнению следующих соотношений

$$|B| \neq 0; \quad |G_k(R_{j\beta} + N_{j\beta})| \neq 0 \quad (5)$$

Ниже рассмотрены несколько более простых моделей, позволяющих наглядно представить алгоритм и результат решения задачи.

3. В том случае, когда решаемая задача предполагает оценивание лишь одной (первой) компоненты многомерного случайного процесса, то критерий качества упрощается:

$$J = \int_0^T M \left[\left(\hat{\xi}_1(t) - \xi_1(t) \right)^2 \right] dt \rightarrow \min$$

В формуле оценки изменяются (упрощаются) обозначения

$$\hat{\xi}_1(t) = \sum_k \sum_{i=1}^n a_{ki} \gamma_{ik} \varphi_k(t).$$

После преобразований критерий качества выглядит так

$$J = \int_0^T D_{\xi_1}(t) dt - \sum_k H_k,$$

где $H_k = 2 \sum_{i=1}^n a_{ki} G_k(R_{1i}) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ki} a_{kj} G_k(R_{ij} + N_{ij});$

$D_{\xi_1}(t) = R_{11}(t, t)$ - дисперсия $\xi_1(t)$.

Минимизация критерия качества по a_{ki} сводится к решению задачи

$$H_k \rightarrow \max_{a_{ki}} \Rightarrow \sum_{j=1}^n G_k(R_{ij} + N_{ij}) a_{ki} = G_k(R_{1i}); \quad i = \overline{1, n}. \quad (4')$$

Результат полностью согласуется с формулами общего случая (п.2) при $b_{11} = 1$ и $b_{ij} = 0; i, j \neq 1$. Существование решения обеспечивается выполнением второго из условий (5).

4. Представляет интерес второй важный случай построения критерия качества, когда матрица B является диагональной:

$$B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n), \quad b_s > 0, s = \overline{1, n}.$$

В этом варианте постановки задачи формула (1) приобретает вид (1'')

$$J = J_0 - \sum_k H_k,$$

где $J_0 = \sum_{s=1}^n b_s \int_0^T D_{\xi_s}(t) dt$;

$$H_k = \sum_{s=1}^n b_s \left(2 \sum_{i=1}^n a_{si}^{(k)} G_k(R_{si}) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{si}^{(k)} a_{sj}^{(k)} G_k(R_{ij} + N_{ij}) \right).$$

Положительность b_s позволяет использовать для максимизации H_k результат предыдущего пункта:

$$\sum_{j=1}^n G_k(R_{ij} + N_{ij}) a_{sj}^{(k)} = G_k(R_{si}); \quad i, s = \overline{1, n}. \quad (4'')$$

Таким образом, алгоритм решения остается прежним, за тем лишь исключением, что решается n аналогичных квадратных систем.

5. Следуя результатам, полученным в пункте 2 и ограничившись случаем $n = 2$, приходим к формулам оценок

$$\hat{\xi}_1(t) = \sum_k \left(a_{11}^{(k)} \gamma_{1k} + a_{12}^{(k)} \gamma_{2k} \right) \varphi_k(t);$$

$$\hat{\xi}_2(t) = \sum_k \left(a_{21}^{(k)} \gamma_{1k} + a_{22}^{(k)} \gamma_{2k} \right) \varphi_k(t),$$

содержащим для каждого конкретного значения k четыре, подлежащих определению параметра $a_{ij}^{(k)}; i, j = 1, 2$ / Система уравнений (4) в этом случае приобретает вид:

$$\begin{cases} b_{11} G_k(R_{11} + N_{11}) a_{11}^{(k)} + b_{11} G_k(R_{12} + N_{12}) a_{12}^{(k)} + b_{12} G_k(R_{11} + N_{11}) a_{21}^{(k)} + \\ \quad + b_{12} G_k(R_{12} + N_{12}) a_{22}^{(k)} = b_{11} G_k(R_{11}) + b_{12} G_k(R_{12}); \\ b_{11} G_k(R_{12} + N_{12}) a_{11}^{(k)} + b_{11} G_k(R_{22} + N_{22}) a_{12}^{(k)} + b_{12} G_k(R_{12} + N_{12}) a_{21}^{(k)} + \\ \quad + b_{12} G_k(R_{22} + N_{22}) a_{22}^{(k)} = b_{11} G_k(R_{12}) + b_{12} G_k(R_{22}); \\ b_{12} G_k(R_{11} + N_{11}) a_{11}^{(k)} + b_{12} G_k(R_{12} + N_{12}) a_{12}^{(k)} + b_{22} G_k(R_{11} + N_{11}) a_{21}^{(k)} + \\ \quad + b_{22} G_k(R_{12} + N_{12}) a_{22}^{(k)} = b_{12} G_k(R_{11}) + b_{22} G_k(R_{12}); \\ b_{12} G_k(R_{12} + N_{12}) a_{11}^{(k)} + b_{12} G_k(R_{22} + N_{22}) a_{12}^{(k)} + b_{22} G_k(R_{12} + N_{12}) a_{21}^{(k)} + \\ \quad + b_{22} G_k(R_{22} + N_{22}) a_{22}^{(k)} = b_{12} G_k(R_{12}) + b_{22} G_k(R_{22}). \end{cases}$$

Определитель этой системы удобно представить в блочной форме

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} J_k & b_{12} J_k \\ b_{12} J_k & b_{22} J_k \end{vmatrix}; \quad J_k = \begin{bmatrix} G_k(R_{11} + N_{11}) & G_k(R_{12} + N_{12}) \\ G_k(R_{12} + N_{12}) & G_k(R_{22} + N_{22}) \end{bmatrix}.$$

Непосредственные вычисления дают

$$\Delta = |B|^2 |J_k|^2$$

и, таким образом, условия (5) обеспечивают существование единственного решения системы (4'').

Достаточные условия максимума H_k легко проверяются на основании стандартной процедуры [3].

6. В качестве примера рассмотрим следующую модель:

$$\xi_1(t) = ct^2; \quad \xi_2(t) = \dot{\xi}_1(t) = 2ct,$$

где c – случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $C = M[c^2]$. Тогда

$$R = \begin{bmatrix} Ct_1^2 t_2^2 & 2Ct_1^2 t_2 \\ 2Ct_1^2 t_2 & 4Ct_1 t_2 \end{bmatrix}.$$

Широкополосные погрешности измерений, считая их центрированными и некоррелированными, будем аппроксимировать белым шумом. В этом случае

$$N = \begin{bmatrix} S\delta(t_2 - t_1) & 0 \\ 0 & Q\delta(t_2 - t_1) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, рассматриваемая модель представляет собой задачу оценивания квазидетерминированного [4] (квадратичного) сигнала по измерению самого сигнала и его производной.

Подобная постановка задачи предполагает [5] использование в качестве базисной системы функций ортонормированные на $[0, T]$ многочлены (модифицированные многочлены Лежандра [6]):

$$P_0(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}; \quad P_1(t) = \frac{2\sqrt{3}}{T\sqrt{T}}\left(t - \frac{T}{2}\right); \quad P_2(t) = \frac{2\sqrt{5}}{T^2\sqrt{T}}\left(3t^2 - 3Tt + \frac{T^2}{2}\right); \dots$$

Основываясь на свойствах ортогональных многочленов [6], получаем при $k \geq 3$:

$$H_k = -\left(b_{11}a_{11}^{(k)^2} + 2b_{12}a_{11}^{(k)}a_{21}^{(k)} + b_{22}^2a_{21}^{(k)^2}\right)S - \left(b_{11}a_{12}^{(k)^2} + 2b_{12}a_{12}^{(k)}a_{22}^{(k)} + b_{22}^2a_{22}^{(k)^2}\right)Q.$$

В силу положительной определенности матрицы B $H_k < 0$, $k \geq 3$.

Поэтому использование для построения сглаженной оценки многочленов $P_k(t)$, $k \geq 3$, исключается.

Для $k \leq 2$ легко вычисляются G_k – коэффициенты системы (4'') и находится решение данной системы.

Так при $k = 2$ результаты решения имеют вид:

$$a_{12}^{(2)} = a_{22}^{(2)} = a_{21}^{(2)} = 0; \quad a_{11}^{(2)} = \frac{CT^S}{CT^S + 180S}.$$

Равенство нулю трех коэффициентов из четырех объясняется различной «формой» процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ – для оценки линейного сигнала $\xi_2(t)$ многочлен второй степени оказывается ненужным.

7. Изложенный выше подход к построению сглаженной оценки является естественным следствием и продолжением метода предложенного в [1]. Содержательно рассмотренная постановка задачи близка к методике, использованной в [7], отличаясь формой представления исходных данных. Тем не менее алгоритм, предложенный в настоящей работе, позволяет рассматривать более широкий спектр задач.

Библиографический список

1. Дубовиков А.В. Выделение полезного сигнала из аддитивной смеси с помехой разложением измерения в ряд Фурье.// Математические методы оптимального управления и обработки данных: Межвуз. Сб. Рязань: РГРТА 1983. С. 32-36.
2. Дубовиков А.В. Задача комплексирования измерительных данных при аппроксимации случайного сигнала ортогональным рядом// Математические методы в научных исследованиях: Межвуз. Сб. Рязань 2002. С. 6-10.
3. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М., Мир, 1972.
4. Челпанов И.Б. Оптимальная обработка сигналов в навигационных системах. М., Наука, 1967.
5. Дубовиков А.В. О свойствах оптимального ортогонального разложения// Математические методы в научных исследованиях: Межвуз. Сб. Рязань, 2004. С. 15-18.
6. Суэтин П.К. Классические ортогональные многочлены. М., Наука, 1979.
7. Дубовиков А.В., Дубовиков Д.А., Ципоркова К.А. Метод ортогональных разложений при совместной обработке сигналов разнородных измерителей случайного сигнала// Математические методы в экономических исследованиях: Межвуз. Сб. Рязань, 2006. С. 3-7.

УДК 517.925.52; ГРНТИ 27.29.17

О НЕКОТОРЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ПРИЗНАКАХ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ТРИВИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.В. Абрамов

*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина,
Российская Федерация, Рязань, v.abramov@365.rsu.edu.ru*

Аннотация. Рассматриваются нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Предполагается, что коэффициенты правых частей имеют интервальные ограничения. Установлены достаточные признаки устойчивости нулевого решения. В рассуждениях использован переход к ассоциированной робастной системе.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, устойчивость, робастная устойчивость, неравенство Важевского.

ON SOME COEFFICIENT SIGNS OF STABILITY FOR TRIVIAL SOLUTIONS OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

V.V. Abramov

*Ryazan State University named after S.A. Esenin,
Russia, Ryazan, v.abramov@365.rsu.edu.ru*

The summary. Normal systems of ordinary differential equations are considered. It is assumed that the coefficients of the right-hand sides have interval constraints. Sufficient signs of stability of the null solution have been established. In the reasoning, the transition to an associated robust system is used.

Keywords: differential equations, stability, robust stability, Vazhevsky inequality.

Проблема исследования устойчивости тривиального решения системы с неточно заданными коэффициентами имеет важное значение для приложений, когда требуется выяснить, целесообразно ли дополнительно уточнять доверительные оценки коэффициентов конструируемой модели, чтобы она демонстрировала «стабильное поведение» программного движения. Началом целой серии исследований по данной проблеме послужила работа [1], где в терминах свойств четырех «угловых» многочленов был получен критерий устойчивости линейной однородной автономной системы с интервальными ограничениями на постоянные коэффициенты. В работе [2] для линейного уравнения n -го порядка решена задача определения расстояния до границы области устойчивости в пространстве коэффициентов, принадлежащих классу периодических функций. К настоящему времени различным аспектам проблемы робастной устойчивости и робастного управления линейных систем посвяще-

на обширная литература, установлены разнообразные критерии устойчивости (Харитонов, Неймарка, Цыпкина – Поляка и другие). В данной работе переменные коэффициенты исследуемых систем предлагается рассматривать как неточно заданные величины с интервальными ограничениями. При этом исследование устойчивости сводится к задаче о робастной устойчивости соответствующей линейной системы. Такой подход способствует алгоритмизации исследования.

Оптимизационный критерий

Рассмотрим систему n уравнений, в которой постоянные коэффициенты заданы лишь интервальными оценками

$$\dot{x} = Ax, \quad A = (a_{ij}), \quad a_{ij} \in [a_{ij}^{(1)}; a_{ij}^{(2)}], \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (1)$$

С точки зрения применения компьютерных вычислений удобен следующий очевидный критерий, справедливость которого непосредственно следует из критерия Рауса – Гурвица [3].

Лемма 1 (оптимизационный критерий робастной устойчивости). Система (1) робастно устойчива (устойчива при любом выборе допустимых коэффициентов) тогда и только тогда, когда для матрицы A положительны минимумы всех главных миноров соответствующей матрицы Гурвица.

Устойчивость линейной неавтономной системы

Для линейных однородных систем асимптотическая устойчивость произвольного решения равносильна устойчивости нулевого решения. При этом принято говорить об устойчивости системы. Для неавтономных линейных систем проблема устойчивости решается на основе оценки показателей Ляпунова (школы В.М. Миллионщикова, Н.А. Изобова). При этом в общем случае возникают громоздкие вычисления. Поэтому часто требуется найти разумный компромисс между эвристической и алгоритмической сторонами применяемых методов, между потенциальной «тонкостью» результата и практичностью используемых процедур.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (2)$$

в которой $A(t) = (a_{ij}(t))$ — $n \times n$ -матрица с ограниченными коэффициентами, $a_{ij}(t) \in \langle a_{ij}^{(1)}; a_{ij}^{(2)} \rangle$ при $t \in I$, I — промежуток, неограниченный сверху, $i, j = \overline{1, n}$.

Определение 1. Система (2) устойчива, если ее нулевое решение равномерно экспоненциально устойчиво, то есть существует такое $b > 0$, что для любого $t_0 \in I$ и любого решения $x(t)$ при всех $t \geq t_0$ справедливо неравенство $\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| \exp(-b(t - t_0))$.

Допустим, $\Lambda(t)$ — наибольшее собственное значение матрицы $S_A(t)$ (здесь и далее $S_D(\cdot) = 0,5[D(\cdot) + D^T(\cdot)]$ — симметрическая компонента матрицы $D(\cdot)$). Для любого решения $x(t)$ системы (2) по неравенству Важевского [4] имеет место оценка евклидовой нормы $\|x(t)\|_2 \leq \|x(t_0)\|_2 \exp\left(\int_{t_0}^t \Lambda(s) ds\right)$, $t_0, t \in I$. Итак, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Если $\Lambda(t) \leq \Lambda^* < 0$ при всех $t \geq t_0 \in I$, то система (2) устойчива.

Для системы (2) построим соответствующую систему вида (1)

$$\dot{x} = B \cdot x, \quad B = (b_{ij}), \quad b_{ij} \in \langle b_{ij}^{(1)}; b_{ij}^{(2)} \rangle, \quad b_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2}(a_{ij}^{(1)} + a_{ji}^{(1)}), \quad b_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2}(a_{ij}^{(2)} + a_{ji}^{(2)}). \quad (3)$$

Если система (3) робастно устойчива (это свойство эффективно проверяется по лемме 1), то при любом выборе допустимых коэффициентов матрицы B для собственных значений λ_i матрицы B справедливо неравенство вида $\max_{i=1,n} \operatorname{Re} \lambda_i = \Lambda^* < 0$. Для системы (2) справедлива матричная оценка $B^{(1)} = (b_{ij}^{(1)}) \leq S_A(t) \leq B^{(2)} = (b_{ij}^{(2)})$ (верна для всех соответствующих элементов), $t \in I$. Тогда для любого $t \in I$ имеет место оценка $\Lambda(t) \leq \Lambda^* < 0$. Значит, в силу леммы 2 система (2) устойчива по определению 1. Таким образом, установлено следующее утверждение.

Теорема 1. Если робастно устойчива линейная система вида (3), соответствующая системе (2), то система (2) устойчива.

Пример 1. В монографии [6] вторым методом Ляпунова при $|\varepsilon| < 1/(2a)$ установлена асимптотическая устойчивость системы $\begin{cases} \dot{x} = (-0,5 + \varepsilon a \cos 2t)x + (1 - \varepsilon a \sin 2t)y, \\ \dot{y} = (-1 - \varepsilon a \sin 2t)x + (-0,5 - \varepsilon a \cos 2t)y, \end{cases} \quad a > 0.$

Аналогичный вывод следует из теоремы 1. Действительно, при всех $t \in R$ симметрическая компонента матрицы коэффициентов данной системы удовлетворяет оценке

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - |\varepsilon|a & -|\varepsilon|a \\ -|\varepsilon|a & -\frac{1}{2} - |\varepsilon|a \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + \varepsilon a \cos 2t & -\varepsilon a \sin 2t \\ -\varepsilon a \sin 2t & -\frac{1}{2} - \varepsilon a \cos 2t \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + |\varepsilon|a & |\varepsilon|a \\ |\varepsilon|a & -\frac{1}{2} + |\varepsilon|a \end{bmatrix}.$$

Левая и правая части этого неравенства – матричные оценки в соответствующей системе (3), для которой имеют место оценки главных миноров матрицы Гурвица: $-trB \geq 1 - 2|\varepsilon|a$, $\det B \geq 0,25 - |\varepsilon|a$. Значит, при $|\varepsilon| < 1/(4a)$ система (3) робастно устойчива по лемме 1. То есть рассматриваемая система равномерно экспоненциально устойчива. Пример показывает, что предложенный метод дал более «грубый» результат, но более «технологичным» способом.

Устойчивость нулевого решения нелинейной системы

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = D(t, x)x, \quad (4)$$

в которой при некотором $\delta > 0$ матрица удовлетворяет условию $D(t, x) \in C(I \times S_\delta)$ и существуют такие матрицы $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$, что для $t \in I$ и $x: \|x\|_2 \leq \delta$ имеет место матричная покомпонентная оценка $B^{(1)} \leq S_D(t, x) \leq B^{(2)}$. (Далее увидим, что шар $\|x\|_2 \leq \delta$ – это оценка области устойчивости для нулевого решения системы (4).)

Теорема 2. Если системе (4) локально соответствует робастно устойчивая система (3), то решение $x = 0_n$ системы (4) равномерно экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Для функции $V = \|x\|_2^2$ при произвольных $t \in I$ и $x: \|x\|_2 \leq \delta$, используя свойства скалярного произведения, вычислим производную в силу системы (2) $\dot{V} = (D(t, x)x, x) + (x, D(t, x)x) = 2(x, S_D(t, x)x) \leq 2\lambda_{\max}(S_D(t, x))V$, где $\lambda_{\max}(Q)$ – наибольшее

собственное значение матрицы Q . По принципу построения системы (3) при произвольных $t \in I$ и $x: \|x\|_2 \leq \delta$ имеем $\lambda_{\max}(S_D(t, x)) \leq \max_{B^{(1)} \leq B \leq B^{(2)}} \{\lambda_{\max}(B)\}$. В силу робастной устойчивости системы (3) существует такое $L > 0$, что при $B^{(1)} \leq B \leq B^{(2)}$ справедлива оценка $\lambda_{\max}(B) \leq -L$. Тогда $\dot{V} \leq -2LV$. Проинтегрируем последнее неравенство. В результате для произвольно выбранных начального момента $t_0 \in I$ и решения $x(t)$ при условии $\|x(t_0)\|_2 \leq \delta$ получим оценку $\|x(t)\|_2 \leq \|x(t_0)\|_2 \exp(-2L(t-t_0))$, в которой $t \geq t_0$. По определению 1 теорема 2 доказана.

Пример 2. Нулевое решение системы $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^3 x_2^2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2 x_2^3. \end{cases}$ асимптотически устойчиво по

линейному приближению. Аналогичный вывод справедлив по теореме 2.

Представим данную систему в виде (4). Тогда для $D = S_D = \begin{bmatrix} -1 + x_1^2 x_2^2 & 0 \\ 0 & -1 + x_1^2 x_2^2 \end{bmatrix}$

при $\|x\|_2 \leq \delta$ получим оценку $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \leq S_D \leq \begin{bmatrix} (\delta/2)^2 - 1 & 0 \\ 0 & (\delta/2)^2 - 1 \end{bmatrix}$. Значит, соответствующая система (3) робастно устойчива при $\delta < 2$. Оценка области устойчивости нулевого решения – любой круг $\|x\|_2 \leq \delta < 2$.

Рассмотрим систему n уравнений с малым параметром $\mu \in R^m$ вида

$$\dot{x} = D(t, x, \mu)x, \quad (5)$$

в которой матрица $D(t, x, \mu) \in C(I \times R^n \times R^m)$.

Допустим, при некотором $\delta > 0$ для любого $\mu: \|\mu\| < \delta$ найдутся такие число $q(\mu) \geq 0$, $\lim_{\|\mu\| \rightarrow 0} q(\mu) = 0$ и матрицы $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$, что при всех $t \in I$, $x: \|x\|_2 = q(\mu)$ справедлива оценка $B^{(1)} \leq S_D(t, x, \mu) \leq B^{(2)}$. При этом системе (5) локально соответствует семейство систем вида (3).

Определение 2. Решение $x = 0_n$ системы вида (5) равномерно μ -устойчиво, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, при котором для произвольно заданных $t_0 \in I$ и решения $x(t)$ из условий $\|\mu\| < \delta$ и $\|x(t_0)\| < \delta$ при всех $t \geq t_0$ следует неравенство $\|x(t)\| < \varepsilon$.

Теорема 3. Если системе (5) локально соответствует семейство робастно устойчивых систем вида (3), то решение $x = 0_n$ системы (5) равномерно μ -устойчиво.

Доказательство. Произвольно зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем такое $\delta_1 \in (0, \delta]$, что для всех $\mu: \|\mu\| < \delta_1$ имеет место оценка $q(\mu) < \varepsilon$. Допустим, $\gamma = q(\mu)$. Из условия робастной устойчивости семейства систем (3) аналогично доказательству теоремы 2 для функции $V = \|x\|_2^2$ в силу системы (5) при произвольных $t \in I$ и $\partial U_\gamma = \{x: \|x\|_2 = \gamma\}$ получим неравенство $\dot{V} \leq 2\lambda_{\max}(S_D(t, x, \varepsilon))V < 0$. То есть шар $\bar{U}_\gamma$ – положительно инвариантное множество системы (5) и для произвольных $t_0 \in I$ и решения $x(t)$ при условии $\|x(t_0)\| \leq \gamma$ для каждого $t \geq t_0$ справедлива оценка $\|x(t)\| \leq \gamma < \varepsilon$. Итак, по определению 2 теорема 3 доказана.

Заметим, что проблема устойчивости для системы вида (5) с периодическими коэффициентами решалась в работах [6, 7]. Если в условиях теоремы 3 при произвольно выбра-

ном μ существует кольцо $U_{q(\mu)+h} \setminus U_{q(\mu)-h}$, $h > 0$ (окрестность сферы $\partial U_{q(\mu)}$), на котором системе (5) соответствует робастно устойчивая система вида (3), то это кольцо – оценка области устойчивости нулевого решения системы (5) при выбранном параметре.

Пример 3. Для уравнения $\dot{x} = (\mu^2 - x^2)x$ нулевое решение μ -устойчиво [8]. Этот же вывод верен по теореме 3, так как $\mu^2 - x^2 = -\mu^2 = A = B < 0$ при любом $\mu \neq 0$ и при $|x| = q(\mu) = 2|\mu|$. В качестве оценки области устойчивости можно взять $\{x : 1,5|\mu| < |x| < 2,5|\mu|\}$.

Устойчивость нулевого решения полиномиальной системы

Исследуем случай устойчивости без построения системы (3). Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = f(a, x), \quad (6)$$

в которой $x \in R^n$, $f(a, x) = (f_1(a, x), \dots, f_n(a, x))$, $f_i(a, x) = \sum_{k=1}^{S_i} f_{ki}(a, x)$, a – набор коэффициентов, $f_{ki}(a, x) = (a_{ki}, x^k)$, x^k – вектор, составленный из всех различных произведений вида $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ ($k_1 + \dots + k_n = k$, $k_j \in N \cup \{0\}$, $j = \overline{1, n}$), $k = \overline{1, S_i}$, $i = \overline{1, n}$. При любом наборе $a \in A = \prod_{i=1}^n \prod_{k=1}^{S_i} A_{ki}$ система (6) имеет решение $x = 0_n$, в окрестности которого каждое решение $x(t, x_0, a)$ однозначно определяется начальным условием $x(0, x_0, a) = x_0$.

Будем предполагать, что $A_{ki} \neq \emptyset$ – компактные множества, $k = \overline{1, S_i}$, $i = \overline{1, n}$.

Определение 3. Решение $x = 0_n$ системы (6) устойчиво относительно множества M , $0_n \in M$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $a \in A$, $x_0 \in M(\delta) = \{x \in M : \|x\| < \delta\}$ и при любом $t > 0$ справедливо неравенство $\|x(t, x_0, a)\| < \varepsilon$. Решение $x = 0_n$ асимптотически устойчиво относительно M , если оно устойчиво относительно M и при любых $x_0 \in \text{int } M(\delta)$, $a \in A$ является притягивающим, то есть $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x_0, a)\| = 0$.

Любое множество $M(\delta)$ из определения 3 – это оценка области условной устойчивости нулевого решения.

Установим признак устойчивости решения нулевого решения системы (6) относительно конуса $K = \{x \in R^n : x \geq 0_n\}$. Для этого используем способ оценивания из работы [9].

Для определенности выберем и далее будем использовать норму $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Обозначим $\Lambda_1 = \{x \in K : \|x\| = 1\}$, $\Delta_k = A_{k1} \times \dots \times A_{kn} \times \Lambda_1$, $K_i = \{x \in K : x = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)\}$, $\Lambda_{li} = \{x \in K_i : \|x\| = 1\}$, $A_i = A_{li} \times \dots \times A_{S_i, i}$, $\Gamma_{ki} = A_{ki} \times \Lambda_{li}$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, S_i}$, $S = \max_{1 \leq i \leq n} S_i$. Составим для правых частей системы (6) в окрестности вершины конуса K мажорирующие многочлены: $P_i(\alpha) = \sum_{k=1}^{S_i} p_{ki} \alpha^{k-1}$, $i = \overline{1, n}$, $\bar{P}(\alpha) = \sum_{k=1}^S \bar{p}_k \alpha^{k-1}$, коэффициенты которых определены равенствами: $p_{ki} = \min_{\Gamma_{ki}} f_{ki}(a, x)$, $k = \overline{1, S_i}$, $i = \overline{1, n}$, $\bar{p}_k = \max_{\Delta_k} \sum_{i=1}^n f_{ki}(a, x)$, $k = \overline{1, S}$.

Теорема 4. Пусть существует такое число $\gamma_0 > 0$, что $P_i(\alpha) \geq 0$, $i = \overline{1, n}$ и $\bar{P}(\alpha) \leq 0$ ($\bar{P}(\alpha) < 0$) при $0 < \alpha < \gamma_0$. Тогда решение $x = 0_n$ системы (1) устойчиво (асимптотически устойчиво) относительно множества K .

Доказательство. 1. Произвольно выберем число $\gamma : 0 < \gamma < \gamma_0$ и рассмотрим окрестность $K(\gamma)$ вершины $x = 0_n$ конуса K . Граница $\partial K(\gamma)$ составлена из плоскостей: $F_i(x) = -x_i = 0$, $i = \overline{1, n}$, $\bar{F}(x, \gamma) = \sum_{i=1}^n x_i - \gamma = 0$. Выполним подстановку $x = \alpha \lambda$, в которой $\alpha > 0$ и $\lambda \in \Lambda_i$, если $x \in K_i$, или $\lambda \in \Lambda_1$, если $x \in K$. Допустим, при $0 < \alpha < \gamma_0$ справедливы неравенства $P_i(\alpha) \geq 0$, $i = \overline{1, n}$ и $\bar{P}(\alpha) \leq 0$. Тогда на множестве $\partial K(\gamma)$ справедливы оценки:

$$(\nabla F_i(x), f_i(a, x)) \Big|_{\substack{a \in A_i \\ F_i(x)=0}} = -f_i(a, x) \Big|_{\substack{a \in A_i \\ x \in K_i}} \leq -\alpha P_i(\alpha) \leq 0, \quad \alpha < \gamma, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

$$(\nabla \bar{F}(x), f(a, x)) \Big|_{\substack{a \in A \\ \bar{F}(x, \gamma)=0}} = \sum_{i=1}^n f_i(a, \alpha \lambda) \Big|_{\substack{a \in A, \\ \alpha=\gamma, \lambda \in \Lambda_1}} \leq \gamma \bar{P}(\gamma) \leq 0. \quad (8)$$

Из оценок (7) и (8) следует, что множество $\overline{K(\gamma)}$ положительно инвариантно для системы (6) при любом выборе коэффициентов $a \in A$. Поэтому справедливы следующие утверждения:

1) решения $x(t, x_0, a)$ системы (6) нелокально продолжаемы при всех $x_0 \in \overline{K(\gamma)}$, $a \in A$;

2) если произвольно зафиксировать $\varepsilon > 0$ и выбрать $\delta = \min\{\varepsilon, \gamma\}$, то для всех $x_0 \in \overline{K(\delta)}$, $a \in A$ и $t > 0$ выполняется условие $x(t, x_0, a) \in K(\varepsilon)$.

Итак, из утверждений 1) и 2) следует, что решение $x = 0_n$ системы (6) устойчиво относительно множества K по определению 3.

2. Допустим, при $0 < \alpha < \gamma_0$ справедливы оценки $P_i(\alpha) \geq 0$, $i = \overline{1, n}$ и $\bar{P}(\alpha) < 0$. Произвольно выберем $x_0 \in \text{int } K(\gamma_0)$ и $a \in A$. Так как $\bar{P}(\alpha) < 0$ при $0 < \alpha < \gamma_0$, то неравенство типа (8) выполняется строго. Значит, функция $v(t) = \|x(t, x_0, a)\| > 0$ строго убывает при $t \in (0, +\infty)$. Тогда существует $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \gamma_1 \in [0, \gamma_0)$. Произвольно зафиксируем число $\gamma_2 \in (\gamma_1, \gamma_0)$. При $\gamma = \|a\|$, $a \in K(\gamma_1, \gamma_2)$, $K(\gamma_1, \gamma_2) = \{x \in \overline{K(\gamma_2)} : \|x\| \geq \gamma_1\}$, $P^* = \gamma_1 \cdot \max_{[\gamma_1, \gamma_2]} \bar{P}(\gamma)$ справедлива оценка

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^n f_i(a, x(t, x_0, a)) \leq \gamma \bar{P}(\gamma) \leq P^*. \quad (9)$$

Если предположить, что $\gamma_1 > 0$, то в силу оценки (9) при $t > 0$ справедливо неравенство $\dot{v}(t) \leq P^* < 0$. Тогда имеет место соотношение $v(t) \leq \exp(P^* t)$. При этом $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$. Но в то же время $0 < \gamma_1 \leq \|x(t, x_0, a)\|$. Получили противоречие. Значит, $\gamma_1 = 0$. Итак, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x_0, a)\| = 0$ для всех $x_0 \in \text{int } K(\gamma_0)$ и $a \in A$. То есть решение $x = 0_n$ системы (6) является также и притягивающим, то есть оно асимптотически устойчиво по определению 3. Теорема 4 доказана.

Из доказательства теоремы 1 следует, что в качестве оценки области устойчивости нулевого решения можно выбрать множество $K(\gamma_0)$.

Пример. Пусть дана система вида (6)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (a_{111}x_1 + a_{112}x_2) + (a_{211}x_1^2 + a_{212}x_1x_2 + a_{213}x_2^2) + (a_{311}x_1^3 + a_{312}x_1^2x_2 + a_{313}x_1x_2^2 + a_{314}x_2^3), \\ \dot{x}_2 = (a_{121}x_1 + a_{122}x_2) + (a_{221}x_1^2 + a_{222}x_1x_2 + a_{223}x_2^2) + (a_{321}x_1^3 + a_{322}x_1^2x_2 + a_{323}x_1x_2^2 + a_{324}x_2^3), \end{cases} \quad (10)$$

в которой коэффициенты определены с точностью до включений:

$$a_{11} = (a_{111}, a_{112}) \in A_{11} = [-5; -4] \times [1; 3], \quad a_{12} = (a_{121}, a_{122}) \in A_{12} = [3; 9/2] \times [-4; -7/2];$$

$$a_{21} = (a_{211}, a_{212}, a_{213}) \in A_{21} = [-1; 0] \times [1; 10] \times [2; 5],$$

$$a_{22} = (a_{221}, a_{222}, a_{223}) \in A_{22} = [1/2; 1] \times [-20; -15] \times [-9/2; -7/2];$$

$$a_{31} = (a_{311}, a_{312}, a_{313}, a_{314}) \in A_{31} = [-1; 1] \times [-10; -1] \times [-7; -13/2] \times [1; 2],$$

$$a_{32} = (a_{321}, a_{322}, a_{323}, a_{324}) \in A_{32} = [0; 3] \times [-2; 2] \times [-1; 0] \times [-11/2; 0].$$

Для системы (10) вычислим коэффициенты многочленов типа $P_i(\alpha)$ $\bar{P}(\alpha)$, затем получим оценки для этих многочленов. Так как $p_{11} = a_{112} \geq 1$, $p_{21} = a_{213} \geq 2$, $p_{31} = a_{314} \geq 1$ и $p_{12} = a_{121} \geq 3$, $p_{22} = a_{221} \geq 1/2$, $p_{32} = a_{321} \geq 0$, то при всех $\alpha > 0$ имеют место неравенства $P_1(\alpha) \geq (\alpha + 1)^2 > 0$ и $P_2(\alpha) \geq 0,5\alpha + 3 > 0$. Из условий $\bar{p}_1 \leq a_{111} + a_{112} + a_{121} + a_{122} \leq 0$, $\bar{p}_2 \leq a_{211} + a_{212} + a_{213} + a_{221} + a_{222} + a_{223} \leq -5/2$, $\bar{p}_3 \leq a_{311} + a_{312} + a_{313} + a_{314} + a_{321} + a_{322} + a_{323} + a_{324} \leq 1/2$ следует, что $\bar{P}(\alpha) \leq \alpha^2/2 - 5/2 < 0$ при $0 < \alpha < 5$. Итак, при $\gamma_0 = 5$ по теореме 4 нулевое решение системы (10) устойчиво по определению 3 относительно первой четверти. Оценкой области устойчивости служит треугольник: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 5$.

Библиографический список

1. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений/ В.Л. Харитонов // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. XIV, № 11. – С. 2086–2088.
2. Неймарк Ю.И. Робастная устойчивость при периодических возмущениях / Ю.И. Неймарк // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 12. – С. 51–54.
3. Хорн, Р.А. Матричный анализ / Р.А. Хорн, Ч.Р. Джонсон // М. : Мир, 1989. – 655 с.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.
5. Четаев Н.Г. Устойчивость движения / Н.Г. Четаев. М. : Наука, 1965. – 176 с.
6. Абрамов В.В. Устойчивость нулевого решения нелинейной системы дифференциальных уравнений с малым параметром / В.В. Абрамов // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. – 2022. – Вып. 4. – С. 6–10.
7. Abramov V.V. Parameter Stability Under Permanent Perturbations / V.V. Abramov, S.A. Belman, E.Y. Liskina // Journal of Mathematical Sciences. – 2022. – V. 262, № 6. – P. 773–778.
8. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин. – М. : Наука, 1966. – 530 с.
9. Абрамов В.В. Ветвление периодического решения с положительным начальным значением / В.В. Абрамов // Вестник РАЕН. – 2017. – Т. 17, № 4. – С. 4–7.

УДК 517.925; ГРНТИ 27.29.17

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БИФУРКАЦИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Е.Ю. Лискина

*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина,
Российская Федерация, Рязань, katelis@yandex.ru*

Аннотация. В работе рассматриваются автономных дифференциальных уравнений с параметром. Методами качественного исследования и с помощью численного эксперимента оценено бифуркационное значение параметра, при котором в системе возникает неустойчивый предельный цикл.

Ключевые слова: система нелинейных дифференциальных уравнений; критический случай; предельный цикл; бифуркация Андронова – Хопфа; фазовый портрет.

COMPUTER SIMULATION OF BIFURCATIONS OF A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH QUADRATIC NONLINEARITY

E.Yu. Liskina

*Ryazan State University named after S.A. Esenin,
Russia, Ryazan, katelis@yandex.ru*

The summary. The paper considers autonomous differential equations with a parameter. Using qualitative research methods and numerical experiment, the bifurcation value of the parameter is estimated, at which an unstable time cycle occurs in the system.

Keywords: system of nonlinear differential equations; critical case; limit cycle; Andronov–Hopf bifurcation; phase portrait.

Введение

В работе [1] была предложена модель параметрического управления с двойной положительной обратной связью вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + y + ax^2 + cy^2, \\ \dot{y} = -x + \mu y + dx^2 + fy^2, \end{cases} \quad (1)$$

где a, c, d, f – постоянные положительные коэффициенты;

μ – параметр, изменение которого влияет на развитие социальной структуры региона.

В работах [2–5] было выполнено исследование системы (1) при изменении параметра μ , описаны типы биуркаций, возможные в системе (1). В частности, при $af - cd \neq 0$ и $ad - cf \neq 0$ [4, 5] в системе (1) всегда возможны бифуркация Андронова – Хопфа рождения не более одного предельного цикла и каскад бифуркаций: появление нового состояния равновесия, его расщепление затем на два состояния равновесия (бифуркация «седло – узел»), превращение узла в фокус (транскритическая бифуркация) [6]. При $af - cd = 0$ и $ad - cf \neq 0$ в системе (1) всегда возможны бифуркация Андронова – Хопфа рождения не более одного предельного цикла и бифуркация особой точки от бесконечности [2, 4].

В [5] отмечено, что $ad - cf = 0$ является критическим для бифуркации Андронова – Хопфа, так как согласно [6] при $ad - cf = 0$ фокус $O(0; 0)$ из сложного фокуса первого порядка становится сложным фокусом второго порядка, из которого при изменении параметра μ может возникнуть не более двух предельных циклов. В данной работе предлагается анализ и сравнение функций последования и фазовых портретов системы (1) при выполнении и невыполнении условия $ad - cf = 0$.

Исследование системы (1)

Используя алгоритм из [6, с. 73] и систему компьютерной математики Maple, построим функцию последования для системы (1) при $\mu \neq 0$ и $\mu = 0$. Перейдем в системе (1) к полярным координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ и, исключая переменную t , получим следующие дифференциальные уравнения относительно переменных ρ и φ :

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\rho \frac{\mu + \rho A(\varphi)}{1 - \rho B(\varphi)} \text{ при } \mu \neq 0, \quad (2)$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\rho \frac{\rho A(\varphi)}{1 - \rho B(\varphi)} \text{ при } \mu = 0, \quad (3)$$

в которых

$$A(\varphi) = a \cos^3 \varphi + c \sin^2 \varphi \cos \varphi + d \cos^2 \varphi \sin \varphi + f \sin^3 \varphi,$$

$$B(\varphi) = d \cos^3 \varphi + f \cos \varphi \sin^2 \varphi - a \cos^2 \varphi \sin \varphi - c \sin^3 \varphi.$$

Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы для любого $\rho \in [0; \delta]$ и при всех $\varphi \in [0; 2\pi]$ выполнялось неравенство $|\rho B(\varphi)| < 1$, в силу которого правые части уравнений (2) и (3) на множестве $[0; 2\pi] \times [0; \delta]$ могут быть разложены в ряды

$$\frac{\rho(\mu + \rho A(\varphi))}{1 - \rho B(\varphi)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^{n+1} (\mu + \rho A(\varphi)) B^n(\varphi) \text{ при } \mu \neq 0,$$

$$\frac{\rho^2 A(\varphi)}{1 - \rho B(\varphi)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^{n+2} A(\varphi) B^n(\varphi) \text{ при } \mu = 0,$$

сходящиеся равномерно на отрезке $[0; \delta]$ при всех $\varphi \in [0; 2\pi]$. В соответствии со схемой, предложенной в [5, С. 71–74], построим функции последования уравнения (5) на части положительной полуоси Ox , соответствующей значению $\rho_0 \in [0; \delta]$.

При $\mu \neq 0$ имеем

$$\rho(2\pi, 0; \rho_0, \mu) = e^{2\pi\mu} \rho_0 + \alpha_2(\mu) \rho_0^2 + o(\rho_0^2), \quad (4)$$

$$\text{где } \alpha_2(\mu) = \frac{e^{2\pi\mu}(9d\mu^4 + 12a\mu^3 + (4d+2f)\mu^2 + (8+4c)\mu - d - 2f)(e^{6\pi\mu} - 1)}{3(9\mu^4 + 10\mu^2 + 1)}.$$

При $\mu = 0$ функция последования приняла вид

$$\rho(2\pi, 0; \rho_0) = \rho_0 + \alpha_3 \rho_0^3 + \alpha_4 \rho_0^4 + \alpha_5 \rho_0^5 + o(\rho_0^5),$$

где

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{2}(ad - cf), \quad \alpha_4 = \frac{\pi}{6}(ad - cf)(2f - d),$$

$$\alpha_5 = \frac{3\pi^2}{8} \left((ad)^2 - (cf)^2 \right) + \frac{\pi(18d^3a - da^3 - 14c^3f - 15cf^3 - dac^2 - 11fa^2c + 2dac^2 + 25fac^2 - 9d^2fa + 27daf^2 - 6d^2fc - 15cdf^2)}{72}.$$

Из последних соотношений следует, что при $ad - cf = 0$ выполняются равенства $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_5 = \frac{\pi ad}{6} \left(d^2 - 2\frac{ad^2}{c} + 2ac - a^2 - c^2 + \frac{a^2d^2}{c^2} \right) \neq 0$.

Из вида функции (4) следует, что условие существования периодического решения системы (1) имеет вид $\rho(2\pi, 0; \rho_0, \mu) - \rho_0 = 0$ или $(e^{2\pi\mu} - 1)\rho_0 + \sum_{k=2}^n \alpha_k(\mu)\rho_0^k + o(\rho_0^n) = 0$. Так как $\rho_0 \equiv 0$ – нулевое решение, то, чтобы получить условие существования ненулевого периодического решения, перепишем последнее уравнение в виде

$$(e^{2\pi\mu} - 1) + \sum_{k=2}^n \alpha_k(\mu)\rho_0^{k-1} + \rho_0^{-1}o(\rho_0^n) = 0. \quad (5)$$

Так как правая часть уравнения (5) определена, непрерывно дифференцируема по (ρ_0, μ) на множестве $[0; \delta] \times \mathbf{R}$ и обращается в нуль при $(\rho_0, \mu) = (0, 0)$, то существует число $\delta_0 \in (0; \delta)$ такое, что для всех $(\rho_0, \mu) \in [0; \delta_0] \times [0; \delta_0]$ она определяет единственную неявную функцию $\rho_0 = \rho_0(\mu)$, определяющую начальное условие ненулевого 2π -периодического решения, зависящее от параметра.

С другой стороны, правые части системы (1) удовлетворяют условиям теоремы Пуанкаре – Андронова [7, с. 242] о рождении предельного цикла при некотором значении параметра μ^* . При этом с точки зрения этой теоремы случаи $ad - cf \neq 0$ и $ad - cf = 0$ неразличимы.

Компьютерное моделирование бифуркаций в системе (1)

Рассмотрим несколько примеров компьютерного моделирования значения бифуркационного параметра μ^* в системе компьютерной математики Maple.

1) для заданных положительных коэффициентов a, c, d, f оценим $\max_{\varphi \in [0; 2\pi]} \{B(\varphi)\}$, по его величине найдем число $\delta^* > 0$ так, чтобы при всех $(\varphi, \rho) \in [0; 2\pi] \times [0; \delta^*)$ выполнялось неравенство $|\rho B(\varphi)| < 1$; поэтому всюду далее будем рассматривать $\rho \in [0; \delta]$, $\delta < \delta^*$;

2) при различных значениях параметра μ будем искать решения $\rho_{0(2)} \neq 0$ и $\rho_{0(5)} \neq 0$ уравнений

$$(e^{2\pi\mu} - 1) + \alpha_2(\mu)\rho_0 = 0, \quad (6)$$

$$(e^{2\pi\mu} - 1) + \sum_{k=2}^5 \alpha_k(\mu)\rho_0^{k-1} = 0, \quad (7)$$

являющихся оценками значения ρ_0^* , являющегося решением уравнения (5) (и начальным условием $\rho(0) = \rho_0^*$ периодического решения уравнения (3));

3) ещё одной оценкой начального условия $\rho(0) = \rho_0^*$ периодического решения уравнения (3) будет являться сепаратриса второго состояния равновесия $M(x_1(\mu); y_1(\mu))$ системы (1) (в [4] доказано, что это состояние равновесия является седлом), поэтому при различных значениях параметра μ будем вычислять координаты точки $M(x_1(\mu); y_1(\mu))$ как решение системы

$$\begin{cases} \mu x + y + ax^2 + cy^2 = 0, \\ -x + \mu y + dx^2 + fy^2 = 0; \end{cases} \quad (8)$$

расстояние $s = \sqrt{x_1^2(\mu) + y_1^2(\mu)}$ между точками $O(0; 0)$ и $M(x_1(\mu); y_1(\mu))$, используя которое, выберем одну или две точки из окрестности точки $M(x_1(\mu); y_1(\mu))$;

4) далее будем строить фазовый портрет и интегральные кривые системы с начальными условиями, полученными в пп. 1)–3);

5) при $\mu = 0$ будем искать решение $\rho_{0(5)} \neq 0$ уравнения $\alpha_3 + \alpha_4\rho_0 + \alpha_5\rho_0^2 = 0$, являющегося оценкой ненулевого решения уравнения $\rho(2\pi, 0; \rho_0) - \rho_0 = 0$ или $\alpha_3\rho_0^3 + \alpha_4\rho_0^4 + \alpha_5\rho_0^5 + o(\rho_0^5) = 0$.

Пример 1

Пусть в системе (1) $a = 3$, $c = 2$, $d = 5$, $f = 6$, тогда $af - cd = 8 \neq 0$ и $ad - cf = 3 \neq 0$. Рассмотрим бифуркацию рождения предельного цикла в окрестности состояния равновесия $O(0; 0)$. Оценим $\max_{\varphi \in [0; 2\pi]} \{B(\varphi)\} = 5,921974084$, тогда неравенство $|\rho B(\varphi)| < 1$ выполняется

при всех $(\varphi, \rho) \in [0; 2\pi] \times [0; \delta^*)$, где $\delta^* = 0,1688626100$.

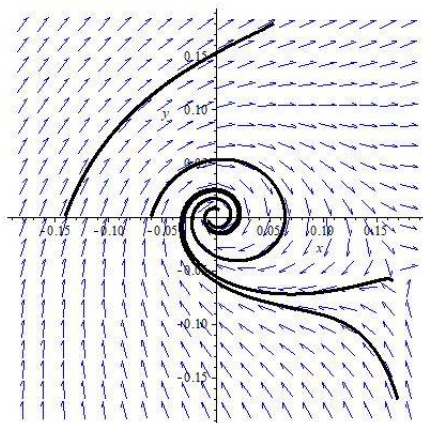
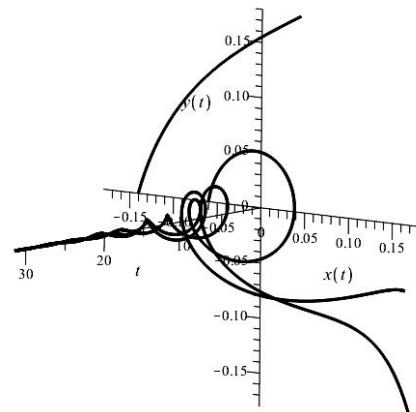
Результаты моделирования представим в таблице 1 и на рисунках 1–8.

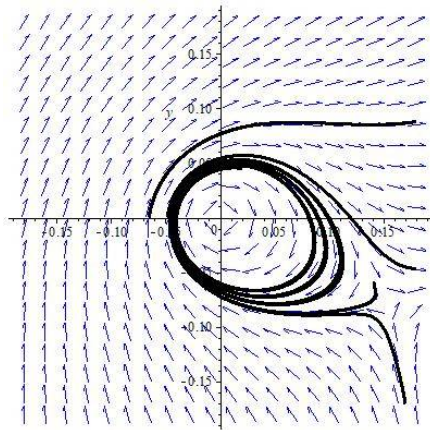
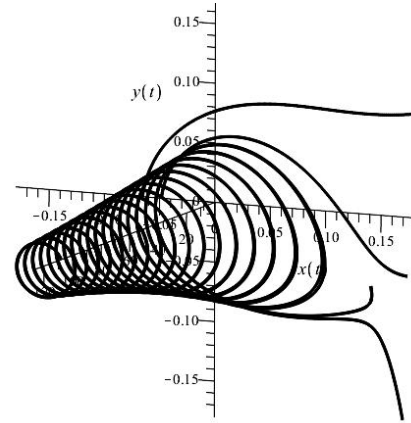
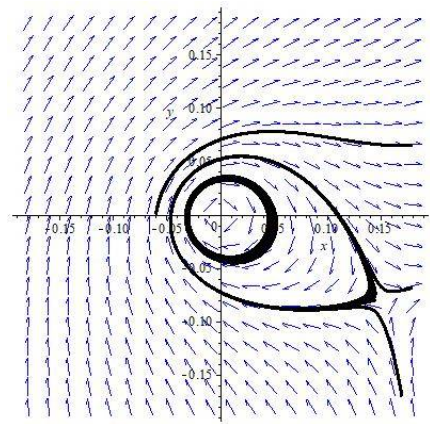
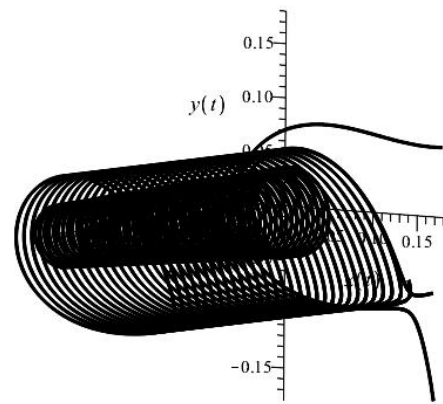
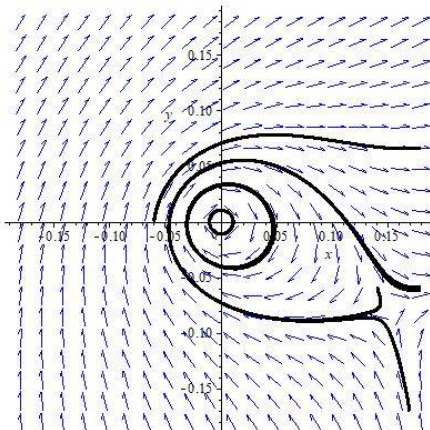
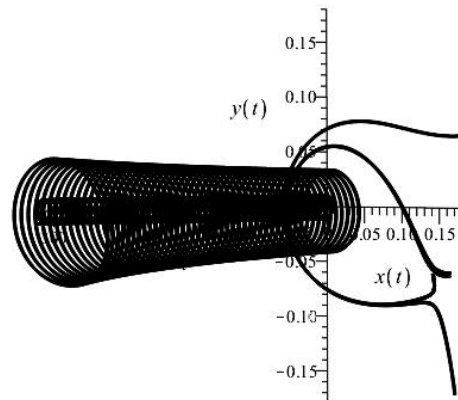
На рисунках 1–4 видно, что состояние равновесия $O(0; 0)$ представляет собой устойчивый фокус.

На рисунках 5–8 видно, что неустойчивый предельный цикл локализуется при $\mu = -0,002$ и сохраняется до $\mu = 0$.

Таблица 1. Параметры и результаты компьютерного моделирования бифуркации рождения цикла при $af - cd \neq 0$ и $ad - cf \neq 0$

μ	$\rho_{0(2)}, \rho_{0(5)}$	Второе состояние равновесия системы (1) и s	Время на фазовом портрете	Время для интегральных кривых	Начальные условия		Номера рисунков
					$x(0)$	$y(0)$	
-0,2	0,4887775788 (не попадает в $[0; \delta^*)$), 0,14028692912	$x_1=0,1650179396,$ $y_1=-0,05466589292,$ $s=0,1738369358$	$[0; 4\pi]$	$[0; 10\pi]$	$-\rho_{0(5)}$	0	Рис. 1, 2
					-0,06	0	
					0,165	-0,06	
					0,17	-0,17	
-0,01	0,06545899263 0,04827644938	$x_1=0,1499910227,$ $y_1=-0,07823273074,$ $s=0,1691675709$	$[0; 10\pi]$	$[0; 40\pi]$	$-\rho_{0(2)}$	0	Рис. 3, 4
					$-\rho_{0(5)}$	0	
					0,141	-0,06	
					0,17	-0,17	
-0,002	0,06009411297 0,03203383373	$x_1=0,1493962206,$ $y_1=-0,07920611796,$ $s=0,1690941745$	$[0; 40\pi]$	$[0; 100\pi]$	$-\rho_{0(2)}$	0	Рис. 5, 6
					$-\rho_{0(5)}$	0	
					0,141	-0,06	
					0,17	-0,17	
0	Действительных решений нет	$x_1=0,1492480308,$ $y_1=-0,07944930987,$ $s=0,1690774010$	$[0; 10\pi]$	$[0; 100\pi]$	-0,06	0	Рис. 7, 8
					-0,03	0	
					-0,01	0	
					0,141	-0,06	
					0,17	-0,17	

Рис. 1. Фазовый портрет системы (1) при $\mu = -0,2$ Рис. 2. Интегральные кривые системы (1) при $\mu = -0,2$

Рис. 3. Фазовый портрет системы (1) при $\mu = -0,01$ Рис. 4. Интегральные кривые системы (1) при $\mu = -0,01$ Рис. 5. Фазовый портрет системы (1) при $\mu = -0,002$ Рис. 6. Интегральные кривые системы (1) при $\mu = -0,002$ Рис. 7. Фазовый портрет системы (1) при $\mu = 0$ Рис. 8. Интегральные кривые системы (1) при $\mu = 0$

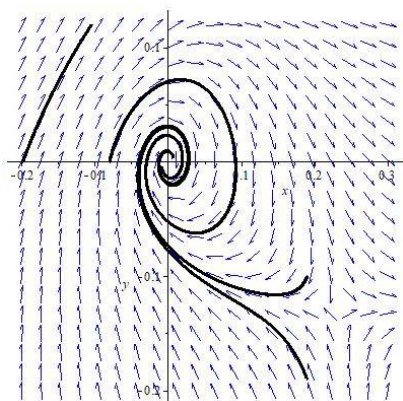
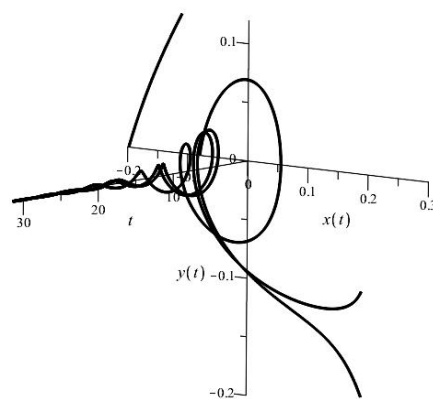
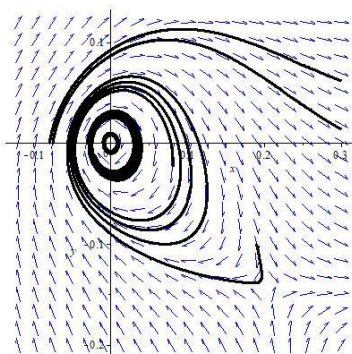
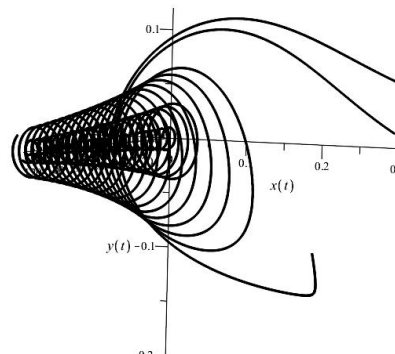
Пример 2

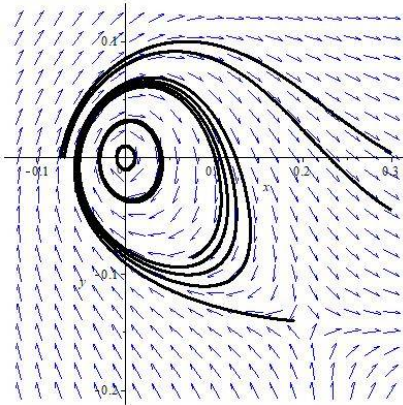
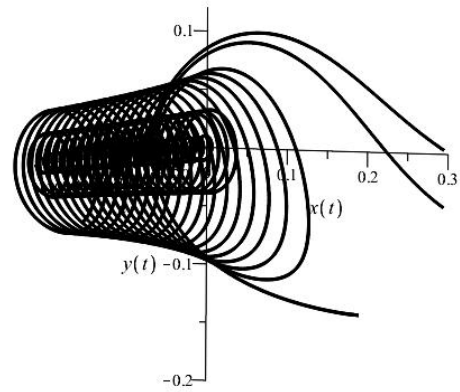
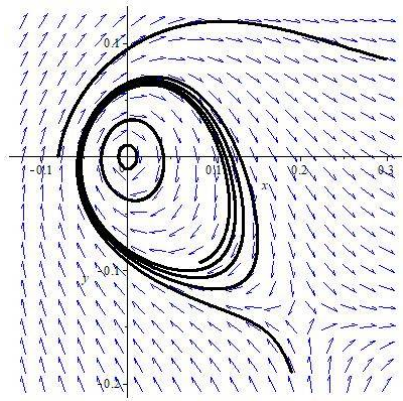
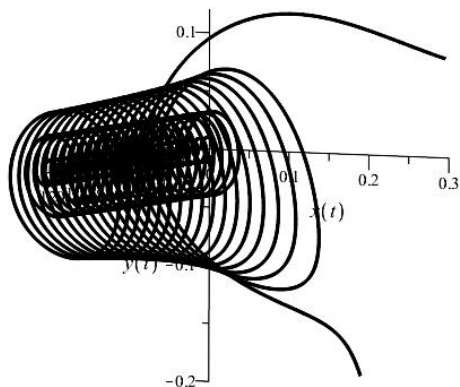
Пусть в системе (1) $a = 3$, $c = 1$, $d = 2$, $f = 6$, тогда $af - cd = 16 \neq 0$ и $ad - cf = 0$. Рассмотрим бифуркацию рождения предельного цикла в окрестности состояния равновесия $O(0; 0)$. Оценим $\max_{\varphi \in [0; 2\pi]} \{B(\varphi)\} = 4,242640686$, тогда неравенство $|\rho B(\varphi)| < 1$ выполняется при всех $(\varphi, \rho) \in [0; 2\pi] \times [0; \delta^*)$, где $\delta^* = 0,2357022605$.

Результаты моделирования представим в таблице 2 и на рисунках 9–16.

Таблица 2. Параметры и результаты компьютерного моделирования бифуркации рождения цикла при $af - cd \neq 0$ и $ad - cf = 0$

μ	$\rho_{0(2)}, \rho_{0(5)}$	Второе состояние равновесия системы (1) и s	Время на фазовом портрете	Время для интегральных кривых	Начальные условия		Номера рисунков
					$x(0)$	$y(0)$	
-0,2	0,5728118704 (не попадает в $[0; \delta^*)$), 0,1982669884	$x_1=0,2291621718$, $y_1=-0,1281310293$, $s=0,2625506840$	$[0; 4\pi]$	$[0; 10\pi]$	$-\rho_{0(5)}$	0	Рис. 9, 10
					-0,08	0	
					0,19	-0,10	
					0,19	-0,19	
-0,01	0,07939065458 0,07512442786	$x_1=0,2025331056$, $y_1=-0,1408811417$, $s=0,2467126972$	$[0; 10\pi]$	$[0; 40\pi]$	$-\rho_{0(2)}$	0	Рис. 11, 12
					$-\rho_{0(5)}$	0	
					-0,01	0	
					-0,03	0	
-0,002	0,07295418966 0,06901132802	$x_1=0,2015203951$, $y_1=-0,1414311337$, $s=0,2461975532$	$[0; 10\pi]$	$[0; 40\pi]$	0,19	-0,10	Рис. 13, 14
					$-\rho_{0(2)}$	0	
					$-\rho_{0(5)}$	0	
					-0,01	0	
0	Действительных решений нет	$x_1=0,2012685914$, $y_1=-0,1415688876$, $s=0,2460707130$	$[0; 10\pi]$	$[0; 40\pi]$	-0,03	0	Рис. 15, 16
					-0,01	0	
					0,19	-0,14	
					-0,08	0	

Рис. 9. Фазовый портрет системы (1) при $\mu = -0,2$ Рис. 10. Интегральные кривые системы (1) при $\mu = -0,2$ Рис. 11. Фазовый портрет системы (1) при $\mu = -0,01$ Рис. 12. Интегральные кривые системы (1) при $\mu = -0,01$

Рис. 13. Фазовый портрет системы (1) при $\mu = -0,002$ Рис. 14. Интегральные кривые системы (1) при $\mu = -0,002$ Рис. 15. Фазовый портрет системы (1) при $\mu = 0$ Рис. 16. Интегральные кривые системы (1) при $\mu = 0$

На рисунках 9–12 видно, что состояние равновесия $O(0; 0)$ представляет собой устойчивый фокус. На рисунках 14–16 видно, что при $\mu = -0,002$ и до $\mu = 0$ траектории образуют две структуры. Согласно теории [6] и более ранним исследованиям [2] в системе (1) при $ad - cf = 0$ может возникнуть не более двух предельных циклов. Видно, что внешний цикл является устойчивым «снаружи», а внутренний – неустойчивым «внутри» (при $\rho_0 < 0,01$ траектории системы стремятся к состоянию равновесия $O(0; 0)$).

Библиографический список

1. Кузьмин Р.Н., Савенкова Н.П., Николаичев А.Н. Математические модели нелинейных динамических процессов в социологии // Математика. Компьютер. Образование : сб. науч. тр. / под. ред. Г.Ю. Ризниченко. – М. : Прогресс-Традиция, 2000. – Вып. 7, ч. 2. – С. 437–443.
2. Лискина Е.Ю. Исследование состояний равновесия динамической модели социально-политического управления в некоторых критических случаях // Вестник РАЕН. – 2018. – Т. 18. – № 4. – С. 42–52.
3. Лискина Е.Ю. Исследование бифуркаций числа состояний равновесия динамической модели социально-политического управления в критическом случае // Вестник РАЕН. – 2019. – Т. 19. – № 2. – С. 96–100.
4. Лискина Е. Ю. К проблеме исследования бифуркаций числа состояний равновесия динамической модели социально-политического управления. – 2020. – Вып. 1. – С. 32–38.
5. Лискина Е.Ю. Бифуркации состояний равновесия в одной системе дифференциальных уравнений с квадратичной нелинейностью // Геометрические методы в теории управления и математической физике : тез. докл. III Междунар. науч. конф. (Рязань, 26–30 апреля 2021 г.), посвящ. памяти проф. М.Т. Терёхина / под ред. И. С. Красильщика, А.Г. Кушнера, В.В. Лычагина, С.С. Мамонова. – Рязань : Ряз. гос. ун-т имени С.А. Есенина, 2021. – С. 43.
6. Баутин, Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М. : Наука, 1991. – 486 с.
7. Треногин, В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник. – М. : Физматлит, 2009. – 312 с.

УДК 004.932; ГРНТИ 27.47.17

МЕТОДЫ СОВМЕЩЕНИЯ РАЗНОРОДНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ В ПЛОСКОСТИ ЗЕМЛИ

А.И. Новиков

Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, novikovanatoly@yandex.ru

Аннотация. В работе приведен обзор основных методов совмещения разнородных изображений. Предложен метод совмещения, основанный на прямой оптимизации функционала близости совмещаемых изображений методом покоординатного спуска. Одновременно решается обратная навигационная задача.

Ключевые слова: аффинные преобразования, проективные преобразования плоскости, корреляционно-экстремальные методы, обратная навигационная задача.

METHODS OF COMBINING HETEROGENEOUS IMAGES OF THE UNDERLYING SURFACE IN THE PLANE OF THE EARTH

A.I. Novikov

Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, novikovanatoly@yandex.ru

The summary. The paper provides an overview of the main methods of combining heterogeneous images. A matching method based on direct optimization of the proximity functional of the combined images by the coordinate descent method is proposed. At the same time, the reverse navigation problem is solved.

Keywords: affine transformations, projective plane transformations, relational-extremal methods, inverse navigation problem.

Задача совмещения разнородных изображений – реального телевизионного изображения (РИ) и виртуального (ВИ), синтезированного по цифровой карте местности – является одной из наиболее сложных и важных в цифровой обработке изображений подстилающей поверхности в плоскости Земли [1]. Виртуальное изображение формируется как бинарное контурное изображение, а РИ – как растровое изображение. Значит, прежде, чем решать задачу совмещения РИ и ВИ необходимо привести эти изображения к одному виду. Очевидно, что РИ должно быть преобразовано к такому же виду, что и ВИ. Для этого необходимо осуществить выделение контуров на РИ. Будем считать, что эта часть проблемы уже решена, и мы имеем контурные изображения одного участка подстилающей поверхности как на РИ, так и на ВИ.

Виртуальное изображение формируется на основании значений навигационных параметров, поступающих от соответствующих датчиков. Таких параметров 6. Они образуют шестимерный вектор навигационных параметров $\mathbf{v}_r = (x, y, h, \theta, \psi, \gamma)$. В составе этого вектора тройка чисел x, y, h определяет координаты ЛА в пространстве, а тройка углов Эйлера θ, ψ, γ (углов тангажа, курса и крена соответственно) – ориентацию ЛА в пространстве. Значения навигационных параметров, формируемые соответствующими датчиками, содержат ошибки. Поэтому реально наблюдается вектор $\tilde{\mathbf{v}}_r = \mathbf{v}_r + \Delta\mathbf{v}_r$, где $\Delta\mathbf{v}_r = (\Delta x, \Delta y, \Delta h, \Delta\theta, \Delta\psi, \Delta\gamma)$ – вектор ошибок навигационных параметров. Ошибки навигационных параметров могут приводить к неадекватной оценке экипажем закабинной обстановки. Необходимо «подобрать» такую поправку $\Delta\hat{\mathbf{v}}_{opt}$ к значениям вектора навигационных параметров, чтобы виртуальное изображение, сформированное по скорректированному вектору $\hat{\mathbf{v}}_r = \tilde{\mathbf{v}}_r - \Delta\hat{\mathbf{v}}_{opt}$, максимально точно совпало с РИ.

Основная цель совмещения РИ и ВИ, заключается в получении оценок вектора навигационных параметров, максимально близких к истинным значениям. Это и есть обратная навигационная задача (ОНЗ). Не все известные методы совмещения РИ и ВИ решают одновре-

менно ОНЗ. В частности, аффинные и проективные методы преобразования плоскости в общем случае позволяют получить хорошие результаты совмещения РИ и ВИ, но при этом не решают ОНЗ.

Аффинные преобразования

Аффинные методы совмещения контурных изображений основаны на аффинных преобразованиях на плоскости (сдвиг точки вдоль вектора, поворот вектора на заданный угол, изменение масштаба). Умножение двух комплексных чисел, как известно, эквивалентно повороту вектора, отвечающего первому множителю, на некоторый угол и растяжению (сжатию) в зависимости от модуля второго множителя. Поэтому поворот и изменение масштаба в аффинных преобразованиях ВИ к плоскости РИ можно осуществить с помощью операции умножения в комплексной плоскости. Соответствующий метод и реализующий его алгоритм были предложены в работе [2].

Совмещение изображений в рамках рассматриваемого метода состоит из нескольких этапов:

- устанавливается взаимно однозначное соответствие между контурами объектов на РИ и ВИ;
- находятся диаметры областей на РИ и ВИ;
- выполняется преобразование ВИ к плоскости РИ.

Начальная и конечная точки диаметров областей на РИ и ВИ находятся согласно определению диаметра области:

$$\{M_1, M_2\} = \arg \max_{M_i, M_j \in \partial D} \rho(M_i, M_j).$$

На рисунке 1 приведен результат реализации первых двух этапов с иллюстрацией нахождения диаметров $M_1 M_2$ объединения двух одноименных областей на РИ и ВИ.

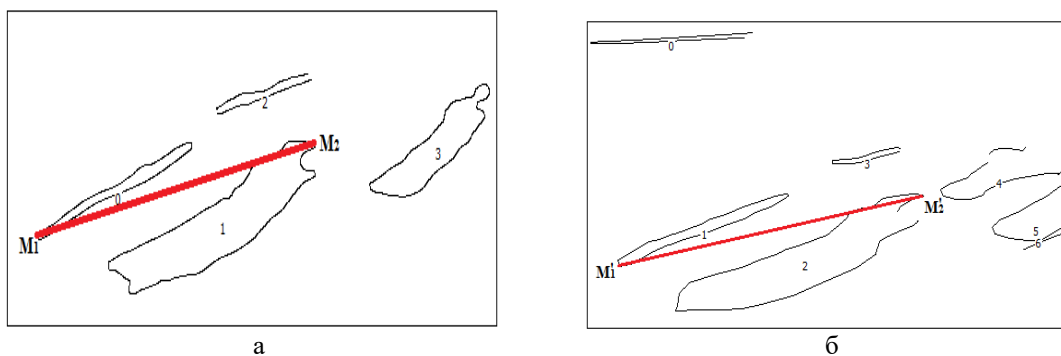


Рис. 1. Иллюстрация к нахождению диаметров областей: а – на РИ, б – на ВИ

Собственно совмещение РИ и ВИ производится в два этапа. Сначала точка M_1 на ВИ совмещается с аналогичной точкой M_1 на РИ. Это эквивалентно сдвигу всего виртуального изображения вдоль вектора, соединяющего эти две точки. Затем каждому вектору $\overline{M_1 M_2} = (x_r, y_r)$ на РИ, и $\overline{M_1 M_2} = (x_s, y_s)$ на ВИ ставятся в соответствие комплексные числа $z_r = x_r + i y_r$ и $z_s = x_s + i y_s$ соответственно. Находится их частное $z_{np} = \frac{z_r}{z_s}$. Преобразование каждого пикселя с координатами (i, j) на ВИ к плоскости РИ выполняется по формуле: $\hat{z}_{ij} = z_{ij} \cdot z_{np}$. В этой формуле z_{ij} – комплексное число, отвечающее вектору

$\overline{M_1 M_{ij}}$, в составе которого точка M_1 – «начальная» точка диаметра $\overline{M_1 M_2}$ (рисунок 1), а M_{ij} – текущий пиксель ВИ с координатами (i, j) .

Проективные преобразования

Аффинные преобразования не учитывают проективные искажения, которые могут возникать при съемках различных сцен. Проективные преобразования плоскости описываются парой дробно-линейных функций [3]:

$$\begin{cases} x = \frac{h_{11}x' + h_{12}y' + h_{13}}{h_{31}x' + h_{32}y' + 1} \\ y = \frac{h_{21}x' + h_{22}y' + h_{23}}{h_{31}x' + h_{32}y' + 1} \end{cases} \quad (1)$$

Здесь (x, y) – координаты точки на реальном изображении, а (x', y') – координаты отвечающей ей точки на виртуальном изображении, h_{ij} , $i = \overline{1,3}$ $j = \overline{1,3}$ – коэффициенты преобразования, подлежащие определению. Каждая пара ключевых точек $M_i(x_i; y_i)$ и $M'_i(x'_i; y'_i)$ на РИ и ВИ соответственно порождает два линейных уравнения, которые в соответствии с формулой (1) могут быть записаны (при условии, что $h_{31}x'_i + h_{32}y'_i + 1 \neq 0$) в следующем виде

$$\begin{cases} x_i x'_i h_{31} + x_i y'_i h_{32} + x_i = x'_i h_{11} + y'_i h_{12} + h_{13}, \\ y_i x'_i h_{31} + y_i y'_i h_{32} + y_i = x'_i h_{21} + y'_i h_{22} + h_{23}. \end{cases} \quad (2)$$

Неизвестными в системе уравнений (2) являются элементы 8-мерного вектора $\mathbf{h} = (h_{11} \ h_{12} \ h_{13} \ h_{21} \ h_{22} \ h_{23} \ h_{31} \ h_{32})$. Для их определения необходимо минимум 4 пары уравнений вида (2). Значит, необходимо иметь как минимум 4 пары ключевых точек. В реальных задачах удастся находить существенно больше таких пар точек. Среди них могут быть пары с некорректным соответствием, которые должны быть исключены.

Задача отбора из сформированного на предыдущем этапе множества пар ключевых точек корректного подмножества пар может решаться двумя основными способами. Первый из них основан на использовании алгоритма RANSAC, который позволяет отобрать из множества n , $n \gg 4$ минимальное подмножество из 4-6 пар точек, обеспечивающих наилучшее преобразование ВИ к плоскости РИ. Во втором способе [4] искомое преобразование ВИ к плоскости РИ строится с использованием всего множества пар ключевых точек. На основании полного множества пар ключевых точек ищется оценка $\hat{H}$ матрицы гомографии, минимизирующая в выбранной метрике отклонение образов $HX_{ВИ}$ ключевых точек ВИ от отвечающих им точек РИ. Как показано в работе [4] первый способ очень чувствителен к ошибкам в установленных соответствиях между ключевыми точками на РИ и ВИ и потому может приводить к построению некорректных преобразований. Второй способ позволяет формировать оптимальное в среднеквадратичном смысле преобразование, исключая грубые ошибки.

Систему линейных алгебраических уравнений (2) после преобразования можно записать в стандартной форме

$$\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{B}, \quad (3)$$

где $\mathbf{A}$ – основная матрица системы;

$\mathbf{h}$ – вектор-столбец подлежащих определению элементов матрицы гомографии;

$\mathbf{B} = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4)^T$ – вектор-столбец координат ключевых точек на РИ, записанных в указанном порядке.

Если число пар ключевых точек значительно больше 4 ($n \gg 4$), то система уравнений (3) будет переопределенной (содержит $2n$ уравнений относительно 8 неизвестных). Такая система может оказаться несовместной в классическом смысле. Поэтому в [4] предложен подход, основанный на поиске псевдорешения системы из условия $\|\mathbf{A}\mathbf{h} - \mathbf{B}\|^2 \rightarrow \min_{G_H}$. В ре-

зультате получим нормальную систему $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})\mathbf{h} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}$ с симметричной и положительно определенной основной матрицей $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Если матрица $\mathbf{A}$ является матрицей полного ранга, то такая система имеет единственное решение.

Корреляционно-экстремальные и комбинированные методы

Методы совмещения, основанные на аффинных и проективных преобразованиях не дают решение ОНЗ. Корреляционные методы совмещения изображений [1, 5, 6] обеспечивают не только оптимальное совмещение изображений, но и одновременно дают решение ОНЗ. Единственный, но очень существенный недостаток этих методов, заключается в больших вычислительных затратах, исключающих их применение в системах технического зрения реального времени. В работе [7] предложен комбинированный метод совмещения изображений. Он состоит из двух этапов. На первом этапе – поисковый режим – осуществляется совмещение ВИ с РИ с помощью модифицированного варианта корреляционно-экстремального алгоритма. На втором этапе – основной режим алгоритма – совмещение ВИ с РИ осуществляется с помощью прогнозных моделей. Для каждого параметра в составе шестимерного вектора навигационных параметров $\mathbf{v} = (x, y, h, \psi, \theta, \gamma)$ строятся линейные модели, по которым осуществляется прогноз их значений на один кадр вперед и формирование прогнозного варианта РИ. В результате получаем вектор $\hat{\mathbf{v}}_{i+1}$ прогнозных значений навигационных параметров для следующего $i+1$ -го кадра. На основании этого вектора формируется ВИ и осуществляется наложение этого изображения на отвечающее ему РИ.

Прогнозное значение каждого параметра к $i+1$ -му кадру сравнивается с его фактическим значением в этой точке. Если модуль отклонения $|\hat{u}_{i+1} - u_{i+1}^{\text{факт}}|$ окажется больше заданного порога ε (срыв совмещения), то производится запуск корреляционно-экстремального алгоритма и с его помощью формируется новое значение поправки $\Delta u_{i+k} = \hat{u}_{i+k}^{\text{КЭ}} - \hat{u}_{i+k}^{\text{факт}}$. Здесь u – один из 6 навигационных параметров.

Комбинированный метод совмещения разнородных изображений оказался наиболее удачным решением проблемы. Однако по вычислительным затратам он уступает аффинным и проективным преобразованиям и не вписывается в нормативные требования по времени реализации. Тонкое место в этом алгоритме – поисковый режим.

Метод оптимизации функционала близости ВИ и РИ

Процесс формирования ВИ по цифровой карте местности подробно описан в работе [8]. В соответствии с математической моделью ВИ, предложенной в этой работе, изменение координат отдельного пикселя в плоскости картинке может быть представлено как

$$X'_1 = X' + \Delta X' + T_{\Delta\theta} T_{\Delta\psi} T_{\Delta\gamma} X'. \quad (4)$$

Здесь $X' = (x', y', z')^T$ – текущие координаты пикселя в плоскости картинки;

X'_1 – новые координаты пикселя, вычисленные с учетом ошибок вектора навигационных параметров;

$\Delta X' = (\Delta x', \Delta y', 0)$ – вектор ошибок по координатам x и y ;

$T_{\Delta\theta}$, $T_{\Delta\psi}$, $T_{\Delta\gamma}$ – матрицы вращения Эйлера [8].

Введем функционал близости РИ и ВИ

$$F(\Delta x, \Delta y, \Delta\theta, \Delta\psi, \Delta\gamma) = \sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2 + (y_i - y'_i)^2, \quad (5)$$

и поставим задачу: найти

$$\arg \min_{\Delta x, \Delta y, \Delta\theta, \Delta\psi, \Delta\gamma} F(\Delta x, \Delta y, \Delta\theta, \Delta\psi, \Delta\gamma). \quad (6)$$

В (5) (x_i, y_i) – координаты i -го пикселя на РИ, а (x'_i, y'_i) – координаты отвечающего ему пикселя на ВИ и находятся они по формуле (4).

Функционал (5) является нелинейным по параметрам $\Delta\theta, \Delta\psi, \Delta\gamma$. Поэтому осуществлять его оптимизацию целесообразно одним из градиентных методов. В данном случае целесообразно использовать метод покоординатного спуска. Технология реализации предлагаемого метода такова:

1. Выделяем один – два контурных объекта в центральной части изображения;
2. Находим на выделенных контурах ключевые точки и устанавливаем между ними соответствие;
3. Находим частные производные $\frac{\partial F}{\partial(\Delta x)}, \frac{\partial F}{\partial(\Delta y)}, \dots, \frac{\partial F}{\partial(\Delta\gamma)}$ и организуем процесс покоординатного спуска по каждой координате до достижения критерия останова оптимизационного процесса – $|\text{grad}F(\Delta\mathbf{v})| < \varepsilon$, где ε – заданное пороговое значение.

Аналогичная задача ставилась в работе [9]. Однако в ней предполагалось, что на подстилающей поверхности Земли имеются «заведомо известные топологические особенности» – опорные точки, по которым должно выполняться совмещение РИ и ВИ. Реализация подобного предложения не реальна в настоящее время.

Библиографический список

1. Обработка изображений в авиационных системах технического зрения. Под ред. Л.Н. Костяшкина, М.Б. Никифорова. - М.: Физматлит, 2016. – 240 с.
2. Новиков А.И., Ефимов А.И. Многошаговый алгоритм построения проективного преобразования и оценивания качества совмещения изображений// Доклады 18-й Международной конференции «Proceedings of the 18th International Conference» DSPA-2016, М.: Россия, доклады. Т. 2. – с. 638-641.
3. Грузман И.С., Киричук В.С., Косых В.П., Перетрягин Г.И., Спектор А.А. Цифровая обработка изображений в информационных системах. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. - 351 с.
4. А.И. Ефимов, А.И. Новиков. Алгоритм поэтапного уточнения проективного преобразования для совмещения изображений// Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 2. – С. 258-266. – DOI: 18287/2412-6179-2016-40-2-258-266.

5. Чочиа П.А. Быстрое корреляционное совмещение квазирегулярных изображений // Информационные процессы, том 9, № 3, 2009. – С. 117-120.
6. Елесина С.И., Костяшкин Л.Н., Логинов А.А., Никифоров М.Б. Совмещение изображений в корреляционно-экстремальных навигационных системах. – М.: Радиотехника, 2015. – 208 с.
7. Новиков А.И., Логинов А.А., Колчаев Д.А. Комбинированный метод совмещения разнородных изображений в авиационных системах технического зрения // Цифровая обработка сигналов, 2017, № 2. – С. 53-59.
8. Герман Е.В., Муратов Е.Р., Новиков А.И. Математическая модель формирования зоны неопределенности в задаче совмещения изображений // Вестник РГРТУ, № 4, вып. 46, часть 2. Рязань, 2013. – С. 10-16.
9. Бондаренко, М. А. Алгоритм совмещения сенсорной и синтезированной видеоинформации в авиационной системе комбинированного видения // Кибернетика и программирование. – 2016. – № 1. – С. 236–257. DOI: 10.7256/2306-4196.2016.1.17770.

УДК 535.231.15; ГРНТИ 29.31.27

О РЕШЕНИИ ВЕКТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ЖИВОПИСИ В ТЕХНИКЕ ТЕМПЕРА

Е.А. Филипенко

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
Российская Федерация, Москва, FilipenkoYA@mpei.ru*

Аннотация. В работе рассматривается вывод уравнения переноса для частного случая пространства излучения в экспонате, созданном в технике темпера.

Ключевые слова: уравнение переноса излучения (УПИ), экспозиционное освещение, живопись в технике темпера.

SOLUTION OF THE VECTORIAL RADIATIVE TRANSFER EQUATION FOR TEMPERA PAINTING

E.A. Filipenko

*National Research University «Moscow Power Engineering Institute»,
Russia, Moscow, FilipenkoYA@mpei.ru*

The summary. The paper discusses a special case of solving the radiative transfer equation for tempera painting.

Keywords: radiative transfer equation (RTE), exhibition lighting, tempera painting.

Введение

Темпера (также называемая яичной темперой) – это метод рисования, который заменил метод энкаустической живописи, но сам по себе был заменен масляной живописью. Его название происходит от латинского слова *temperare*, что означает «смешивать в пропорции». В отличие от энкаустических красок, которые содержат пчелиный воск для связывания цветных пигментов или масляных красок, в которых используются масла, темпера использует эмульсию воды, яичных желтков или цельных яиц (иногда с небольшим количеством клея, меда или молока). Одной из особенностей темперной живописи является обильное использование лессировочных красок, создающих прозрачные и полупрозрачные слои, что позволяет большому количеству энергии попадать на внутренние части произведения. Подавляющее большинство произведений, написанных в технике темпера, в нашей стране представляют собой иконы, написанные на досках [1].

Сохранность и долговечность всех представляемых в музее экспонатов обуславливается соблюдением норм освещенности. В музеях устанавливаются верхние границы допустимых норм, превышение которых должно быть абсолютно исключено. Живопись в технике темпера согласно ПНСТ 392-2020, относится к группе малочувствительных к свету экспонатов, средняя освещенность которых не должна превышать 200 Лк [2]. Сегодня во всем мире замечается четкий курс на пересмотр общепринятых норм

экспозиционного освещения. Экспертами выяснено, что большое значение имеет даже не сам уровень освещенности, а наносимое им облучение, величина которого определяется в каждом рассматриваемом случае отдельно [3]. Свет, чаще всего от экспозиционного узконаправленного светильника, попадая на поверхность иконы под углом θ проходит через все составляющие экспонат слои, взаимодействует с материалами, из которых он создан. Поскольку показатель преломления у каждого слоя свой, возможны ситуации, при которых часть светового излучения, дошедшая до глубоких слоев иконы испытывает полное внутреннее отражение (ПВО) и со временем переходит в тепловую энергию. Таким образом, возможно повреждение внутренних слоев художественного произведения, отреставрировать которые невозможно, не повредив верхние красочные слои. Представляемая работа является частью исследования по изучению влияния освещения на живопись в технике темпера.

Построение физико-математической модели живописи в технике темпера

С точки зрения физики, икону следует рассматривать как трехмерное тело, состоящее из различных материалов, расположенных в определенной последовательности.

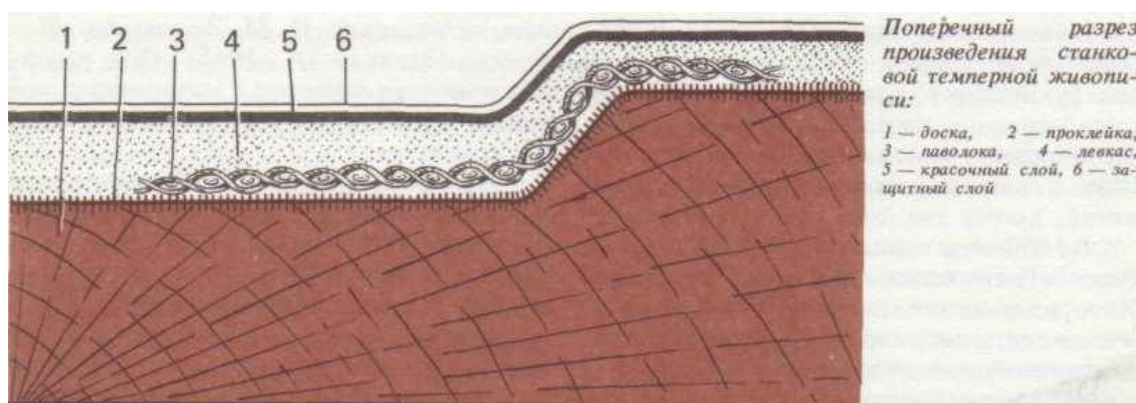


Рис. 1. Разрез иконы

Поскольку:

- геометрические размеры иконы много больше длины волны в видимом спектральном диапазоне;
- источник света удален от экспоната на значительное расстояние;
- соблюдается термодинамическое равновесие,

мы можем рассмотреть данную систему, как плоскопараллельную мутную среду, состоящую из набора плоских слоев (защитный слой, красочные слои, левкас, клей, основа) – до 10 слоев, облучаемых плоским мононаправленным источником излучения.

В реальной среде наблюдается зависимость характеристик рассеяния и поглощения излучения от длины волны λ . Здесь мы ограничимся рассмотрением вопроса распространения в среде монохроматического излучения и не будем учитывать конечную ширину контура линии. Распространение в среде излучения сложного спектрального состава в дальнейшем будет рассматриваться как независимое распространение многих монохроматических лучей, с возможностью их суммирования.

Для начала запишем краевую задачу векторного уравнения переноса излучения в случае модели для всех слоев, кроме нижнего[4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{L}(\tau, \hat{I}) + \vec{L}(\tau, \hat{I}) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint \vec{R}(\hat{I} \times \hat{I}' \rightarrow \hat{z} \times \hat{I}) \vec{\chi}(\tau, \hat{I} \hat{I}') \hat{R}(\hat{z} \times \hat{I} \rightarrow \hat{I} \times \hat{I}') \vec{L}(\tau, \hat{I}') d\hat{I}'; \\ \vec{L}(0, \mu > 0, \varphi) = \vec{L}_0 \delta(\hat{I} - \hat{I}_0); \\ \vec{L}(\tau_0, \mu \leq 0, \varphi) = \int_{\hat{n} \hat{I}' \geq 0} \vec{R}(\hat{n} \times \hat{I}' \rightarrow \hat{z} \times \hat{I}) \vec{\rho}(\hat{n} \times \hat{I}') \vec{R}(\hat{z} \times \hat{I} \rightarrow \hat{n} \times \hat{I}') \vec{L}(\tau, \hat{I}') (\hat{n} \hat{I}') d\hat{I}' \end{array} \right.$$

и краевую задачу векторного уравнения переноса излучения для нижнего слоя с диффузно отражающей подложкой:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{L}(\tau, \hat{I}) + \vec{L}(\tau, \hat{I}) = \frac{\Lambda}{4\pi} \oint \vec{R}(\hat{I} \times \hat{I}' \rightarrow \hat{z} \times \hat{I}) \vec{\chi}(\tau, \hat{I} \hat{I}') \hat{R}(\hat{z} \times \hat{I} \rightarrow \hat{I} \times \hat{I}') \vec{L}(\tau, \hat{I}') d\hat{I}'; \\ \vec{L}(0, \mu > 0, \varphi) = \vec{L}_0 \delta(\hat{I} - \hat{I}_0); \\ \vec{L}(\tau_0, \mu \leq 0, \varphi) = [\rho^E / \pi \ 0 \ 0 \ 0]^T \end{array} \right.$$

где $\tau = \int \epsilon(z) dz$ – оптическая толщина трассы. В случае однородной трассы $\tau = \epsilon * z$

$\vec{L}$ – вектор-параметр Стокса, наиболее полно описывающий излучение.

$\mu = \cos \theta$, где θ – зенитный угол

φ – азимутальный угол

$\hat{I}$ – вектор единичного направления в пространстве

Λ – альбеда однократного рассеяния

$\vec{R}$ – матрица ротатора

$\vec{\chi}$ – матрица рассеяния

ρ – Поляризационная отражательная способность дна (матрица Мюллера)

Первое уравнение описывает зависимость вектор-параметра Стокса от оптической глубины τ , а два оставшихся задают краевые условия на границах.

Поскольку рассматриваемый объект состоит из различных слоев (основа, клей, левкас, красочные слои, защитный слой), помимо распространения излучения внутри каждого слоя, необходимо также описать переходы излучения через границы раздела сред с различными показателями преломления. Важно для каждого перехода учесть:

1. преломление луча на границе двух сред
2. изменение состояния поляризации излучения

Постараемся вывести необходимые формулы по аналогии с прохождением границы «атмосфера»-«океан» в задачах дистанционного зондирования атмосферы, традиционно решаемых с помощью уравнения переноса излучения [5].

Заметим, что $\mu_i = \sqrt{1 - \frac{1 - \mu^2}{n_i^2}}$, где μ_i – косинус зенитного угла для i -го слоя, а n_i – показатель преломления i -го слоя.

Таким образом при наличии информации о показателях преломления для всех слоев, мы однозначно можем определить зенитный угол для каждого слоя.

Также запишем формулы Френеля для амплитудных коэффициентов отражения и пропускания на границе слоев с номерами $i, i+1$ [6]:

$$r_{\parallel, i+1} = -\frac{tg(\Theta_i - \Theta_{i+1})}{tg(\Theta_i + \Theta_{i+1})};$$

$$t_{\parallel,i,i+1} = \frac{2 \sin \Theta_{i+1} \cos \Theta_i}{\sin (\Theta_i + \Theta_{i+1}) \cos (\Theta_i - \Theta_{i+1})} ;$$

$$r_{\perp,i,i+1} = -\frac{\sin(\Theta_i - \Theta_{i+1})}{\sin(\Theta_i + \Theta_{i+1})} ;$$

$$t_{\perp,i,i+1} = \frac{2 \sin \Theta_{i+1} \cos \Theta_i}{\sin (\Theta_i + \Theta_{i+1})} .$$

На основании приведенных формул записывается для каждого слоя, кроме последнего поляризационная матрица Мюллера и определяются верхние граничные условия для всех слоев в виде частично поляризованного света:

$$\overrightarrow{L_0'} \delta(\hat{I} - \hat{I}_0') = [1 \ p \ 0 \ 0]^T \delta(\theta - \theta_0') \delta(\varphi).$$

В настоящее время в качестве основной индикатриссы рассеивания рассматривается модельная индикатрисса для сферических частиц, описанная в теории Ми, и записываемая в матричной форме в виде:

$$\overrightarrow{\chi_s}(\gamma) = \begin{bmatrix} a_1(\gamma) & b_1(\gamma) & 0 & 0 \\ b_1(\gamma) & a_1(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2(\gamma) & b_2(\gamma) \\ 0 & 0 & -b_2(\gamma) & a_2(\gamma) \end{bmatrix}.$$

Выводы

В настоящей работе описано векторное уравнение переноса излучения для случая распространения света в темперной живописи.

Дальнейшая работа предполагает экспериментальное определение исходных данных, таких как: показатели преломления, поглощения, распределение частиц по размерам для различных слоев с последующим решением описанных уравнений численными методами.

Библиографический список

1. Богданов Г.А., Кристи Е.М., Филатов В.В., Филатов С.В., Реставрация станковой темперной живописи. – Москва: Изобразительное искусство, 1986.
2. ООО «ВНИСИ», Предварительный национальный стандарт Российской Федерации ПНСТ 392-2020 «Музейное освещение. Освещение светодиодами. Нормы». – Москва, 2020.
3. Чафонова В.Г., Музейное освещение: учебное пособие. – Санкт-Петербург, СПбГИКиТ, 2019.
4. Коркин С.В., Математическая модель отражения поляризованного излучения при дистанционном зондировании мутных сред. – Москва, Московский энергетический институт, 2009
5. Budak V.P., Klyuykov D.A., Korkin S.V., Light Scattering Reviews 5. Convergence acceleration of radiative transfer equation solution at strongly anisotropic scattering. – 2010
6. Ландсберг Г.С., Оптика. – Москва: Наука, 1976.

УДК 535.329; ГРНТИ 29.19.16

ПЛАНАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ВОЛНОВОДОВ НА ПОВЕРХНОСТНОМ ПОЛЯРИТОНЕ

К.В. Бухенский¹, А.Б. Дюбуа¹, А.Н. Конюхов¹, С.И. Кучерявый², С.Н. Машнина¹, А.С. Сафoshкин¹

¹Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина

²Обнинский институт атомной энергетики

Национального исследовательского ядерного университета МИФИ

e-mail: safoshkin.a.s@rsreu.ru

Аннотация. В работе рассматриваются различные типы волноводов на поверхностном поляритоне. Приведены результаты исследований поверхностных поляритонов на планарных структурах, рассмотрены методы анализа для полупроводниковых гетероструктур, в том числе с применением графена.

Ключевые слова: поверхностные поляритоны, волноводы, графен, гетероструктуры.

PLANAR GEOMETRY OF SURFACE POLARITON WAVEGUIDES

K.V. Bukhensky¹, A.B. Dubois¹, A.N. Konukhov¹, S.I. Kucheryavy², S.N. Mashnina¹, A.S. Safoshkin¹

¹Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin, Russia, Ryazan,

²Obninsk Institute of Atomic Energy of the National Research Nuclear University MEPhI

e-mail: safoshkin.a.s@rsreu.ru

The summary. The paper considers various types of waveguides based on a surface polariton. The results of studies of surface polaritons on planar structures are presented, and analysis methods for semiconductor heterostructures, including those using graphene, are considered.

Keywords: surface polaritons, waveguides, graphene, heterostructures.

Процессы возбуждения поверхностной волны (поляритона) в результате дифракции электромагнитного излучения в средах представляют собой одну из важнейших задач интегральной оптики. По сравнению с процессами распространения электромагнитного излучения вдоль многослойных структур с параллельными границами раздела, которые хорошо изучены и систематизированы к настоящему времени [1,2], дифракционные задачи изучены гораздо слабее.

Особый интерес представляют процессы возбуждения и распространения электромагнитных волн вдоль планарных наноструктур, прежде всего на графене. Однако даже в самом простом приближении решение уравнений Максвелла при заданных граничных и краевых условиях приводит к громоздким интегродифференциальным уравнениям [3], которые имеют строго аналитическое решение только для определенных геометрий структур [4].

В данной работе рассмотрена задача для поверхностной волны на планарной гетероструктуре, привлекательность которой объясняется следующими факторами:

- 1) относительная простота используемых теоретических моделей распространения электромагнитного излучения вдоль таких структур;
- 2) фундаментальность получаемых результатов, позволяющая обобщить их на более сложные геометрии структур;
- 3) планарная геометрия в достаточной степени близка к действительности.

Поверхностный поляритон представляет собой поперечную магнитную ТМ-поляризованную оптическую волну, распространяющуюся вдоль поверхности границы металл-диэлектрик. Это связанное возбуждение включает в себя колебания плотности электронного заряда в металлах и электромагнитных волн с максимумом на границе раздела и экспоненциально убывающих вглубь обеих сред.

Впервые распространение поверхностного поляритона вдоль серебряной пленки, заключенной между стеклянной призмой и активной средой, было изучено в [5]. При вычислении отражения от поверхности стекло-металл в зависимости от угла падения при различных активных средах было обнаружено, что существует критический угол, при котором отражение сильно убывает и наблюдается усиление возбуждения поверхностного поляритона.

Зависимость возбуждения поверхностного поляритона от угла падения и от активной среды исследовалась в [6]. Структуры содержали 39- и 67-нм серебряные пленки на стеклянных призмах, находящихся в контакте с серебряными пленками, взаимодействующими с активной средой, представляющей собой этанол, подкрашенный родамином-101 с концентрацией $7 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. ТМ-поляризованное излучение с длиной волны $\lambda = 633 \text{ nm}$ возбуждало поверхностный поляритон на границе «серебро-краситель», в то время как длина волны возбуждения красителя составляла $\lambda = 580 \text{ nm}$ (рис. 1).

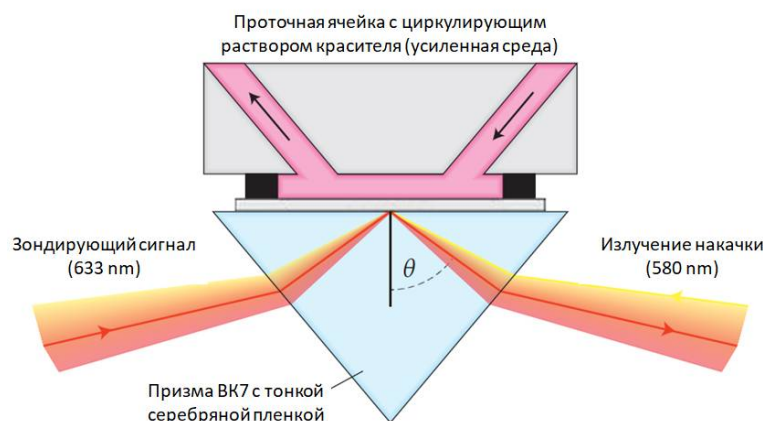


Рис. 1. Схема исследования зависимости излучения поверхностного поляритона от угла падения [70]

Дифференциальный коэффициент отражения ΔR вычислялся сравнением случаев с накачкой и без накачки как функция угла падения θ (рис. 2, 3).

Кроме того, в настоящее время проводятся экспериментальные исследования распространения поверхностного поляритона в различных микро- и наноструктурах различной размерности (квантовые точки, нити и т.д.) [7].

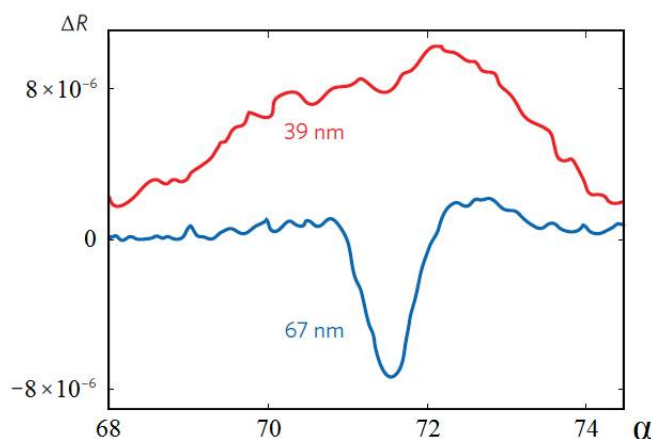


Рис. 2. Зависимость дифференциального коэффициента отражения ΔR для родамина ($N=7 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$) в этаноле в качестве среды усиления в зависимости от угла падения

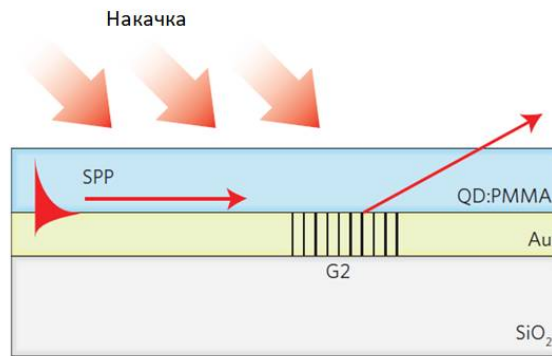


Рис. 3. Поверхностный поляритон, распространяющийся через легированный слой; решетка G2 отделяет поляритон от объемных волн

Простейшим волноводом на поверхностном поляритоне является одиночная граница «металл-диэлектрик» (рис. 4). Металлы имеют отрицательную диэлектрическую проницаемость на определенных частотах, что является необходимым условием возбуждения поверхностного поляритона.

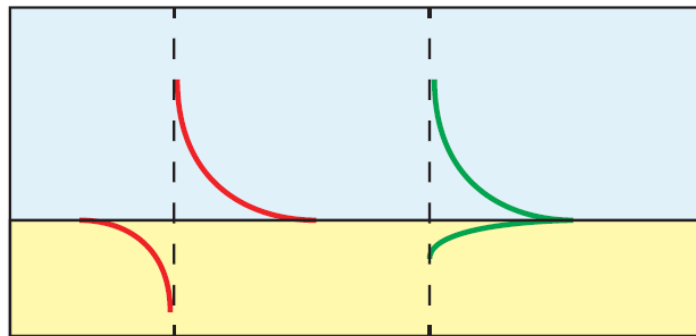


Рис. 4. Одномерный волновод на границе «металл – диэлектрик». Моды распространения вдоль оси Oх: красный цвет – $\text{Re}\{E_z\}$, зеленый цвет – $\text{Re}\{H_y\}$

Симметричный волновод с тонкой металлической пленкой, симметрично ограниченный диэлектриками, поддерживает симметричность или асимметричность двух мод поверхностного поляритона (рис. 5, 6).

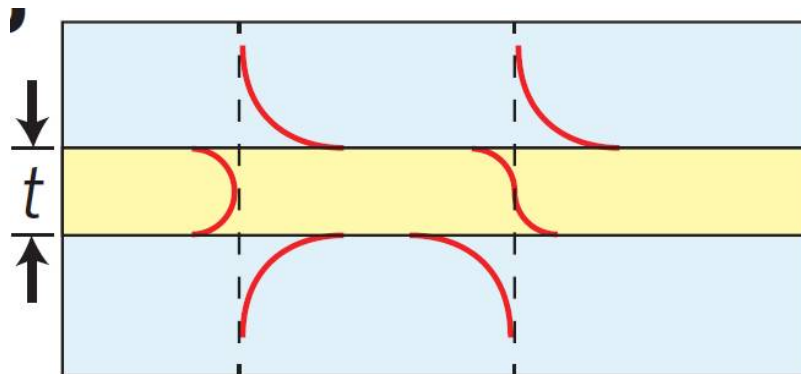


Рис. 5. Одномерный волновод. Металлическая пленка находится в симметричных диэлектрических средах. Красный цвет – моды $\text{Re}\{E_z\}$ (слева – симметричная мода, справа – несимметричная мода)

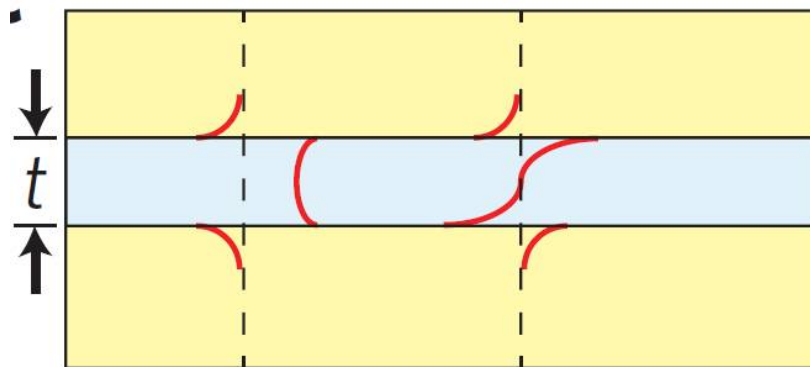


Рис. 6. Одномерный волновод. Диэлектрическая пленка находится в симметричных металлических средах. Красный цвет – моды $\text{Re}\{E_z\}$ (слева – симметричная мода, справа – несимметричная мода)

В работе [8] показано, что в системе $\text{Ag} - \text{SiO}_2$ коэффициент ослабления для симметричной и асимметричной мод равен соответственно $0.0012 \text{ dB}/\mu\text{m}$ и $0.45 \text{ dB}/\mu\text{m}$ (2.8 cm^{-1} и 10^3 cm^{-1}) при толщине пленки $t = 20 \text{ nm}$ и $\lambda = 1550 \text{ nm}$, быстро возрастает при убывании длины волны λ .

Также поддерживает возбуждение поверхностного поляритона структура на тонкой диэлектрической пленке, ограниченная двумя металлическими средами (Рис. 6) [9]. В системе $\text{Ag} - \text{SiO}_2$ ослабление достигает $0.85 \text{ dB}/\mu\text{m}$ ($2 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-1}$) при $t = 50 \text{ nm}$ и $\lambda = 1550 \text{ nm}$ (табл. 1).

Таблица 1. Коэффициенты затухания поверхностного поляритона на структуре $\text{Ag} - \text{SiO}_2$ для различных длин волн

λ, nm	n_{eff}	δ_w, nm	2α		$L, \mu\text{m}$
			cm^{-1}	$\text{dB} \times \mu\text{m}^{-1}$	
360	2,537	44	$5 \cdot 10^5$	218	0,02
633	1,565	176	$1.6 \cdot 10^3$	0,71	6
1550	1,457	1269	$1 \cdot 10^2$	0,044	100

В таблице 1 $n_{\text{eff}} = \beta\lambda / 2\pi$, где β – соответствующая константа распространения, δ_w – ширина поля, α – коэффициент ослабления поля, $L = 1 / 2\alpha$ – глубина распространения.

На рис. 7-12 показаны распространённые волноводы на двумерных структурах. Одиночный волновод, выполненный на МДП-структуре (рис. 7), и гибридный волновод с тонкой диэлектрической пленкой (рис. 8) позволяют локализовать область распространения поверхностной волны.

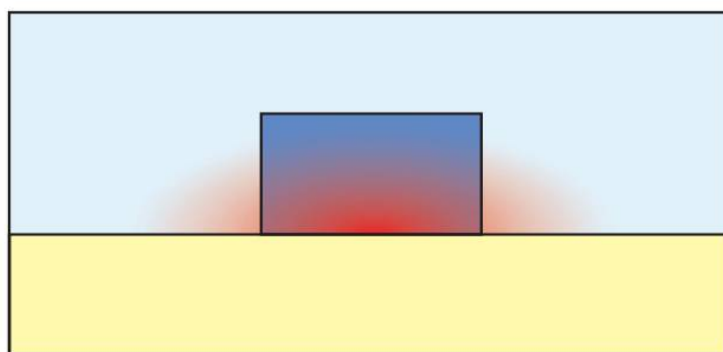


Рис. 7. Двумерный волновод на структуре «металл – диэлектрик – полупроводник»

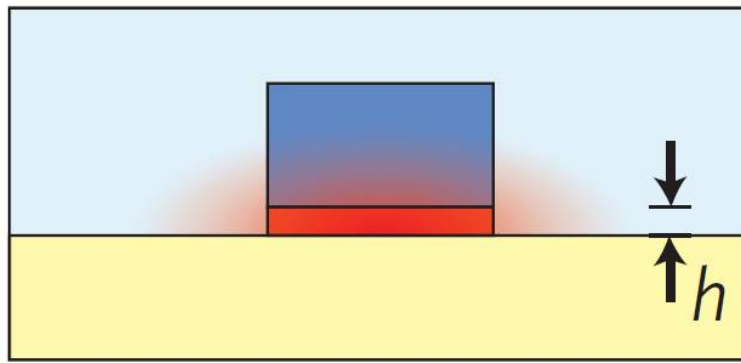


Рис. 8. Двумерный волновод на поляритоне. Гибридный волновод с тонкой диэлектрической пленкой

В предыдущих случаях (рис. 4-6) поверхностный поляритон ограничен только средой распространения и, как следствие, ослабляется в десятки раз, т.е. имеет место случай слабой локализации. В случаях низкоразмерных структур (рис. 7-12) мы получаем сильнолокализованные состояния поверхностного поляритона, которые ограничены размерами тонкопленочной наноструктуры.

В [10,11] были разработаны конструкции волноводов с сильной локализацией поверхностных поляритонов на тонкой металлической пленке, находящихся внутри диэлектрика (рис. 9) и на зазоре (рис. 10). Было показано, что ослабление в этих волноводах существенно ниже по сравнению с обычными структурами.

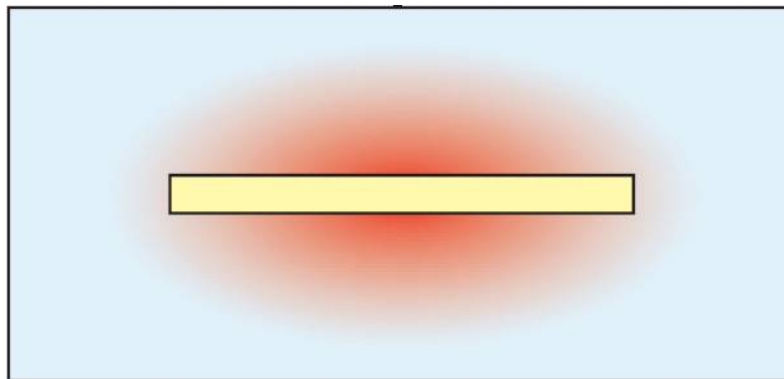


Рис. 9. Двумерный волновод на поляритоне. Металлическая пленка расположена внутри диэлектрика

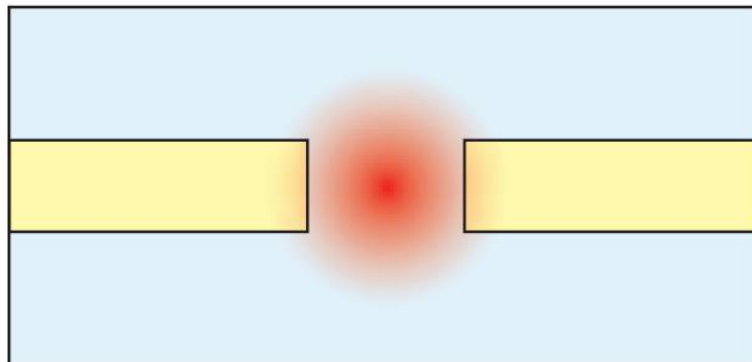


Рис. 10. Двумерный волновод на поляритоне. Волновод с металлическим зазором

Следует отметить, что сильную локализацию для поверхностного поляритона можно получить и без создания наноструктур [11]. На рис. 11-12 представлены волновод «на острие» и каналный волновод.

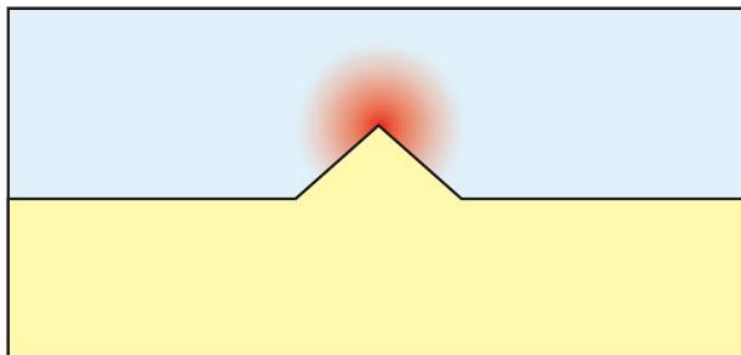


Рис. 11. Двумерный волновод на поляритоне. Волновод «на острие»

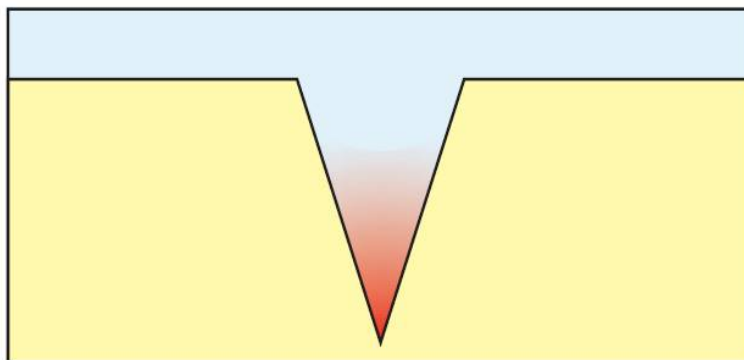


Рис. 12. Двумерный волновод на поляритоне. Канальный волновод

Таким образом, в планарной гетероструктуре на границе «полупроводник – металл» могут возникать плазмон-поляритонные возбуждения как реакция электронного газа на внешнее воздействие в виде ТМ-поляризованной электромагнитной волны. Наиболее интересным является использование графена в качестве одной из тонких пленок из-за возможности регулировать параметры волновода [12]. Использование модового метода расчета планарного волновода на полупроводниковой гетероструктуре позволяет перейти от решения системы интегродифференциальных уравнений к решению системы алгебраических уравнений, что дает возможность получить аналитические зависимости потоков энергии от параметров структуры и параметров падающего излучения [13-16].

Библиографический список

1. Маркузе Д. Оптические волноводы: пер. с англ. / под ред. В.В. Шевченко. – М.: Мир, 1974. – 576 с.
2. Нефедов Е.И. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
3. Киселев В.А. Резонансное преобразование и отражение поверхностных волн в тонкопленочном волноводе с синусоидально гофрированной поверхностью // Квантовая электроника. 1974. Т. 1 №2. С. 329.
4. Шевченко В.В. Плавные переходы в открытых волноводах. – М.: Наука, 1978. – 191 с.
5. Li R., Banerjee A. and Grebel H. The possibility for surface plasmon lasers // Opt. Express. 2009. Vol. 17. No 3. P. 1622–1627.
6. Noginov M.A., Podolskiy V.A., Zhu G., Mayy M., Bahoura M., Adegoke J.A., Ritzo B.A., Reynolds K.. Compensation of loss in propagating surface plasmon polariton by gain in adjacent dielectric medium // Opt. Express. 2008. Vol. 16. No 2. P. 1385–1392.

7. Berini P. and De Leon I. Surface plasmon–polariton amplifiers and lasers // *Nature photonics*. 2012. Vol. 6. No. 1. P. 16–24.
8. Berini P. Figures of merit for surface plasmon waveguides // *Opt. Express*. 2006. Vol. 14. No. 26. P. 13030–13042.
9. Dionne J. A., Sweatlock L. A., Atwater H. A. and Polman A. Plasmon slot waveguides: towards chip-scale propagation with subwavelength-scale localization // *Phys. Rev. B*. 2006. Vol. 73. No. 3. P. 035407.
10. Berini P. Plasmon-polariton waves guided by thin lossy metal films of finite width: bound modes of symmetric structures // *Phys. Rev. B*. 2000. Vol. 61. No. 15. P. 10484–10503.
11. Pile D.F.P., Ogawa T., Gramotnev D.K., Matsuzaki Y., Vernon K.C., Yamaguchi K., Okamoto T., Haraguchi M. and Fukui M. Two-dimensionally localized modes of a nanoscale gap plasmon waveguide // *Appl. Phys. Lett.* 2005. Vol. 87. No. 26. P. 261114.
12. Chakraborty S., Marshall O.P., Folland T.G., Kim Y.-J., Grigorenko A.N., Novoselov K.S. Gain modulation by graphene plasmons in aperiodic lattice lasers // *Science*. 2016. Vol. 351. No. 6270. P. 246–248.
13. Бухенский К.В., Дюбуа А.Б., Конюхов А.Н., Кучерявый С.И., Машнина С.Н., Сафoshкин А.С. Особенности решения интегро-дифференциальных уравнений Максвелла и возбуждения поверхностного поляритона на планарной структуре. // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2017. Т. 19. № 3. С. 73–81.
14. Дюбуа А.Б., Лысов Р.В. Возбуждение и распространение поверхностного поляритона при дифракции электромагнитной волны на планарной структуре. // *Математическое моделирование*. 2006. Т. 18. №3. С. 3–12.
15. Bukhensky K.V., Dubois A.B., Konukhov A.N., Kucheryavyy S.I., Safoshkin A.S. Surface polariton propagation in structure with a graphene layer. // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 2022. Т. 15. № 6. С. 742–752.
16. Бухенский К.В., Дюбуа А.Б., Конюхов А.Н., Кучерявый С.И., Сафoshкин А.С. Распространение электромагнитного излучения в графеновых структурах. // *Ученые записки физического факультета Московского университета*. 2023. № 1. С. 2310301.

УДК 519.6; ГРНТИ 27-35

ДИНАМИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Ю.А.Филатов, О.В. Мурлейкина

*Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина
Российская Федерация, г. Рязань, horek.colupaeva@yandex.ru*

Аннотация. В работе предлагается использовать динамическую модель экономического процесса для его идентификации и последующего прогноза ВВП. Проведено сравнение со статической моделью процесса.

Ключевые слова: линейная динамическая модель, ВВП, ошибка идентификации, весовая функция фильтра, принцип суперпозиции, прогнозирование валового продукта.

DYNAMIC IDENTIFICATION OF THE ECONOMIC PROCESS

Yu.A.Filatov, O.V. Murleykina

*Ryazan State Radio Engineering University. V.F. Utkin
Russian Federation, Ryazan, horek.colupaeva@yandex.ru*

Annotation. The paper uses a dynamic model of the economic process to detect and identify the forecast of GDP. A comparison with a static model of the process is made.

Key words: linear dynamic model, GDP, determination error, filter weight function, superposition principle, forecasting gross domestic product.

Важнейшим показателем состояния национальной экономики считается валовой внутренний продукт ВВП, изменение которого во времени показывает развитие страны. На основании этого осуществляется перспективное планирование экономики, учитывающее прогнозы ВВП на последующие годы. Прогнозы, в свою очередь, формируются посредством математических моделей поведения ВВП.

Обычно в экономических исследованиях используются статические, например, регрессионные модели. В работе делается попытка применить динамическую модель для описания и прогноза ВВП Y , в общем зависящего от объемов трудовых ресурсов L и капитала K [1].

Представим процесс формирования ВВП в виде линейной дискретной динамической системы с двумя входами V_n^K, V_n^L , соответствующими затратам капитала и труда и одним выходом Y_n , который определяет ВВП. Согласно принципу суперпозиции введенную линейную модель удобно заменить двумя фильтрами с конечной памятью, выходы которых Y_n^K и Y_n^L являются реакциями на соответствующие затраты факторов K и L [2]

$$Y_n^K = \sum_{i=0}^{m-1} w_i^K v_{n-i}^K, \quad n = 0, 1, \dots, m-1, \quad Y_n^L = \sum_{i=0}^{m-1} w_i^L v_{n-i}^L, \quad n = 0, 1, \dots, m-1. \quad (1)$$

Здесь через w_i^K, w_i^L обозначены весовые (импульсные) функции первого и второго фильтров соответственно, m число дискрет весовой функции (память фильтра). Выход Y_n модели формируется по следующей схеме

$$Y_n = Y_n^K + Y_n^L = \sum_{i=0}^{m-1} w_i^K v_{n-i}^K + \sum_{i=0}^{m-1} w_i^L v_{n-i}^L, \quad n = 0, 1, \dots, m-1. \quad (2)$$

По сути дела, вычисления по формуле (2) сводятся к нахождению скалярных произведений соответствующих векторов. Для этого введем в рассмотрение векторы весовых функций двух фильтров $w^K = (w_0^K, w_1^K, \dots, w_{m-1}^K)$, $w^L = (w_0^L, w_1^L, \dots, w_{m-1}^L)$ и векторы наблюдений факторов производства $V_n^K = (v_n^K, v_{n-1}^K, \dots, v_{n-m+1}^K)$, $V_n^L = (v_n^L, v_{n-1}^L, \dots, v_{n-m+1}^L)$. В результате выражение (2) принимает вид

$$Y = (Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_{n-m+1}) = (V_n^K, w^K) + (V_n^L, w^L). \quad (3)$$

Целью работы является нахождение весовой функции линейной модели, которая осуществляла бы прогноз ВВП на основании предполагаемых трудовых и производственных затрат. Однако информация о затратах, как правило, содержит неточности, поэтому говорить приходится об оценке весовой последовательности $\hat{w} = (\hat{w}^K, \hat{w}^L)$. При этом ВВП, вычисляемый в соответствии с (3)

$$\hat{Y} = (V_n^K, \hat{w}^K) + (V_n^L, \hat{w}^L) = (V^K \ V^L) \begin{pmatrix} \hat{w}^K \\ \hat{w}^L \end{pmatrix} = V \hat{w} \quad (4)$$

будет отличаться от реального ВВП Y на величину, равную ошибке идентификации $\varepsilon = Y - \hat{Y}$.

В качестве критерия идентификации выбираем метод наименьших квадратов, требующий минимизации суммы квадратов ошибок идентификации

$$\varepsilon^T \varepsilon = (Y - V\hat{w})^T (Y - V\hat{w}) \rightarrow \min_{\hat{w}}. \quad (5)$$

Решая аналитически оптимизационную задачу (5), находим оценки $\hat{w} = (\hat{w}^K \hat{w}^L)_{\text{ко-}}$ эффициентов весовой функции линейной динамической модели для осуществления краткосрочного прогноза ВВП

$$\hat{w} = \begin{pmatrix} \hat{w}^K \\ \hat{w}^L \end{pmatrix} = (V^T V)^{-1} V^T Y. \quad (6)$$

Применение предлагаемого способа динамической идентификации и прогноза ВВП показано на примере экономики США [3]. Для этого составляем таблицу 1 и размещаем в ней данные о ВВП Y (млрд. дол.) и факторах производства K (млрд. дол.) и L (млн. чел.) за 1975 – 2014 годы.

Таблица 1. Данные о ВВП и факторах производства за 1975 – 2014 годы

Y	1689	1877	2086	2356	2632	2862	3210	3345	3638	4040
	4346	4590	4870	5252	5657	5979	6174	6539	6878	7308
	7664	8100	8100	9089	9660	10284	10621	10977	11510	12274
	13093	13855	14477	14718	14418	14964	15517	16155	16691	17393
K	348	396	467	558	642	672	748	752	814	948
	1027	1080	1120	1177	1242	1269	1239	1293	1378	1594
	1721	1854	2013	2192	2370	2380	2350	2474	2701	2981
	3166	3202	3091	2673	2691	2836	3064	3206	3416	3577
L	133	135	137	138	143	146	149	148	151	151
	154	157	160	162	166	167	168	169	172	174
	177	178	182	185	186	188	190	192	192	192
	194	197	199	199	200	199	199	199	200	200

Функционирование линейной динамической системы моделируется в среде Matlab, Формируются матрицы производств V^K , V^L по первым 34 данным таблицы 1 и объединяют их в матрицу $V = (V^K V^L)$. Затем вычисляем оценку весовой матрицы - строки $\hat{w} = (\hat{w}^K, \hat{w}^L)$ линейной модели (6), которая включает две весовые последовательности $\hat{w}^K$, $\hat{w}^L$ фильтров, используемые для формирования последовательности ВВП $\hat{Y}$ (4).

Следует отметить, синтез весовой функции $\hat{w} = (\hat{w}^K, \hat{w}^L)$ осуществлялся по первым 34 значениям факторов производства. Оставшиеся 6 значений факторов K , L оказываются несогласованными с весовой последовательностью $\hat{w}$, что позволяет рассматривать соответствующие значения ВВП на этом интервале прогнозными. Точность прогнозирования оценивается относительной ошибкой $\bar{\varepsilon}_d$ [4], которая определяется согласно (7) на основании

ошибок прогнозирования $\varepsilon_t = Y_t - \hat{Y}_t$, $t = \overline{1,6}$, приведенных в таблице 2.

Значение относительной ошибки равно $\bar{\varepsilon}_d = 1,3\%$.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{100}{\bar{Y}} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^6 (Y_i - \hat{Y})^2}, \quad \bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^6 Y_i \quad (7)$$

Таблица 2. Ошибки прогнозирования ВВП динамической моделью

Горизонт прогнозирования	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Реальные значения ВВП	14418	14964	15517	16155	16191	17393
Прогнозные значения ВВП	14411	14810	15222	16285	16536	17571
Ошибки прогнозирования $\varepsilon_t = Y_t - \hat{Y}_t$	7	154	295	-130	-345	-178

Оппонентом динамической модели ВВП был выбрана статическая модель в виде производственной функции Кобба – Дугласа в виде производственной функции Кобба – Дугласа $\hat{Y}_t = AK_t^\alpha L_t^\beta$ [1]. Проведя линеаризацию модели и оценив МНК ее параметры, окончательно получаем модель Кобба –Дугласа $\hat{Y}_t = 0,0017K_t^{0,6247}L_t^{2,0642}$. Затем оценивается адекватность статической модели данным ВВП по Фишеру, что подтверждается F- критерием $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}$. Теперь составляется таблица 3 ошибок прогнозирования на том же интервале в шесть лет. По этим данным вычисляется относительная ошибка прогнозирования ВВП по статической модели $\bar{\varepsilon}_{st} = 13,3\%$, которая свидетельствует о преимуществе динамической модели.

Таблица 3. Ошибки прогнозирования ВВП статической моделью

Горизонт прогнозирования	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Реальные значения ВВП	14418	14964	15517	16155	16191	17393
Прогнозные значения ВВП	13387	13271	13766	14406	15005	15537
Ошибки прогнозирования	1031	1693	1751	1749	1186	1856

Библиографический список

1. Производственные функции: теория и построение: учебное пособие / В. К. Горбунов. – Ульяновск: УлГУ, 2013. – 84 с.
2. Сергиенко А.Б. Обработка цифровых сигналов: учеб.пособие – СПб: БХВ – 2011. – 768 с.
3. Макроэкономические исследования США, be 5.biz.
4. Красс М.С. Математика в экономике. Математические методы и модели: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М. Финансы и статистика, 2007. - 544 с.

УДК 512.64; ГРНТИ 27.31.17

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ**И.П. Карасев¹, В.В. Миронов***Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, mironovlv@mail.ru*

Аннотация. В работе рассматриваются альтернативные методы линейной алгебры для решения следующих задач: приведение матрицы к ступенчатому виду, приведение квадратной матрицы к диагональному виду, решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решение СЛАУ произвольных размеров. Новые методы призваны разнообразить методы решения подобных классических задач. Одновременно они проще классических и менее утомительны в реализации. Методы легко превращаются в алгоритмы и могут быть использованы для компьютерной реализации решений поставленных задач.

Ключевые слова: методы линейной алгебры, алгоритмы решений, простота реализации.

ALTERNATIVE LINEAR ALGEBRA METHODS**I. Karasev², V. Mironov***Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, mironovlv@mail.ru*

The summary. The paper considers alternative methods of linear algebra for solving the following problems: reducing a matrix to a stepped form, reducing a square matrix to a diagonal form, solving a system of linear algebraic equations (SLAE), solving SLAE of arbitrary sizes. New methods are designed to diversify the methods for solving such classical problems. At the same time, they are simpler than classical ones and less tedious to implement. Methods are easily converted into algorithms and can be used for computer implementation of solutions to the tasks.

Keywords: linear algebra methods, solution algorithms, ease of implementation.

1. Приведение матрицы к ступенчатому виду

Задача. Матрицу A размером $m \times n$ привести к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Решение. Как известно из курса линейной алгебры, любую матрицу можно привести к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. При больших размерах матрицы A процесс приведения занимает много элементарных действий (сложения, умножения, т.н. арифметическая сложность) и (при «ручной» реализации) довольно утомителен.

Рассмотрим новую методику. Найдем квадратную матрицу L , приводящую преобразованием $L \cdot A$ матрицу A к ступенчатой форме.

Выпишем миноры матрицы A , расположив их вдоль главной диагонали (назовем их главными минорами матрицы A).

$M_1 = |a_{11}|$ – минор первого порядка,

$M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ – минор второго порядка,

Аналогично запишем миноры M_3, M_4 и так далее. Если $m \leq n$, то последний минор M_m есть минор m -го порядка.

Миноры расположим в порядке возрастания их размеров: $M_1, M_2, \dots, M_m$. Найдем алгебраические дополнения элементов последних столбцов этих миноров:

¹ Главный автор

² Main author

$$M_1 = a_{11} \Rightarrow A_{11} = 1.$$

$$M_2 \Rightarrow A_{12} = -a_{21}, A_{22} = a_{11}.$$

$$M_3 \Rightarrow A_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

.....

$$M_m \Rightarrow A_{1m}, A_{2m}, \dots, A_{mm}.$$

Составим матрицу L , элементы которой L_{ik} определяются равенствами:

$$L_{ik} = \begin{cases} A_{ki}, & \text{если } k \leq i, \\ 0, & \text{если } k > i. \end{cases}$$

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & \dots & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2m} & \dots & \dots & A_{mm} \end{vmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $L \cdot A = S$ – ступенчатая матрица. Задача решена.

Замечание. Для решения задач может быть существенно, что матрица L – неособенная. Однако, встречаются матрицы, у которых некоторые соответствующие элементы нескольких строк пропорциональны. Тогда некоторые диагональные элементы матрицы L обращаются в нуль, и матрица L будет особенной.

Одновременно легко убедиться в том, что в таких случаях перестановкой строк матрицы A можно убрать нули матрицы L на главной диагонали, превращая ее тем самым в неособенную.

Пример. Имеем

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \text{неособенная.}$$

$$M_1 = 1, M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, M_3 = |A|.$$

$$M_1 \Rightarrow A_{11} = 1,$$

$$M_2 \Rightarrow A_{12} = -2, A_{22} = 1,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{13} = -2, A_{23} = 1, A_{33} = 0,$$

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \text{особенная матрица.}$$

Поменяем местами вторую и третью строки матрицы A и найдем матрицу L :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = L - \text{неособенная.}$$

Тогда

$$L \cdot A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = S.$$

$$S = L \cdot A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1m} & A_{2m} & A_{3m} & \dots & \dots & A_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & S_{22} & S_{23} & \dots & S_{2m} & \dots & S_{2n} \\ 0 & 0 & S_{33} & \dots & S_{3m} & \dots & S_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_{mm} & \dots & S_{mn} \end{vmatrix} - \text{ступенчатая матрица.}$$

В матрице S имеем $S_{21} = 0, S_{21} = S_{32} = 0, \dots, S_{m1} = S_{m2} = S_{mm-1} = 0$. **Конец замечания.**

Пример 1. Найти ранг матрицы $A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Решение. Выписываем главные миноры в порядке возрастания размеров.

$$M_1 = 1, M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}, M_4 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения последних столбцов этих миноров и составим матрицу L .

$$M_1: l_{11} = 1, l_{12} = 0, l_{13} = 0, l_{14} = 0,$$

$$M_2: l_{21} = A_{12} = -2, l_{22} = A_{22} = 1, l_{23} = 0, l_{24} = 0,$$

$$M_3: l_{31} = A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, l_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, l_{33} = 5, l_{34} = 0,$$

$$M_4: l_{41} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8, l_{42} = A_{24} = 2, l_{43} = -6, l_{44} = -4.$$

Тогда

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ -8 & 2 & -6 & -4 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$S = L \cdot A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, искомый ранг $rg(A) = rg(S) = 4$.

2. Приведение квадратной матрицы к диагональному виду

Задача. Матрицу $A = \|a_{ik}\|_n$ преобразовать в диагональную.

Решение. Матрицу A приведем к ступенчатому виду с помощью матрицы L .

$$L \cdot A = S = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \dots & S_{1n} \\ 0 & S_{22} & S_{23} & \dots & S_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_{nn} \end{vmatrix}.$$

Матрица A неособенная, если $S_{ii} \neq 0, i$ равно от 1 до $n, \Rightarrow rg(A) = n$.

Построим матрицу G n -го порядка, используя алгебраические дополнения первых столбцов главных миноров ступенчатой матрицы S , располагая миноры в порядке убывания их размеров:

$$M_n = |A|, M_{n-1}, M_{n-2}, \dots, M_1 = S_{nn}.$$

Первая строка матрицы G :

$$M_n: S_{11} = g_{11}, S_{21} = g_{12}, \dots, S_{n1} = g_{n1}, S_{nn} = g_{nn}.$$

Вычеркивая первую строку и первый столбец матрицы S , получаем главный минор M_{n-1} , у которого находим алгебраические дополнения первого столбца и записываем вторую строку матрицы G : $g_{31} = 0, g_{22}, g_{23}, \dots, g_{2n}$.

Аналогично строим и последующие строки:

$$M_{n-1}; g_{31} = 0, g_{32} = 0, g_{33} = S_{33}, g_{34} = S_{43}, \dots, g_{31} = S_{n3},$$

...

$M_1: g_{n1} = g_{n2} = \dots = g_{nn-1} = 0, g_{nn} = 1$, где S_{ik} – алгебраические дополнения к соответствующим элементам.

Положим

$$y_{ik} = \begin{cases} S_{ki}, & \text{если } k \geq i, \\ 0, & \text{если } k < i. \end{cases} \quad (\text{при необходимости см. п. 2.14 работы [1]}).$$

Ранг матриц L и G не изменяется при делении на неравные числа. Решение СЛАУ также останется прежним. Поэтому в матрице L в первой строке $l_{11} = 1$, а в последней строке матрицы G элемент $g_{nn} = 1$.

Итак,

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \dots & g_{1n} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & \dots & g_{2n} \\ 0 & 0 & g_{33} & \dots & g_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ 0 & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & g_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножая G на S , получаем диагональную матрицу $D = G \cdot S$.

Пример 2. (см. пример 1.).

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = |S| \Rightarrow S_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -120 = g_{11},$$

$$S_{21} = g_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -48, S_{31} = 12, S_{41} = 0;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow g_{21} = 0, g_{22} = \begin{vmatrix} -4 & 10 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -24,$$

$$g_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6, g_{24} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = -10;$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} -4 & 10 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow g_{31} = 0, g_{32} = 0, g_{33} = 6, g_{34} = -10;$$

$$M_1 = 6 \Rightarrow g_{41} = 0, g_{42} = 0, g_{43} = 0, g_{44} = 1.$$

Следовательно,

$$G = \begin{pmatrix} -120 & -48 & 12 & 0 \\ 0 & -24 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} :(-12) \\ :(-2) \\ :(-2) \\ :(-2) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = G \cdot S = \begin{pmatrix} -120 & -48 & 12 & 0 \\ 0 & -24 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$b = \|b_1, b_2, \dots, b_n\|^T.$$

Построим матрицу L , используя главные миноры матрицы A , и затем преобразуем систему (2):

$$L \cdot Ax = Lb.$$

Обозначим $L \cdot A = S$ – ступенчатая матрица n -ого порядка, у которой все диагональные элементы не равны нулю, то есть матрица A – неособенная. Случай особенной матрицы рассмотрим позже. Тогда $g(A) = n$. В результате получаем систему $Sx = c$, где $c = Lb$, которую решаем обратным ходом метода Гаусса.

а) **Пример 3.** Решить СЛАУ:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 7x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & 13 \end{vmatrix},$$

$$S = L \cdot A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & 13 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 0 & 13 & -31 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3.$$

$$c = L \cdot b = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & 13 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 26 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Система примет вид:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 26 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 7x_3 = 3, \\ 13x_1 - 31x_2 = 26, \\ 6x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 0, x_2 = 2, x_1 = 1.$$

Ответ: $\|1 \ 2 \ 0\|^T$

б) **Пример 4.** Способ б заключается в том, что матрицу A можно привести к диагональному виду с помощью матрицы G .

В предыдущем примере найдены матрицы S и L . Матрицу S приведем к диагональному виду:

$$S = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 0 & 13 & -31 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

Выпишем главные миноры в порядке убывания их порядка, начиная с наибольшего:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 0 & 13 & -31 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}, M_2 = \begin{vmatrix} 13 & -31 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}, M_1 = 6.$$

$$\text{Матрица } G: g_{11} = \begin{vmatrix} 13 & -31 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 78, g_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6, g_{13} = -60;$$

$$g_{21} = 0, g_{22} = 6, g_{23} = 31; g_{31} = 0, g_{32} = 0, g_{33} = 1.$$

$$G = \begin{vmatrix} 78 & 6 & -60 \\ 0 & 6 & 31 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 1 & -10 \\ 0 & 6 & 31 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Имеем: $G \cdot L \cdot Ax = GL \cdot b$, где $L \cdot A = S, Lb = c, G \cdot Sx = G \cdot c$.

$$\begin{vmatrix} 13 & 1 & -10 \\ 0 & 6 & 31 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 0 & 13 & -31 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 1 & -10 \\ 0 & 6 & 31 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ 26 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 65 & 0 & 0 \\ 0 & 78 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 65 \\ 156 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0.$$

в) **Пример 5.** В способе в найдём матрицу $K = G \cdot L$ и применим ее в преобразовании системы (2): $K \cdot Ax = Kb \Rightarrow K \cdot A = D \Rightarrow Dx = d$, где $d = Kb$.

Решить СЛАУ, используя матрицу K .

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -7, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \text{ (см. пример 1).}$$

$$S = L \cdot A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

Найдём матрицу G (см. п. 2).

$$G = \begin{vmatrix} 10 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & -3 & 5 \\ 9 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$D = G \cdot S \left\| \begin{array}{cccc} -120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -120 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right\|,$$

$$K = G \cdot L = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{array} \right\|.$$

Данная система в матричной форме имеет вид:

$$Ax = b.$$

Умножаем матричные уравнения соответственно на G и L слева:

$$G \cdot LAx = G \cdot Lb,$$

Введем обозначения: $K = GL$, тогда $KAx = Kb$. В данном случае:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cccc} 1 & -8 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{array} \right\|.$$

$$\cdot \left\| \begin{array}{c} 1 \\ -5 \\ -7 \\ 0 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 2 \\ -6 \\ 12 \\ -12 \end{array} \right\| \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2, \\ 6x_2 = -12, \\ 6x_3 = 12, \\ 6x_4 = -12. \end{cases}$$

Ответ: $\|1 \ 1 \ 2 \ -2\|^T$.

Замечание. Матрица L – неособенная. Встречаются случаи, когда некоторые соответствующие коэффициенты нескольких строк матрицы A пропорциональны. Тогда некоторые диагональные элементы матрицы L могут обратиться в нуль, получаем особенную матрицу L . Легко убедиться в том, что перестановка строк матрицы A может дать неособенную матрицу L . Но если при любой перестановке строк матрица L особенная. Размер матрицы L будет меньше.

Пример 6.

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right\|.$$

Первые две строки матрицы A имеют пропорциональные коэффициенты $1/2=2/4$.

Найдем L :

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array} \right\| - \text{особенная матрица.}$$

Поменяем местами вторую и третью строки матрицы A :

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = L$$

$$L \cdot A' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = S.$$

Пример 7.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \text{особенная} \Rightarrow A - \text{особенная матрица}.$$

4. Решение СЛАУ произвольных размеров

Рассмотрим решение системы m линейных уравнений с n неизвестными при $m \leq n$:

$$Ax = b \quad (3)$$

Для матрицы $A = \|a_{ik}\|$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n}$, имеющей ранг m , может быть найдена матрица L m -го порядка, которая систему (3) к ступенчатому виду:

$$L(Ax) = Lb, \Rightarrow Sx = c, \text{ где } S = L \cdot A - \text{ступенчатая матрица } Lb = c.$$

$$\text{Пусть угловой минор } M_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \text{ матрицы } A \text{ является базис-}$$

ным, т.е. $x_1, x_2, \dots, x_m$ - базисные переменные, остальные переменные - свободные, поэтому

$$x_{m+1} = c_1, x_{m+2} = c_2, \dots, x_n = c_{n-m}, \text{ уравнение (3) примет вид:}$$

$$M_m x = c, \quad (4),$$

где $c = \|b_1 - a_{1,m+1}c_1 - a_{1,m+2}c_2 - \dots - a_{1n}c_{n-m}, b_2 - a_{2,m+1}c_1 - \dots - a_{2m} + b_m - a_{m,m+1}c_1 - \dots - a_{mn}c_{n-m}\|$, $c_1 \in R, c_2 \in R, \dots, c_{n-m} \in R$.

Систему (4) решаем одним из способов а), б), в).

Система (3) имеет бесчисленные множества решений, если $m < n$, и имеет единственное решение, если $m = n$.

Рассмотрим далее примеры решения СЛАУ любых размеров, причем при исследовании систем могут возникать различные тонкости.

Пример 8. Найти общее решение и фундаментальную систему решений (ФСР) однородной СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0, \\ 5x_1 + 8x_2 + 8x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Способ а).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 0 \\ 5 & 8 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу L .

$$L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : 2 \rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $|A| = 0$ (матрица L' имеет нулевую последнюю строку). Последняя строка матрицы A линейно зависит от предыдущих строк. Её можно получить, вычитая из удвоенного умножения третьей строки первую и вторую строки матрицы. Следовательно, для решения данной системы используем матрицу:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S' = L \cdot A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Имеем: $rs(S) = rg(A) = 2$, т.е. третье уравнение системы можно отбросить.

Решаем систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Базисные переменные x_1 и x_2 , свободные $x_3 = c_1, x_4 = c_2, c_1 \in R, c_2 \in R$,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3c_1 + c_2, \\ -2x_2 = 7c_1 - 4c_2 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{7}{2}c_1 + 2c_2, x_1 = -2\left(-\frac{7}{2}c_1 + 2c_2\right) - 3c_1 + c_2 = 4c_1 - 3c_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4c_1 - 3c_2 \\ -\frac{7}{2}c_1 + 2c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} c_2.$$

Введем матрицы $c = \|c_1 \ c_2\|^T, x^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{7}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ и $x^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$,

$\Phi = \|x^{(1)} \ x^{(2)}\|$ – ФСР, получаем $\overline{x} = \Phi \cdot C$ – общее решение.

Ответ: $x = \Phi \cdot C$.

Способ б). В системе (*) $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Построим матрицу G :

$$G = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = G \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Согласно (4) имеем: $c = \begin{pmatrix} -3c_1 + c_2, & 7c_1 - 4c_2 \end{pmatrix}$.

$$G \cdot c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3c_1 + c_2 \\ 7c_1 - 4c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3c_1 + c_2 + 7c_1 - 4c_2 \\ 7c_1 - 4c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4c_1 - 3c_2 \\ 7c_1 - 4c_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система (*) преобразуется к виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4c_1 - 3c_2 \\ 7c_1 - 4c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 = 4c_1 - 3c_2 \\ -2x_2 = 7c_1 - 4c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4c_1 - 3c_2 & x_3 = c_1 \\ x_2 = -\frac{7}{2}c_1 + 2c_2 & x_4 = c_2 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 4c_1 - 3c_2, & -\frac{7}{2}c_1 + 2c_2, & c_1, & c_2 \end{pmatrix}^T$

Способ в)

Для матриц L и G найдём матрицу K .

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, K = G \cdot L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В данной системе выбираем два первых уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \end{cases}$$

у которых $x_3 = c_1, x_4 = c_2$. Тогда

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3c_1 + c_2, \\ 2x_1 + 2x_2 = c_1 - 2c_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : (-2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot K = G \cdot L = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K \cdot Ax = Kc$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3c_1 + c_2 \\ c_1 + 2c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3c_1 - c_2 + c_1 - 2c_2 \\ 6c_1 - 2c_2 + c_1 - 2c_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ -2x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4c_1 - 3c_2 \\ 7c_1 - 4c_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4c_1 - 3c_2, \\ x_2 = -\frac{7}{2}c_1 + 2c_2, \end{cases} \quad x_3 = c_1, x_4 = c_2.$$

Ответ: $\begin{vmatrix} 4c_1 - 3c_2, & -\frac{7}{2}c_1 + 2c_2, & c_1, & c_2 \end{vmatrix}^T$

Пример 9.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 + 7x_5 = 20, \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 6x_5 = 24, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 12. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & |4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & |8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 7 & |20 \\ 3 & 3 & 6 & 6 & 6 & |24 \\ 1 & 3 & 3 & 7 & 5 & |12 \end{vmatrix} = \|A, \quad b\|.$$

$$L' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Следовательно,

$$L \cdot \|A, b\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & |4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & |8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 7 & |20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & |4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & |4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\|S, c\| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & |4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & |4 \end{vmatrix} - \text{ступенчатая матрица} \Rightarrow L = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Способ а)

СЛАУ принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 4, \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4 \end{cases}$$

Пусть переменные x_1 и x_2 – базисные, остальные x_3, x_4, x_5 – свободные: $x_3 = c_1, x_4 = c_2,$

$x_5 = c_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in R.$ Тогда

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 - c_1 + c_2 + c_3, \\ 2x_2 = 4 - c_1 - 4c_2 - 3c_3 \end{cases}$$

Обратным ходом Гаусса найдем x_1 и x_2 :

$$x_2 = 2 - \frac{1}{2}c_1 - 2c_2 - \frac{3}{2}c_3,$$

$$x_1 = x_2 + 4 - c_1 + c_2 + c_3 = 4 + 2 - \frac{1}{2}c_1 - 2c_2 - \frac{3}{2}c_3 - c_1 + c_2 + c_3 = 6 - \frac{3}{2}c_1 - c_2 - \frac{1}{2}c_3,$$

$$x_3 = c_1, x_4 = c_2, x_5 = c_3.$$

Ответ: $\left\| 6 - \frac{3}{2}c_1 - c_2 - \frac{1}{2}c_3, 2 - \frac{1}{2}c_1 - 2c_2 - \frac{3}{2}c_3, c_1, c_2, c_3 \right\|^T, c_1, c_2, c_3 \in R.$

Способ б)

Из матрицы $\|S, c\|$, выбираем базисную матрицу $\left\| \begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix} \right\|$ и находим $G = \left\| \begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right\|$.

$$G \cdot \|S, c\| = \left\| \begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{smallmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & |4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & |4 \end{smallmatrix} \right\| = \left\| \begin{smallmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & |12 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & |4 \end{smallmatrix} \right\|.$$

Получаем СЛАУ:

$$\begin{cases} 2x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 12, \\ 0x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \end{cases}$$

$$x_1 = 6 - \frac{3}{2}c_1 - c_2 - \frac{1}{2}c_3, x_2 = 2 - \frac{1}{2}c_1 - 2c_2 - \frac{3}{2}c_3, x_3 = c_1, x_4 = c_2, x_5 = c_3.$$

Ответ: $\left\| 6 - \frac{3}{2}c_1 - c_2 - \frac{1}{2}c_3, 2 - \frac{1}{2}c_1 - 2c_2 - \frac{3}{2}c_3, c_1, c_2, c_3 \right\|^T, c_1, c_2, c_3 \in R.$

Способ в)

$$K = G \cdot L = \left\| \begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix} \right\| = \left\| \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix} \right\|.$$

$$K \cdot Ax = Kb,$$

$$\left\| \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{smallmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & |4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & |8 \end{smallmatrix} \right\| = \left\| \begin{smallmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & |12 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & |4 \end{smallmatrix} \right\| =>$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 12, \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4. \end{cases}$$

Ответ: $\left\| 6 - \frac{3}{2}c_1 - c_2 - \frac{1}{2}c_3, 2 - \frac{1}{2}c_1 - 2c_2 - \frac{3}{2}c_3, c_1, c_2, c_3 \right\|^T, c_1, c_2, c_3 \in R.$

Пример 10.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + 3x_4 = 3, \\ -x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

Решение:

$$B = \|A, b\| = \left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 3 & 3 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -1 \end{array} \right\|$$

$$L = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \rightarrow \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{array} \right\| \quad B = \left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{array} \right\|$$

$$L \cdot B = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Следовательно, $rg(R) = rg(A) = 1$. Имеем: $2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2$.

Пусть x_1 – базисная переменная, а x_1, x_2, x_3 – свободные переменные, тогда:

$$x_2 = c_1, x_3 = c_2, x_4 = c_3, c_1, c_2, c_3 \in R, x_1 = 1 - \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 - c_3.$$

Ответ: $\left\| 1 - \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2} - c_3, c_1, c_2, c_3 \right\|^T, c_1, c_2, c_3 \in R.$

В заключение заметим, что предложенные методы хорошо алгоритмизируются и вполне применимы в рамках современных процессов развития образования [3 -6].

Библиографический список

1. Бухенский, К.В. Краткий курс линейной алгебры и аналитической геометрии. Часть1. / К.В. Бухенский, И.П. Карасёв, Г.С. Лукьянова. – М.: Курс, 2020.
2. Новиков, А.И. Начала линейной алгебры и аналитическая геометрия / А.И. Новиков – М.: Физматлит, 2015.
3. Миронов, В.В. Информатизация образования: достижения и проблемы /Миронов В.В. //Информатизация образования и науки. 2017, № 4 (36). С 3-18.
4. Миронов, В.В. Всеобщая информатизация образования: внутри и вне процесса / В.В. Миронов, С.Н. Латыпов // Cloud of Science. 2017. Т.4. № 2. С. 126-146.
5. Миронов, В.В. Современные технологии в процессе обучения / В.В. Миронов, В.В. Гришина., А.И. Заволокин. А.К. Розанов., С.А. Нелюхин. Коллективная монография под ред. докт. физ.-матем. наук, проф. Миронова В.В. – Рязань, Book Jet. 2017. 320 с.
6. Миронов, В.В. Современные технологии и компьютерные технологии в учебном процессе. / В.В. Миронов, А.К. Розанов, С.А. Нелюхин. Учебное пособие. под ред. докт. физ.-матем. наук, проф. Миронова В. В. – Рязань, Book Jet. 2017. 90 с. (формат А4).

УДК 512.64; ГРНТИ 27.31.17

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ**И.П. Карасев³, В.В. Миронов***Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, mironovlv@mail.ru*

Аннотация. В работе рассматриваются альтернативные методы линейной алгебры для решения следующих задач: приведение матрицы к ступенчатому виду, приведение квадратной матрицы к диагональному виду, решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решение СЛАУ произвольных размеров. Новые методы призваны разнообразить методы решения подобных классических задач. Одновременно они проще классических и менее утомительны в реализации. Методы легко превращаются в алгоритмы и могут быть использованы для компьютерной реализации решений поставленных задач.

Ключевые слова: методы линейной алгебры, алгоритмы решений, простота реализации.

NON-CLASSICAL METHODS OF CLASSICAL LINEAR ALGEBRA.**I. Karasev⁴, V. Mironov***Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, mironovlv@mail.ru*

The summary. The paper considers alternative methods of linear algebra for solving the following problems: reducing a matrix to a stepped form, reducing a square matrix to a diagonal form, solving a system of linear algebraic equations (SLAE), solving SLAE of arbitrary sizes. New methods are designed to diversify the methods for solving such classical problems. At the same time, they are simpler than classical ones and less tedious to implement. Methods are easily converted into algorithms and can be used for computer implementation of solutions to the tasks.

Keywords: linear algebra methods, solution algorithms, ease of implementation.

В развитие предыдущей работы авторов «Альтернативные методы линейной алгебры» предложим новые нетрадиционные методы решения стандартных задач линейной алгебры.

1. Решение СЛАУ с использованием матрицы K **Пример 11.**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_6 + x_7 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 5x_6 - 2x_7 = 11 \end{cases}$$

Решение.

$$B = \|A, b\| = \left\| \begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & 0 & 5 & -2 & 11 \end{array} \right\|,$$

$$L = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{array} \right\|,$$

$$S = L \cdot B = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & 0 & 5 & -2 & 11 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 11 \end{array} \right\| - \text{ступенчатая матрица, } rg(A) = rg(B) = 2.$$

³ Главный автор⁴ Main author

Пусть базисными переменными будут x_1 и x_6 , тогда $x_2 = c_1, x_3 = c_2, x_4 = c_3, x_5 = c_4, x_7 = c_5$, где $c_k = R, k = \overline{1,5}$ – свободные переменные.

В матрице S поменяем местами второй и третий столбцы (базисные столбцы 1-й и 2-й).

$$S' = \left\| \begin{array}{ccccccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -5 \end{array} \right\|,$$

$$G = \left\| \begin{array}{cc} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|; K = G \cdot L = \left\| \begin{array}{cc} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{array} \right\|,$$

$$K \cdot Ax = Kb,$$

$$\left\| \begin{array}{cc} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{ccccccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & -2 & 4 & 0 & -2 & 11 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_6 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} 8 \\ 11 \end{array} \right\|,$$

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c} -1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 11 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 5 \end{array} \right\|.$$

Система примет вид:

$$\begin{cases} -x_1 + 0x_6 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 0x_5 + 11x_7 = 7, \\ 0x_1 - x_6 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 4x_7 = -5 \end{cases}$$

Имеем:

$$x_2 = c_1, x_3 = c_2, x_4 = c_3, x_5 = c_4, x_7 = c_5, x_1 = -7 - 2c_1 + c_2 - 2c_3 + 11c_5, x_6 = 5 - 4c_5.$$

Ответ: $\|-7 - 2c_1 + c_2 - 2c_3 + 11c_5, 5 - 4c_5, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\|^T, c_k = R, k = \overline{1,5}$.

Пример 12.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение.

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{array} \right\|, L = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -7 & -1 & 5 \end{array} \right\|,$$

$$S = L \cdot A = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -7 & -1 & 5 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -10 \end{array} \right\|.$$

$$rg(A) = rg(S) = 3.$$

$$G = \left\| \begin{array}{ccc} -50 & -10 & 0 \\ 0 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} :(-10) \\ :(-5) \end{array} \rightarrow \left\| \begin{array}{ccc} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

$$K = G \cdot L = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 11 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -7 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \\ -7 & -1 & 5 \end{vmatrix};$$

$$A \cdot x = b, KAx = Kb, Dx = c,$$

$$D = K \cdot A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -5 \\ -7 & -1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix},$$

$$c = Kb = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \\ -7 & -1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 = 5, & x_1 = 1, \\ 10x_2 = 10, & x_2 = 1, \\ -10x_3 = 0, & x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\|1 \ 1 \ 0\|^T$

Пример 13.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$S = L \cdot A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$rg(A) = rg(S) = 2,$$

$$\text{Тогда } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, L \cdot b = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$rg(B) = rg(A) = 2.$$

Пусть x_1 и x_2 – базисные, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$ – базисный минор. Для нахождения матрицы G используем базисный минор.

$$G = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$K = G \cdot L = \left\| \begin{array}{cc} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{array} \right\|,$$

$$B = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right\| - \text{расширенная матрица.}$$

$KAx = Kb$, x_1, x_2 – базисные, x_3 – свободная переменные.

$$\left\| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 5 \end{array} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \end{array} \right\|$$

$$Kb = \left\| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 5 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array} \right\|,$$

тогда

$$\begin{cases} 5x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5, \\ 0x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 = 5, \\ 5x_2 = 5 + 5x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1, \\ x_2 = 1 + c, \\ x_3 = c, \end{matrix} \quad c \in R,$$

Ответ: $\|1 \quad 1 + c \quad c\|^T, c \in R$.

Пример 14.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение:

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right\|, \quad L = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right\|,$$

$$L \cdot B = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\| \Rightarrow$$

$$rg(A) = 2, rg(B) = 3.$$

Ответ: система не имеет решений.

Пример 15.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & |1 \\ 3 & 2 & |5 \end{pmatrix},$$

$$S = L \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & M_2 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} M_2 & -a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
K &= G \cdot L = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & -a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{12}a_{21} & 0 \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} : a_{11} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}, \\
K \cdot A &= \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & -a_{22}a_{12} + a_{11}a_{22} \\ -a_{21}a_{11} + a_{11}a_{21} & -a_{21}a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_2 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, KAx = Kb, \\
K &= G \cdot L = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}; \\
K^A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Kb, \\
\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \\
\begin{cases} 7x_1 = 7, \\ 7x_2 = 7 \end{cases} &=> x_1 = 1, x_2 = 1.
\end{aligned}$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 1$

Пример 16.

Найдём взаимную матрицу $\tilde{A}$ матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \\
D = \tilde{A}A &= \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \\
K &= G \cdot L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Сравните матрицы $\tilde{A}$ и K .

Замечания.

1) A – неособенная, $rg(A) = n$, L – диагональная, $rg(L) = n$. Но бывает, что L может оказаться особенной, т.е. на главной диагонали L может оказаться хотя бы один нулевой элемент.

$l_{kk} = 0 \Rightarrow |L| = 0$ – особенная матрица.

Перестановка строк $\Rightarrow L$ – неособенная. На практике проверяются элементы $l_{kk}, k = \overline{1, n}$

2) $rg(L) \geq rg(A)$.

3) Матрицы L и G – неособенные. В результате преобразований $rg(L) = rg(G) = rg(A)$.

2. Вычисление обратной матрицы

Задача. Дана квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|_1^n$. Найти обратную матрицу A^{-1} , если она существует.

Решение: Матрицу A приведем к ступенчатому виду, используя матрицу L .

$$S = L \cdot A$$

Пусть $rg(s) = n$, тогда матрица A – неособенная. Найдём A^{-1} . Существует несколько способов вычисления A^{-1} . Предлагается ещё один способ.

Найдём матрицы G и $K = G \cdot L = \|k_{ij}\|_1^n$, у которой последняя строка k_{nj} при $i = \overline{1, n}$, состоит из алгебраических дополнений последнего столбца матрицы A . Взаимная матрица $\tilde{A} = \|A_{ji}\|_1^n$, её последняя строка совпадает с последней строкой матрицы K . Матрицы $K \cdot A$ и $\tilde{A} \cdot A$ – диагональные, у которых последняя строка имеет один и тот же элемент $|A|$ – определитель матрицы A . Следовательно, K и $\tilde{A}$ по своей структуре схожи. Преобразуем матрицу K так, чтобы новая матрица $\tilde{K}$ совпала с $\tilde{A}$. Построим матрицу $\tilde{K}$, используя матрицу K . Каждую -ую строку матрицы K умножим на числа $\alpha_i, i = \overline{1, n}$ и эти числа так, чтобы матрица $\tilde{K} \cdot A$ имела одинаковые диагональные элементы $|A|$,

$$\tilde{K} = \begin{vmatrix} \alpha_1 k_{11} & \alpha_1 k_{12} & \cdots & \alpha_1 k_{1n} \\ \alpha_2 k_{21} & \alpha_2 k_{22} & \cdots & \alpha_2 k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-1} k_{n-1,1} & \alpha_{n-1} k_{n-1,2} & \cdots & \alpha_{n-1} k_{n-1,n} \\ \alpha_n k_{n1} & \alpha_n k_{n2} & \cdots & \alpha_n k_{nn} \end{vmatrix}, \quad (1)$$

$$\tilde{K} \cdot A = \|\alpha_i \beta_i\|_1^n = \left\| \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 \beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \beta_n \end{vmatrix} \right\|, \quad i \text{ где } \beta_i = \sum_{j=1}^n k_{ij} a_{j1}$$

$$|A| = \alpha_i \beta_i \Rightarrow \alpha_i = \frac{|A|}{\beta_i}, i = \overline{1, n}.$$

Полученные числа α_i подставляем в (1) и получаем $\tilde{K} = \tilde{A}$.

Пример 1.

Задача. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ найти A^{-1} .

$$\text{Решение: } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$S = L \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K = G \cdot L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Взаимная матрица } \tilde{A} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot 2 & \alpha_1 \cdot 1 & \alpha_1 \cdot 0 \\ \alpha_2 & 3\alpha_2 & -5\alpha_2 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{K} \cdot A = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 3\alpha_2 & -5\alpha_2 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -10 \Rightarrow \begin{cases} 5\alpha_1 = -10 \\ 10\alpha_2 = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = -1 \end{matrix}$$

$$\text{Матрица } \tilde{K} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix} \equiv \tilde{A}.$$

$$\text{Ответ: } A^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.

$$\text{Задача. Дана матрица } A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}. \text{ Найти } A^{-1}.$$

Решение:

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & -6 & -4 \end{vmatrix},$$

$$S = L \cdot A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{vmatrix}, |A| = -12.$$

$$G = \begin{vmatrix} 240 & 96 & -24 & 0 \\ 0 & 48 & -12 & -10 \\ 0 & 0 & -12 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} :24 \\ :2 \\ :(-2) \end{matrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 10 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 24 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$K = G \cdot L = \begin{vmatrix} 10 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 24 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ -8 & 2 & -6 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -5 & 0 \\ -20 & 20 & 0 & 20 \\ -28 & 4 & 0 & -20 \\ -8 & 2 & -6 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} :5 \\ :20 \\ :(-4) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \\ -8 & 2 & -6 & -4 \end{vmatrix}$$

$$K \cdot A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \\ -8 & 2 & -6 & -4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} = D$$

Назовём матрицу K обобщенной взаимной матрицей. Взаимная матрица $\tilde{A}$ содержит равные диагональные элементы, равные $|A| = -12$.

Построим матрицу $\tilde{K}$, совпадающую с $\tilde{A}$. Строки матрицы K можно умножить на числа $\alpha_i \neq 0$ (любые числа):

$$K = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_2 & 0 & \alpha_2 \\ 7\alpha_3 & -\alpha_3 & 0 & 5\alpha_3 \\ -8 & 2 & -6 & -4 \end{vmatrix}$$

Найдём числа α_1, α_2 и α_3 такие, чтобы $\tilde{K} \equiv \tilde{A}$,

$$K \cdot A = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_2 & 0 & \alpha_2 \\ 7\alpha_3 & -\alpha_3 & 0 & 5\alpha_3 \\ -8 & 2 & -6 & -4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{vmatrix}$$

$$\text{Имеем: } \begin{cases} 2\alpha_1 = -12 \\ 6\alpha_2 = -12 \\ 6\alpha_3 = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -6, \\ \alpha_2 = -2, \\ \alpha_3 = -2. \end{cases}$$

$$\tilde{K} = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & -6 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ -14 & 2 & 0 & -10 \\ -8 & 2 & -6 & -4 \end{array} \right\| \equiv \tilde{A}.$$

$$\text{Следовательно, } A^{-1} = -\frac{1}{12} \left\| \begin{array}{cccc} 0 & -6 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ -14 & 2 & 0 & -10 \\ -8 & 2 & -6 & -4 \end{array} \right\|.$$

$$\text{Ответ: } A^{-1} = -\frac{1}{12} \left\| \begin{array}{cccc} 0 & -6 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ -14 & 2 & 0 & -10 \\ -8 & 2 & -6 & -4 \end{array} \right\|.$$

3. Вычисление определителя

1. Определители 2-го порядка:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

2. Определители 3-го порядка:

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{21} & a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{21} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{12}}{a_{11}}a_{31} & a_{33} - \frac{a_{13}}{a_{11}}a_{31} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11}} & \frac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}}{a_{11}} \\ 0 & \frac{a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}}{a_{11}} & \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}}{a_{11}} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{a_{11}}{a_{12}^2} \begin{vmatrix} M_{12}^{12} & M_{12}^{13} \\ M_{13}^{12} & M_{13}^{13} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} M_{12}^{12} & M_{12}^{13} \\ M_{13}^{12} & M_{13}^{13} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где элементы M_{12}^{12} , M_{12}^{13} , M_{13}^{12} , M_{13}^{13} – являются минорами 2-го порядка определителя Δ_3 . Нижние индексы указывают номера строк, верхние – номера столбцов.

$$M_{1k}^{1i} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} \\ a_{k1} & a_{ki} \end{vmatrix},$$

Таким образом, $\Delta_3 = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} M_{12}^{12} & M_{12}^{13} \\ M_{13}^{12} & M_{13}^{13} \end{vmatrix}. \quad (1)$

3. Определители 4-го порядка

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \frac{a_{14}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{21} & a_{23} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{21} & a_{24} - \frac{a_{14}}{a_{11}} a_{21} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{31} & a_{33} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{31} & a_{34} - \frac{a_{14}}{a_{11}} a_{31} \\ 0 & a_{42} - \frac{a_{12}}{a_{11}} a_{41} & a_{43} - \frac{a_{13}}{a_{11}} a_{41} & a_{44} - \frac{a_{14}}{a_{11}} a_{41} \end{vmatrix} = \frac{a_{11}}{a_{11}^3} \begin{vmatrix} M_{12}^{12} & M_{12}^{13} & M_{12}^{14} \\ M_{13}^{12} & M_{13}^{13} & M_{13}^{14} \\ M_{14}^{12} & M_{14}^{13} & M_{14}^{14} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{a_{11}^2} \begin{vmatrix} M_{12}^{12} & M_{12}^{13} & M_{12}^{14} \\ M_{13}^{12} & M_{13}^{13} & M_{13}^{14} \\ M_{14}^{12} & M_{14}^{13} & M_{14}^{14} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^2} \Delta_3 \end{aligned}$$

Итак, $\Delta_4 = \frac{1}{a_{11}^2} \Delta_3. \quad (12)$

Далее формулу (2) преобразуем по формуле (1) с коэффициентами $a_{11} = M_{12}^{12}$.

4. Определители n -го порядка

Вычислим определитель n -го порядка:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Используем методику вычисления определителя 4-го порядка. Имеют место рекуррентные преобразования:

$$\Delta_n \rightarrow \Delta_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \Delta_k \rightarrow \dots \rightarrow \Delta_3 \rightarrow \Delta_2 \rightarrow \Delta_1 - \text{ответ.}$$

$$\Delta_n = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} M_{12}^{12} & M_{12}^{13} & \dots & M_{12}^{1n} \\ M_{13}^{12} & M_{13}^{13} & \dots & M_{13}^{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{1n}^{12} & M_{1n}^{13} & \dots & M_{1n}^{1n} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \Delta_{n-1} = \quad | \quad \text{Введём обозначения: } \Delta_n \rightarrow x_n =$$

$a_{11}, \Delta_{n-2} \rightarrow x_{n-1}, \dots, \Delta_3 \rightarrow x_3, \Delta_2 \rightarrow x_2$ и назовём элементы $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2$ — ведущими элемен-

тами определителей $\Delta_n, \Delta_{n-1}, \dots, \Delta_2$, это первые элементы определителей $\Delta_k, k = n, n -$

$$1, \dots, 2 \mid = \frac{1}{x_n^{n-2}} * \frac{1}{x_{n-1}^{n-3}} \dots \frac{1}{x_4} * \frac{1}{x_3} \Delta_2 = \Delta_1, \text{ где } \Delta_2 = \begin{vmatrix} M_{12}^{12} & M_{12}^{13} \\ M_{13}^{12} & M_{13}^{13} \end{vmatrix}.$$

Таким образом

$$\Delta_n = \frac{1}{x_n^{n-2}} * \frac{1}{x_{n-1}^{n-3}} \dots \frac{1}{x_4} * \frac{1}{x_3} \Delta_2 = \Delta_1 \rightarrow \text{ответ (4)}$$

Решим примеры (см. пособия [1, 2, 3]).

Пример 1.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = |\text{Применяем формулу (1)}| = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 14 & -11 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(-33 + 84) = 17.$$

Пример 2.

(см. пример 1 на стр. 30 пособия [1])

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = |\text{Применяем формулу (2) и (1)}| = \frac{1}{2^2} \begin{vmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -14 & 20 & -24 \\ 0 & 6 & -18 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} *$$

$$* (-4) ** (-2) * (-6) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & -10 & 12 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{12}{1} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -12(-9 + 5) = 48.$$

Пример 3.

(Используем пример 28 на стр. 94 пособия [2])

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^3} \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 & -6 \\ 3 & 6 & 8 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & -12 \\ 3 & 6 & 4 & -18 \end{vmatrix} = \frac{1}{8 * (-3)^2} \begin{vmatrix} -24 & -24 & 0 \\ 8 & -6 & 12 \\ -24 & -12 & 72 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(-24) * 2 * (-12)}{8 * 9} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \frac{8}{1} \begin{vmatrix} -7 & 6 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 8(42 + 6) = 384.$$

В заключение заметим, что предложенные методы хорошо алгоритмируются и вполне применимы в рамках современных процессов информатизации и развития образования [4 - 7].

Библиографический список

1. Карасёв, И.П. Матричная форма метода Гаусса решения СЛАУ. [Текст]/И.П. Карасёв/ Международная научно-образовательная конференция «Наука в вузах. Математика, физика, информатика» - М., 2009.
2. Новиков А.И. Начала линейной алгебры и аналитическая геометрия / А.И. Новиков – М.: Физматлит, 2015.
3. Бухенский, К.В. Краткий курс линейной алгебры и аналитической геометрии. Часть1. / К.В. Бухенский, И.П. Карасёв, Г.С. Лукьянова. – М.: Курс, 2020.
4. Миронов, В.В. Информатизация образования: достижения и проблемы /Миронов В.В. //Информатизация образования и науки. 2017, № 4 (36). С 3-18.
5. Миронов, В.В. Всеобщая информатизация образования: внутри и вне процесса / В.В. Миронов, С.Н. Латыпов // Cloud of Science. 2017. Т.4. № 2. С. 126-146.
6. Миронов, В.В. Современные технологии в процессе обучения / В.В. Миронов, В.В. Гришина., А.И. Заволокин. А.К. Розанов., С.А. Нелюхин. Коллективная монография под ред. докт. физ.-матем. наук, проф. Миронова В.В. – Рязань, Book Jet. 2017. 320 с.
7. Миронов, В.В. Современные технологии и компьютерные технологии в учебном процессе. / В.В. Миронов, А.К. Розанов, С.А. Нелюхин. Учебное пособие. под ред. докт. физ.-матем. наук, проф. Миронова В. В. – Рязань, Book Jet. 2017. 90 с. (формат А4).

СЕКЦИЯ «ОБРАБОТКА ДАННЫХ, ИЗОБРАЖЕНИЙ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ»

УДК 523.68 ГРНТИ 41.51.21

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТРАЕКТОРИИ В АТМОСФЕРЕ И ОРБИТ МЕТЕОРОИДОВ ПО ДАННЫМ БАЗИСНЫХ ПЗС-НАБЛЮДЕНИЙ

А.К. Муртазов

*Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина,
Российская Федерация, Рязань, a.murtazov@rsu.edu.ru*

Аннотация. Представлено описание методов определения орбит метеороидов в Солнечной системе по результатам наблюдений метеоров. Проведено сравнение различных методик расчета этих параметров по результатам базисных ПЗС-наблюдений.

Ключевые слова: метеоры, определение орбит, ПЗС-наблюдения

PARAMETERS OF METEOR FLOWS DETERMINATION FROM THE BASELINE CCD-OBSERVATIONS

A.K. Murtazov

*Ryazan State University named after S. Esenin,
Russian Federation, a.murtazov@rsu.edu.ru*

Abstract. The description of the heliocentric meteoroid orbit determination methods using meteor observation results is presented. The comparison of various calculation methodologies on results of the baseline CCD-observations is given.

Key words: meteors, orbit determination, CCD-observations.

Введение

Исследования распределения малых тел естественного происхождения в околоземном пространстве становятся весьма актуальными как в связи с проблемой космической опасности (Муртазов и др., 2021), так и с возрастающим количеством запусков космических аппаратов на околоземные орбиты и проблемой метеороидного риска для них (Бодрова, Муртазов, 2020; Murtazov, 2018).

Кроме этого, метеорные исследования весьма важны с точки зрения фундаментальной проблемы происхождения и эволюции Солнечной системы, проблем контроля вариаций плотности атмосферы и наличия ветра в зоне мезопаузы, проблем, связанных с экологией околоземного пространства (Муртазов, 2004).

Базисные наблюдения метеоров приобретают здесь особую важность, поскольку позволяют получить весь спектр астрометрических и фотометрических данных о метеорах и условиях их пролета в атмосфере, вплоть до определения орбит создавших их метеороидов.

В последние десятилетия появилась возможность регистрации пролета метеоров цифровыми методами, что резко повысило информативность, точность и оперативность наблюдений. Наиболее распространенными являются метеорные станции, построенные на базе ПЗС-камеры Watec 902H, имеющей достаточную чувствительность, небольшие размеры и малую стоимость. Сетью метеорных станций покрыта вся Европа, Северная Америка и Япония. Они позволяют осуществлять (кваза)непрерывный мониторинг метеорных событий в течение года, регистрацию болидов и опасных метеороидов.

Схема базисных наблюдений метеоров

Базисные наблюдения метеоров предполагают наличие хотя бы двух пунктов, из которых можно одновременно наблюдать один и тот же метеор. Схема таких наблюдений представлена на рис. 1. Здесь метеор АВ наблюдается из двух пунктов M_1 и M_2 с географи-

ческими координатами λ_1, φ_1 и λ_2, φ_2 и геоцентрическими радиусами r_1 и r_2 . Естественно, координаты метеорного следа на небесных сферах этих двух пунктов отличаются друг от друга.

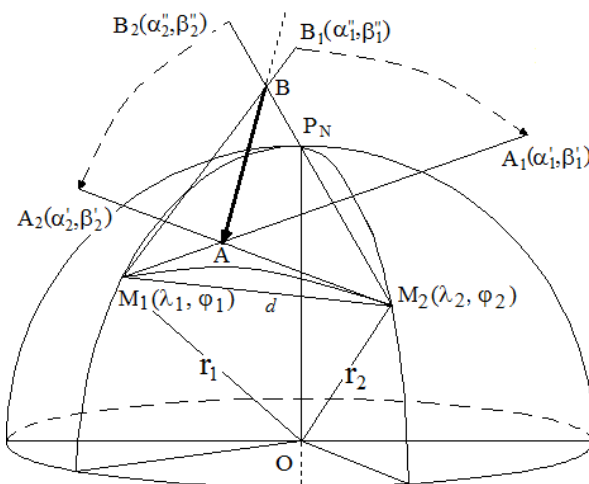


Рис. 1. Базисные метеорные наблюдения из двух пунктов

Определение радианта метеорного потока для односторонних наблюдений производится по нескольким метеорным следам. В случае базисных наблюдений это можно сделать по наблюдениям одного метеора, учитывая, что его видимая траектория на небесной сфере – метеорный круг – является дугой большого круга.

Расположение большого круга небесной сферы устанавливается по положению его полюса с прямым восхождением A и склонением D .

Условие, которому должны удовлетворять точки метеорного круга: их расстояние до полюса круга должно составлять 90°

Обозначив

$$\begin{aligned} x &= \cos A \operatorname{ctg} D, \\ y &= \sin A \operatorname{ctg} D, \end{aligned} \quad (1)$$

получаем основное уравнение для решения задачи определения радианта (Цесевич, 1984)

$$x \cos \alpha \cos \delta + y \sin \alpha \cos \delta = -\sin \delta. \quad (2)$$

Наблюдения дают координаты по крайней мере двух точек метеорных кругов – (α_1', β_1'') и (α_2', β_2'') для метеора, наблюдаемого из двух пунктов на рисунке 1.

Точка радианта R должна находиться на двух этих кругах (рис. 2), а потому ее координаты должны удовлетворять двум уравнениям

$$\begin{aligned} x \cos \alpha_R \cos \delta_R + y \sin \alpha_R \cos \delta_R &= -\sin \delta_R, \\ x \cos \alpha_R \cos \delta_R + y \sin \alpha_R \cos \delta_R &= -\sin \delta_R. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь x, y и x', y' известны и надо определять α_R и δ_R .

Решение системы (3) приводит к

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \alpha_R = \frac{x' - x}{y - y'} \\ \tan \delta_R = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}} \end{array} \right. \quad (4)$$

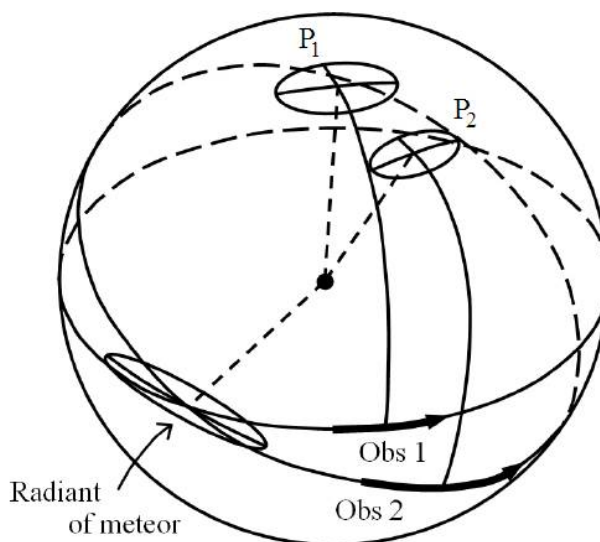


Рис. 2. Определение радианта по базисным наблюдениям (Shigeno, Yamamoto, 2012)

Определение высот метеоров

Точке K на траектории метеорного следа соответствуют точки K_1 и K_2 на его видимых следах из пунктов M_1 и M_2 (их координаты определяются из наблюдений), и эти точки лежат на дуге одного большого круга.

Обозначив длину базиса M_1M_2 через d , можно путем несложных преобразований получить геоцентрическое расстояние точки M метеора

$$R = d \frac{\sin \omega}{\sin \varepsilon}, \quad (5)$$

где ε и ω вычисляются по формулам сферической тригонометрии.

Угол между направлениями M_1K и M_1M_2

$$\cos \omega = \sin \delta^* \sin \delta' + \cos \delta^* \cos \delta' \cos(\alpha^* - \alpha'). \quad (6)$$

Угол параллактического смещения ε находится как

$$\cos \varepsilon = \sin \delta' \sin \delta'' + \cos \delta' \cos \delta'' \cos(\alpha'' - \alpha'). \quad (7)$$

Для вычисления высоты точки K нужно соединить ее с центром O Земли, определить ее расстояние от него и вычесть значение радиуса Земли той точки, в которой прямая KO пересекает поверхность Земли. То есть, высота $h = R - r$.

Вычисление скоростей метеоров

Чтобы перейти к определению элементов орбит метеорного потока необходимо вычислить геоцентрическую скорость, т.е. внеатмосферную скорость метеора (Астапович,

1958; Масленникова, 2003). Сначала вычисляется топоцентрическая скорость, используя уравнения:

$$v = H \cdot w \cdot \operatorname{cosec} y; \quad (8)$$

$$w = \frac{1}{57.3t}; \quad (9)$$

$$\cos l = \cos(\alpha_H - \alpha_K) \cos(\delta_H - \delta_K); \quad (10)$$

$$\operatorname{cosec} y = \frac{1}{\sin y} \quad (11)$$

$$\cos y = \cos(90 - \delta_m) \cos(90 - \delta_R) + \sin(90 - \delta_m) \sin(90 - \delta_R) \cos(\alpha_m - \alpha_R); \quad (12)$$

$$\alpha_m = (\alpha_H + \alpha_K)/2; \quad \delta_m = (\delta_H + \delta_K)/2. \quad (13)$$

где v - геоцентрическая скорость метеора;

w - угловая скорость метеора (рад/с);

l - длина пути метеора;

t - время пролета метеора (с);

H - высота сгорания метеора (принимается равной 100 км.);

y - элонгация метеора от радианта (угловое расстояние от метеора до радианта потока);

(α_m, δ_m) - координаты середины пути метеора;

α_R, δ_R - координаты радианта.

Полученные значения положения наблюдаемого радианта и топоцентрической скорости исправляются за сопротивление воздуха, вращение и притяжение Земли (так называемое зенитное притяжение), суточную и годичную абберации. Полученный вектор скорости W является результатом сложения векторов орбитальной скорости Земли и гелиоцентрической скорости метеорного тела. Знание его дает возможность определить элементы гелиоцентрической орбиты метеороида.

Исходными данными для вычисления орбиты метеороида после всех редукиций являются широта наблюдателя φ , местное звездное время s и Всемирное время T_0 наблюдения, экваториальные координаты радианта α_R, δ_R , геоцентрическая скорость метеора (или потока) W , радиус-вектор Солнца $r_\odot$ и эклиптическая долгота Солнца $\lambda_\odot$.

Определение орбит (Астапович, 1968)

Движение метеороида происходит в плоскости Y , проходящей через Солнце, и пересекающейся с плоскостью эклиптики Q по линии узлов Ω под углом i (рис. 3).

На этом рисунке изображена эллиптическая орбита метеороида с большой полуосью Q и малой полуосью q . Солнце находится в одном из фокусов эллипса C . Метеороид вращается по орбите против часовой стрелки, если смотреть с северного полюса эклиптики. В плоскости орбиты метеороида Y ее форма определяется эксцентриситетом e , размер – большой полуосью a , ориентация – положением оси орбиты относительно точки весеннего равноденствия, - аргументом перигелия ω . Положение метеороида на орбите определяется моментом прохождения перигелия T_0 или знанием средней аномалии M в эпоху T .

Для определения положения плоскости орбиты метеороида Y относительно плоскости эклиптики Q нужно знать угол наклона i и ориентацию линии узлов относительно точки весеннего равноденствия Υ – долготу восходящего узла Ω .

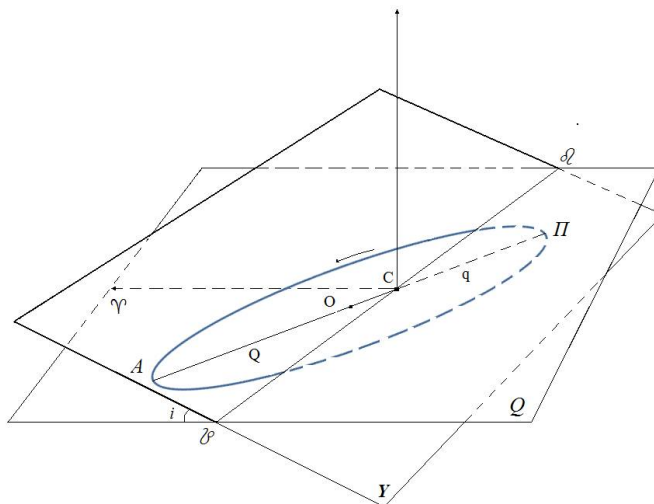


Рис. 3. Эллиптическая орбита метеороида

Среднее суточное движение определяется периодом обращения P метеороида вокруг Солнца

$$n = \frac{2\pi}{P} = \frac{k\sqrt{M_{\odot}}}{\sqrt[3]{a^3}} \quad (14)$$

где $M_{\odot}$ – масса Солнца.

Средняя аномалия $M = M_0 + n(t - T_0)$, тогда из уравнения Кеплера (E – эксцентрическая аномалия)

$$E - e \sin E = M \quad (15)$$

находится истинная аномалия

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (16)$$

Далее, параметр орбиты

$$p = a(1 - e^2). \quad (17)$$

(для параболы $p=2q$, для гиперболы $a<0$ и $e>1$, а p всегда больше 1).

Афелийное расстояние

$$Q = a(1 + e) = \frac{p}{1 - e}, \quad (18)$$

перигелийное расстояние

$$q = a(1 - e) = \frac{p}{1 + e}, \quad (19)$$

малая полуось орбиты

$$b = a\sqrt{1 - e^2}. \quad (20)$$

Исправленное положение наблюдаемого радианта является истинным радиантом метеороида, то есть в точке встречи с Землей направление, обратное его приходу, есть кас-

тельная геоцентрической скорости W метеороида в момент T . Тогда можно определить элементы орбиты.

Большая полуось

$$a = \frac{r}{2 - r(v/W)^2} \quad (21)$$

где r – радиус-вектор Земли в момент встречи, v – гелиоцентрическая скорость метеороида.

Наклонение орбиты

$$\tan i = -\tan \beta_R \csc(\lambda_\odot - \lambda_R), \quad (22)$$

где λ_R, β_R – эклиптическая долгота и широта Солнца.

Элонгация от Солнца

$$\tan \varepsilon_\odot = \pm \tan(\lambda_\odot - \lambda_R) \sec i. \quad (23)$$

Параметр орбиты

$$p = r\left(\frac{v}{W}\right)^2 \sin \varepsilon_\odot, \quad (24)$$

тогда эксцентриситет орбиты метеороида находится как

$$e = +\sqrt{1 - \frac{p}{a}}. \quad (25)$$

Истинная аномалия в момент встречи

$$\cos \vartheta = \frac{P - r}{re}. \quad (26)$$

Аргумент перигелия

$$\omega = -\vartheta \quad \text{при } \beta_R < 0. \quad (27)$$

Долгота восходящего узла

$$\begin{cases} \Omega = \lambda_\odot & \text{при } \beta_R > 0; \\ \Omega = 180 + \lambda_\odot & \text{при } \beta_R < 0. \end{cases} \quad (28)$$

На рисунке 4 приведены орбиты метеоров, рассчитанные в программном комплексе UFO (SonotaCo), которые являлись кандидатами в поток β -Гидриды (Greaves, 2012).

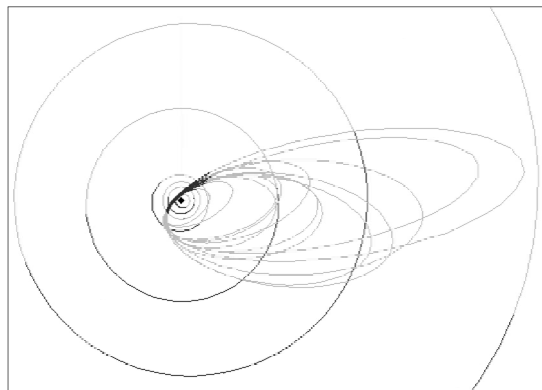


Рис. 4. Орбиты метеоров – кандидатов в поток β -Гидриды. Показаны орбиты вплоть до орбиты Урана (Greaves, 2012)

Современные системы обработки наблюдений метеоров и определения их орбит

В настоящее время существует ряд автоматизированных компьютерных систем, позволяющих проводить выделение (захват) метеоров, рассчитывать положение видимого радианта, и далее орбиты метеороидов.

Многие обсерватории и наблюдательные группы разрабатывают собственный софт. Например, на Николаевской обсерватории, Украина (*Kulichenko et al., 2015*), разработано программное обеспечение для определения астрометрических и фотометрических параметров метеоров. Точность определения координат видимого радианта достигает 0,7" для базы 5 км и 0,5" для 11,8 км.

На главной астрономической обсерватории НАН Украины (*Козак, 2005*) разработан метод определения параметров траектории метеора в атмосфере Земли и элементов его гелиоцентрической орбиты, базирующийся на основе векторного анализа. В качестве базовой используется геоцентрическая прямоугольная система координат. Метод ориентирован, в основном, на обработку оцифрованных телевизионных изображений метеоров, но может быть также применен для обработки любых астрономических изображений, полученных современными средствами наблюдения. Для определения погрешностей всех искомых параметров каждого метеора применен метод Монте-Карло. Средняя точность определения экваториальных координат радианта метеора составляет при односторонних наблюдениях $\pm 0,1$, высоты $\pm 0,2$ км, скорости $\pm 0,5 \div 2$ км/с.

Система Sentinel университета Западного Онтарио и университета Саскачеван (Канада) состоит из камеры, управляемой компьютером, сверхширокоугольного объектива типа «рыбий глаз» и цифрового видеомagniфона (*Blaauw, 2011*). Она разработана для исследований метеоров, появляющихся над Канадой, и работает круглосуточно. Подобная система установлена на площадке Центра космических полетов им. Маршалла (Хантсвилл, Алабама, США).

В качестве регистрирующей системы здесь используется программное обеспечение ASGAR (All Sky and Guided Automatic Realtime Detection), которое автоматически регистрирует и анализирует метеорные события, используя текущие real-time или ранее записанные данные; формирует поток видео для дальнейшей обработки; способна регистрировать множественные однотипные события; выполняет астрометрические измерения для последующего вычисления скорости метеоров и фотометрические для определения их масс; отсеивает посторонние события; автоматически копирует все данные на центральный сервер, ежедневно сообщает о них по e-mail и web log. Дальнейшее вычисление атмосферных траекторий метеороидов и их гелиоцентрических орбит по данным базисных наблюдений с нескольких станций производится отдельной программой.

Наиболее часто используются две системы программного обеспечения: система автоматической регистрации метеоров MetRec (Sirko Molau, Germany) и система регистрации метеоров, определения их астрометрических и фотометрических параметров и орбит UFO (*SonotaCo, Japan*).

MetRec (*Molau, 1999*) использует видеокарту Matrox, которая позволяет оцифровывать видеоданные и сохранять фреймы с изображением метеоров. MetRec, используя информацию о звездах сравнения, определяет экваториальные координаты начала и конца следов метеоров и их блеск. Далее, программа MOTS (Meteor Orbit and Trajectory Software), используя такие данные, полученные из двух пунктов наблюдения при базисном мониторинге, позволяет определять орбиты метеороидов в Солнечной системе (*Koschny, Diaz del Rio, 2002*).

Система для выделения и захвата движущихся объектов была разработана компанией SonotaCo для регистрации неопознанных летающих объектов, но оказалась весьма эффективной для наблюдения явления метеоров.

Система UFO включает в себя (рис. 5): UFOCapture (захват и сохранение пролета метеора в видеоформате avi и формирование сложного фрейма этого фильма); UFOAnalyzer (измерение координат метеорных следов по координатам опорных звезд, определение радиантов метеорных потоков, анализ направления, скорости, блеска, расстояния и высоты пролета метеора); UFOOrbit (регистрирует метеоры, наблюдающиеся одновременно из двух станций, определяет их радианты; поставляет эти данные в UFOAnalyzer и в дальнейшем определяет орбиту метеороидов в Солнечной системе; строит карты радиантов метеорных потоков, траектории метеоров в атмосфере, их проекции на поверхность Земли).

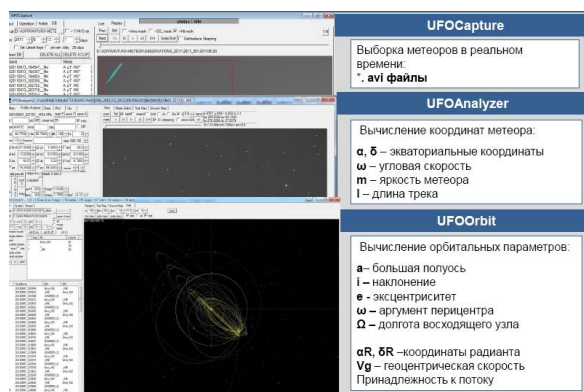


Рис. 5. Программный комплекс UFO (SonotaCo)

Ниже приведен пример определения орбиты метеора по наблюдениям α -Каприкорнид-2014 сетью 19 японских станций, на которых работали 53 камеры (рис. 6). Были определены орбиты 79 метеоров, из которых 15 оказались принадлежащими к потоку α -Каприкорниды.

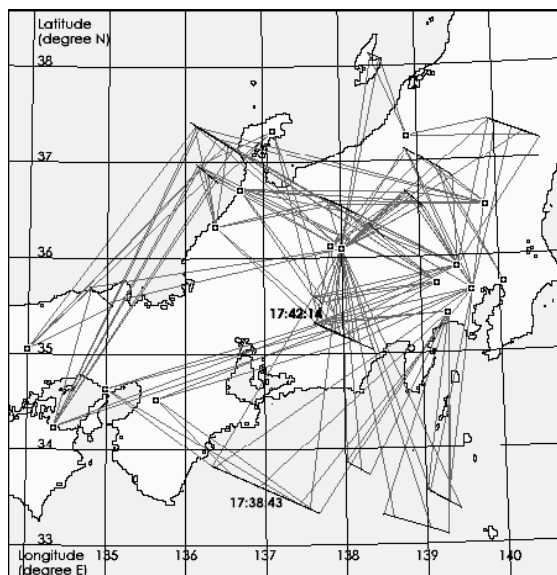


Рис. 6. Одна из метеорных сетей Японии (SonotaCo, Shimoda et al., 2014)

Параметры орбиты одного из метеоров с наиболее точно измеренными координатами: $RA=303.80 \pm 0.04$, $Dec=-12.80 \pm 0.03$ при $\lambda_{\odot}=17.629$; $v_g=69.4 \pm 0.2$ км/с; $1/a=0.004 \pm 0.017$ 1/а.е.; $q=0.80 \pm 0.01$ а.е.; $e=0.9968 \pm 0.014$; $\omega=126.5 \pm 0.5$; $\Omega=17.629$; $i=167.3 \pm 0.1$. Они дают представление о точности, с которой работает программный комплекс UFO.

В работе *Rhiannon Blaauw and Katherine Cruse* (2011) приведено сравнение возможностей систем UFO и ASGARD по анализу результатов наблюдений метеоров (от определения их координат и радиантов до построения орбит в Солнечной системе).

Отмечено, что система UFO легко устанавливается на любую платформу Windows, общий темп работы ее выше, чем ASGARD.

Вместе с тем, число ложных срабатываний в UFO выше, чем в ASGARD, то есть она более чувствительная к любым изменениям сцены в поле зрения.

Система UFO используется для проведения и обработки метеорных наблюдений в первой в нашей стране метеорной сети (*Муртазов, 2015; Kartashova, 2013*).

Камеры Watec LCL-902H Ultimate (with Canon lens $f=6$ mm, $f/0.8$ and FOV $50^\circ \times 40^\circ$) установлены в Звенигородской обсерватории института астрономии РАН и 25 км от нее в п. Истра (Московская область). На рис. 7 представлены проекции следов метеоров на земную поверхность, полученные по результатам базисных наблюдений Персеид в августе 2012 г. программным комплексом UFO.

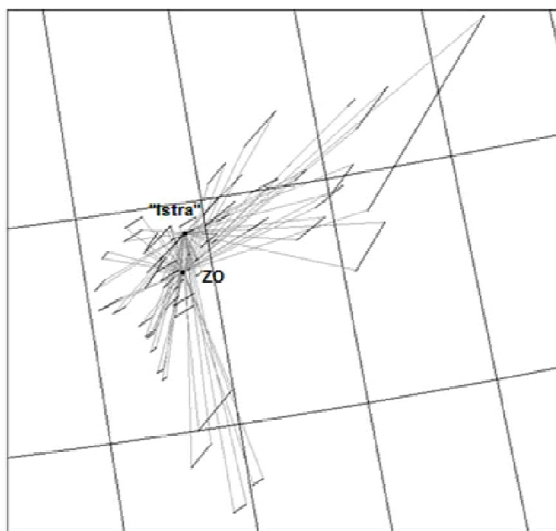


Рис. 7. Проекция метеорных следов, зарегистрированных при базисных наблюдениях «Звенигород-Истра» в 2012 г. (*Kartashova, 2013*)

Астрономической обсерваторией Рязанского госуниверситета организована базисная сеть из двух пунктов наблюдений, расположенных на одном меридиане в ~ 20 км друг от друга (*Murtazov, et al., 2012*): 1. Наблюдательная площадка обсерватории ($\varphi=54^\circ 38'$ N, $\lambda=39^\circ 45'$ E, $h=125$ м); 2. Областная база детского туризма, п. Сажнево Рязанского р-на ($\varphi=54^\circ 28'$ N, $\lambda=39^\circ 45'$ E, $h \approx 200$ м). На этих площадках установлены системы Wat-902H + HG0808AFCS с полем зрения $45^\circ \times 34^\circ$. В качестве регистрирующей системы нами также используется программное обеспечение UFO.

Первые удачные базисные наблюдения метеоров потока Персеиды удалось провести в августе 2015 г. На рисунке 8 представлены фотографии одного и того же метеора из потока Персеиды, наблюдавшегося в Сажнево (а) и Рязани (б).

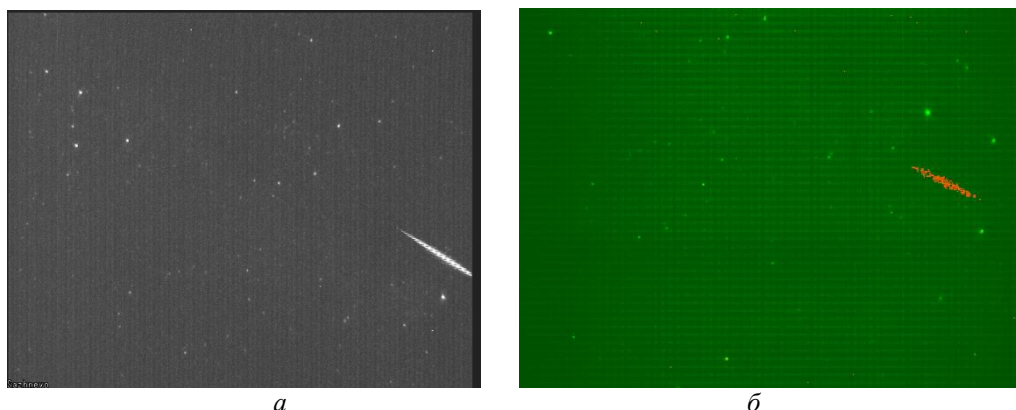


Рис. 8. Базисный метеор 20150813_012552 в различных форматах записи в системе UFOCapture в Рязани (а) и Сажнево (б)

Выводы

Исследования различных авторов и результаты эксплуатации метеорной наблюдательной аппаратуры показывают, что современные системы базисных наблюдений метеоров и программы их обработки достаточно эффективны. Они позволяют практически в режиме on-line получать параметры геоцентрических орбит метеороидов и проводить по полученным данным дальнейшие исследования в различных фундаментальных и прикладных направлениях.

К сожалению, в нашей стране ввиду общего спада массового интереса к научным исследованиям, падения образовательного уровня населения, климатических условий и т.д. метеорным наблюдениям уделяется неоправданно мало внимания. Базисные наблюдения организованы только институтом астрономии РАН (*Kartashova, 2012*), Рязанским (*Murtazov et al., 2012*) и Иркутским (*Иванов и др., 2022*) государственными университетами, что не дает возможности исследования содержания метеорных тел в потоках по ширине, соответствующей общей протяженности России по географической долготе.

Библиографический список

1. Астапович И.С. 1958. Метеорные явления в атмосфере Земли. – М: Наука, 640 с.
2. Бодрова И.В., Муртазов А.К. Метеороидный риск в околоземном пространстве // Аэрокосмическое приборостроение. – 2020. № 6. – С. 14-21.
3. Зоткин И.Т. 1972. Наблюдения метеоров. – М: Наука, 53 с.
4. Иванов К.И., Комарова Е.С., Язев С.А. Комплексное исследование болида потока Персеиды по данным системы базисного видеомониторинга Skyline // Астрономический журнал. 2022. **99**, п 6. - С. 520-528.
5. Козак П.Н. 2005. Фотометрия и кинематика метеоров по телевизионным наблюдениям. Диссертация на соискание научной степени кандидата физико-математических наук. – Киев.
6. Масленникова Е. С. 2003. Телевизионные наблюдения метеорных потоков и их обработка // www.astronet.ru.
7. Муртазов А.К. Экология околоземного космического пространства. 2004. – М: Физматлит, 304 с.
8. Муртазов А.К. Анализ методов определения орбит метеоров по данным базисных ПЗС-наблюдений // Российский научный журнал. – 2015. № 4(47). – С. 318-327.
9. Муртазов А.К., Миронов В.В., Бодрова И.В. Физико-математическое моделирование в оптическом мониторинге космических объектов. – Рязань: Изд. Book Jet (И.П. Коняхин А.В.), 2021. - 218 с.
10. Цесевич В.П. 1973. Что и как наблюдать на небе. – М: Наука, - 384 с.
11. Blaauw R., Cruse K. 2011. Comparison of ASGARD and UFOCapture: The 2011 International Meteor Conference, Sibiu, Romania.
12. Greaves J. 2012. Four IAU MDC Working List Meteor Showers confirmed via SonotaCo Network Japan data. WGN **40**: 2. – p. 53-59.
13. Kartashova A. 2013. Television meteor observations in INASAN. In: Proceedings of the International Meteor Conference. La Palma, Canary Islands, Spain, 20–23 September, 2012. - International Meteor Organization, Mattheessensstraat, 60, 2540 Hove, Belgium. — pp. 174-177.

14. Koschny D., Diaz del Rio J. 2002. Meteor orbit and Trajectory software (MOTS) – determining the position of a meteor with respect to the Earth using data collected with the software MetRec. WGN. Journal of the IMO. 30:4. – pp. 87-101.
15. Kulichenko N., Shulga O., Kozyryev Y., Sybiryakova Y. 2015. Double station observation of meteors in Nikolaev // WGN, the Journal of the IMO. - 43:3. – pp. 81-84.
16. Molau S. 1999. The Meteor Detection Software MetRec. In: Baggaley W. J. and Porubcan V., Proceedings of the International Conference “Meteoroids-1998”, Tatranska Lomnica, Slovakia., pp. 131–134.
17. Murtazov A.K., Efimov A.V., Titov P.V. 2013. Double-Station Meteor Observations in Ryazan, Russia: In: Proceedings of the International Meteor Conference. La Palma, Canary Islands, Spain, 20–23 September, 2012. - International Meteor Organization, Mattheessensstraat, 60, 2540 Hove, Belgium. — pp. 192-196.
18. Murtazov A.K. Assessing the meteoroid risk in near earth space. Open Astronomy. 2018. Vol. 27, issue 1, pp. 144–149.
19. Shigeno Yoshihiko, Yamamoto Masa-yuki. 2012. Meteor shower catalog based on 3770 triangulation analyses of double-station Image-Intensified video observations over Japan // WGN, the Journal of the IMO. 40:1. – pp. 24-35.
20. SonotaCo, Shimoda Chikara, Inoue Hiroyuki, Masuzawa T., Sato Mikiya. 2014. Observation of April alpha Capricornids (IAU#752 AAC) // WGN, the Journal of the IMO. 42:6, pp. 222-226.

УДК 519.816

МЕТОД СРАВНЕНИЯ НЕЧЕТКИХ ОЦЕНОК

В.Г. Чернов

*Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых,
Российская Федерация, Владимир, vladimir.chernov44@mail.ru*

Аннотация. В работе рассматривается метод сравнения нечетких оценок последствий возможных решений, не зависящий от вида их функций принадлежности.

Ключевые слова: нечеткое множество, функция принадлежности, нечеткая гипотеза.

METHOD OF COMPARISON OF FUZZY ESTIMATES

V.G. Chernov

*Vladimir State University named after Alexander Grigorievich
and Nikolai Grigorievich Stoletovs,
Russian Federation, Vladimir, vladimir.chernov44@mail.ru*

Abstract. This paper discusses a method for comparing fuzzy estimates of the consequences of possible solutions, which does not depend on the type of their membership functions.

Key words: fuzzy set, membership function, fuzzy hypothesis.

Достаточно часто в задачах принятия решений приходится использовать экспертные оценки как исходных данных, так и последствий возможных решений. Экспертным оценкам принципиально свойственна неопределенность субъективного, нестатистического характера, которая вполне обосновано может формализоваться нечеткими множествами.

Если исходные данные нечеткие, то в общем случае оценки последствий возможных решений так же будут нечеткими, и тогда для выбора наилучшего решения необходимо сравнивать соответствующие нечеткими множества, при этом их функции принадлежности могут иметь произвольную форму.

В исследованиях [1,2] рассматриваются различные варианты реализации сравнения нечетких множеств, которые либо ограничиваются определенными типами функций принадлежности, либо путем некоторых преобразований сводят задачу к четкой постановке.

Рассматривается метод сравнения нечетких оценок, не накладывающий ограничений на вид их функций принадлежности.

Пусть имеется некоторая совокупность нечетких оценок, характеризующих некоторый набор альтернативных решений

$$\tilde{M} = \{\mu_i(x) / x \in [x_{min}, x_{max}]\}. \quad (1)$$

На области определения $[x_{min}, x_{max}]$ нечетких оценок, подлежащих сравнению, генерируется нечеткая гипотеза о требуемой степени истинности выполнения предположения о предпочтительности принимаемого решения. Например, если лицо, принимающее решение, интересуется получением наибольшего дохода, то среди множества оценок (1) для него будет интересна та, которая соответствует сформулированной нечеткой гипотезе с наибольшим уровнем истинности. Формальным представлением этой гипотезы является нечеткое множество с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{\Gamma}}(x) = \begin{cases} 0, & x = x_{min} \\ 1, & x = x_{max} \end{cases}. \quad (2)$$

В самом простом варианте функция принадлежности (2) может иметь линейный (треугольный) вид

$$\mu_{\tilde{\Gamma}}(x) = \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}.$$

Не исключается применение и нелинейных $\mu_{\tilde{\Gamma}}(x)$. Если решение направлено на минимизацию потерь, то нечеткая гипотеза формализуется нечетким множеством

$$\bar{\mu}_{\tilde{\Gamma}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{\Gamma}}(x) = \frac{x_{max} - x}{x_{max} - x_{min}}.$$

Далее для каждой оценки (1) вычисляется пересечение

$$\tilde{S}_i = \mu_i(x) \cap \mu_{\tilde{\Gamma}}(x). \quad (3)$$

В результате будет получено нечеткое распределение значений истинности, предположения о предпочтительности конкретного решения.

Пересечение нечетких множеств традиционно формализуется операцией $\min$ $\tilde{S}_i = \min[\mu_i(x), \mu_{\tilde{\Gamma}}(x)]$. В [3,4] отмечается, что при использовании операции $\min$ возможна потеря информации, поэтому в рассматриваемой задаче более предпочтительным будет использование альтернативного варианта пересечения – граничного пересечения [5,6]

$$\tilde{S}_i = \max[\mu_i(x) + \mu_{\tilde{\Gamma}}(x) - 1, 0]. \quad (4)$$

Для определения наиболее предпочтительного решения сначала вычисляется расстояние между координатами максимального значения функции принадлежности оценки $\tilde{S}_i$ - высоты $\tilde{S}_i$ $h(\tilde{S}_i)$ и максимального значения $\tilde{\Gamma}$ - высоты $\tilde{\Gamma}$ $h(\tilde{\Gamma}) = 1$, $\Delta = x_{\tilde{\Gamma}} - x_{\tilde{S}_i}$. В ряде случаев такой оценки может оказаться достаточно для выявления более предпочтительной альтернативы. Однако возможны и более сложные ситуации (рис.1).

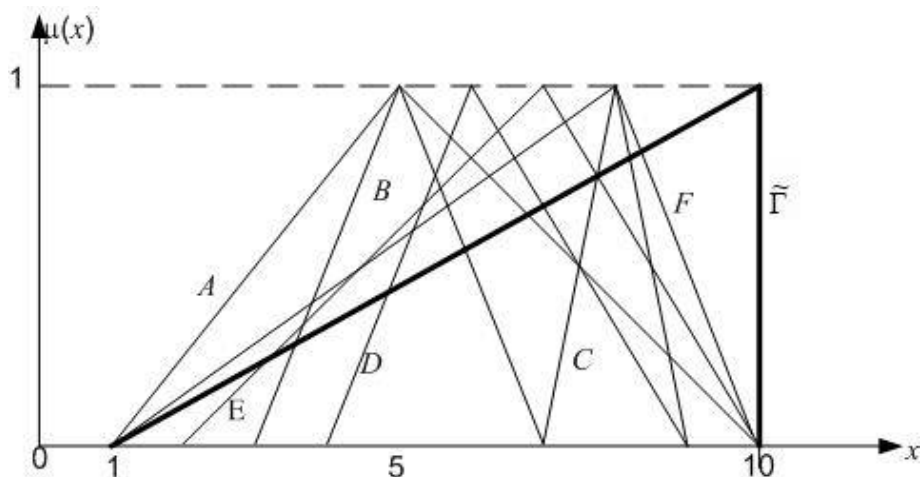


Рис. 1. Нечеткие оценки возможных решений (A,B,C,D,E,F),
нечеткая гипотеза о предпочтительности $\tilde{\Gamma}$

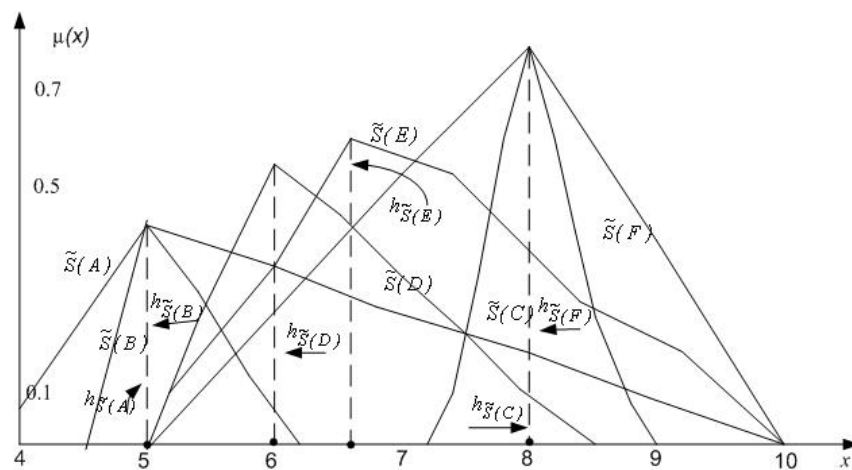


Рис. 2. Граничные пересечения нечетких оценок возможных решений
с функцией принадлежности нечеткой гипотезы $\tilde{\Gamma}$

Из рисунка 2 видно, что два альтернативных решения С и F имеют одинаковые значения Δ . Поэтому, что бы принять окончательное решение в этом случае необходимы дополнительные оценки.

Одним из возможных вариантов является использование оценок, характеризующих уровень неопределенности соответствующих нечетких множеств. В самом простом случае в качестве таких оценок для рассматриваемого примера можно использовать

$$\gamma_1 = \frac{Supp(C)}{Supp(F)},$$

где $Supp(C), Supp(F)$ – ширина носителя соответствующих оценок и

$$\gamma_2 = \frac{h(\tilde{S}_C)}{h(\tilde{S}_F)}.$$

В общем случае оценки будут иметь вид:

$$\gamma_1 = \frac{Supp(\tilde{S}_i)}{Supp(\tilde{S}_j)}; \gamma_2 = \frac{h(\tilde{S}_i)}{h(\tilde{S}_j)}.$$

Очевидно, что чем меньше ширина носителя $Supp(\tilde{S}_i)$, тем меньше неопределенность соответствующей оценки и, наоборот, чем больше $h(\tilde{S}_i)$, тем больше уровень истинности этой же оценки, т.е. для оценки, которую можно считать более предпочтительной $\gamma_1 < 1$ и $\gamma_2 > 1$.

Таблица. Рассчитанные величины значений оценок $Supp(\tilde{S}_i)$ и $h(\tilde{S}_i)$ для альтернатив

	$S(A)$	$S(B)$	$S(C)$	$S(D)$	$S(E)$	$S(F)$
$Supp(\tilde{S}_i)$	7	2	1.8	3.5	5	5
$h(\tilde{S}_i)$	0.35	0.44	0.78	0.33	0.65	0.76

Из приведенных в таблице значений, соответствующих рисунку 2, для альтернативных вариантов с одинаковыми расстояниями $\Delta_C = \Delta_F$ $\gamma_1 = 0.36$, $\gamma_2 = 1.03$, что позволяет говорить о предпочтительности альтернативы C.

Заключение

Предложенный метод сравнения позволяет выделять на множестве возможных решений с нечеткими оценками их последствий наиболее предпочтительную без ограничений на вид их функций принадлежности.

Библиографический список

1. Воронцов Я.А., Матвеев М.Г. Методы параметризованного сравнения нечетких и трапециевидных чисел/ Я.А Воронцов, М.Г. Матвеев // Вестник ВГУ, Серия Системный анализ и информационные технологии. – 2014,–№2.– С.90-97.
2. Ухоботов В. И., Стабулит И. С., Кудрявцев К. Н. Сравнение нечетких чисел треугольного типа/ В.И. Ухоботов, И.С. Стабулит, К.Н. Кудрявцев // Вестник удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2019.–Т. 29.– Вып.2. –С.197-210. doi: 10.20537/vm190205logo
3. Piegat A. Fuzzy modeling and control.-Physica – Verlog, 2013.– 804p.
4. Чернов В.Г. Нечеткая игра с «природой», как модель принятия экономических решений/В.Г. Чернов//Современные наукоемкие технологии. Региональное приложение. – 2020 – Т.63. №3. –С. 42-53.
5. Леоненков А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH.–СПб.:БХВ- Петербург,2005.- 736с. ISBN 5-94157-087-2
6. Чернов В.Г.Сравнение нечетких чисел на основе построения линейного отношения порядка/В.Г. Чернов//Динамика сложных систем-XXI век-2018,№2.-С.81-87
7. Dubois D., Prade H. Theories of Possibilities. Applications a la representation des conisances en in for natique / D. Dubois ,H.Prade. –Masson, 1980.– 288p

УДК 681.2; ГРНТИ 76.13.15

АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ ВЕКТОРА СКОРОСТИ В МНОГОКАНАЛЬНОЙ ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

В.К. Клочко*, И.В. Андреева**, Ву Ба Хунг*, А.С. Григорьев**

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, Klochkovk@mail.ru**Рязанский государственный медицинский университет имени И.П. Павлова,,
Российская Федерация, Рязань, prof-andreeva-irina-2012@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрен подход к построению многоканальной системы измерения скорости кровотока в сосудах, основанный на решении систем алгебраических уравнений. Разработан соответствующий алгоритм, на вход которого поступают измерения доплеровской частоты от нескольких ультразвуковых датчиков, на выходе алгоритма – оценки координат вектора скорости и сама скорость в реальном времени. Даны результаты моделирования.

Ключевые слова: ультразвуковые датчики, доплеровский эффект, оценки вектора скорости, погрешность оценок.

VELOCITY VECTOR ESTIMATION ALGORITHM IN MULTICHANNEL DIAGNOSTIC SYSTEM

V.K. Klochko*, I.V. Andreeva**, Vu Ba Hung*, A.S. Grigoriev

*Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, Klochkovk@mail.ru**Ryazan State Medical University named after I.P. Pavlov,,
Russian Federation, Ryazan, prof-andreeva-irina-2012@yandex.ru

The summary. The approach to the construction of a multichannel system for measuring the speed of blood flow in vessels is considered, based on the solution of systems of algebraic equations. A corresponding algorithm has been developed, at the input of which Doppler frequency measurements are received from several ultrasonic sensors, at the output of the algorithm – estimating the coordinates of the speed vector and the speed itself in real time. Simulation results are given.

Keywords: ultrasonic sensors, Doppler effect, velocity vector estimates, error of estimates.

Введение

Широко используемые в медицинской диагностике одноканальные приборы [1 – 3] предоставляют возможность измерения скорости кровотока в сосудах в реальном времени, однако на результат измерения существенно влияет угол между распространением ультразвукового луча и направлением кровотока в сосуде. Многоканальная система призвана устранить этот недостаток, так как при изменении угла наклона прибора меняются проекции вектора скорости, а сам вектор скорости остается неизменным. Однако существующие многоканальные системы, например [4, 5], обладают рядом недостатков, отмеченных в [6].

Цель доклада – научная апробация предложенного в [6] алгоритма оценивания вектора скорости кровотока в сосудах, отличающегося стабильностью оценок скорости и удобством настройки диагностического прибора при проведении измерений.

Постановка и формализация задачи

Диагностический прибор геометрически представляет собой усеченный прямой конус в прямоугольной системе координат $OXYZ$, ось конуса направлена по оси OZ в сторону излучения. В плоскости OXY большего основания конуса в точке $O(0,0,0)$ центра основания расположен центральный передающий ультразвуковой датчик, в точках, $A(0,R,0)$, $B(-\sqrt{3}R/2, -R/2, 0)$ и $C(\sqrt{3}R/2, -R/2, 0)$, делящих окружность основания на равные части, расположены принимающие датчики (R – радиус большего основания).

Передающий ультразвуковой луч направлен по оси конуса. Принимающие лучи, отраженные от точки $D(0,0,R\operatorname{ctg}\alpha)$ пересечения оси конуса с отражающим элементом сосуда, составляет с осью конуса общий угол α .

Орты векторов $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ соответственно определяются как

$$\vec{a}_0 = (0,0,1), \vec{a}_1 = (0, -\sin\alpha, \cos\alpha), \vec{a}_2 = (0,866\sin\alpha, 0,5\sin\alpha, \cos\alpha), \\ \vec{a}_3 = (-0,866\sin\alpha, 0,5\sin\alpha, \cos\alpha), \quad \text{где } 0,866 = \sqrt{3}/2.$$

Радиальные проекции вектора скорости $\vec{v}$ на направления ортов $\vec{a}_0$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ находятся как скалярные произведения вектора скорости на орты:

$$v_k = \operatorname{pr}_{\vec{a}_k} \vec{v} = (\vec{v}, \vec{a}_k), \quad k = 0,1,2,3. \quad (1)$$

Доплеровские частоты в приемных датчиках определяются формулой

$$f_k = (v_0 + v_k)/\lambda, \quad k = 1,2,3, \quad (2)$$

где λ – длина ультразвуковой волны.

С учетом (1) система уравнений (2) в координатной форме принимает вид

$$\lambda f_k = (\vec{v}, \vec{a}_0 + \vec{a}_k) = v_x(a_{0x} + a_{kx}) + v_y(a_{0y} + a_{ky}) + v_z(a_{0z} + a_{kz}), \quad k = 1,2,3, \quad (3)$$

или в матричной форме

$$A \cdot V = \lambda \cdot F \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{0x} + a_{1x} & a_{0y} + a_{1y} & a_{0z} + a_{1z} \\ a_{0x} + a_{2x} & a_{0y} + a_{2y} & a_{0z} + a_{2z} \\ a_{0x} + a_{3x} & a_{0y} + a_{3y} & a_{0z} + a_{3z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где матрица A в (4) с учетом координат ортов имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\alpha & 1 + \cos\alpha \\ (\sqrt{3}/2)\sin\alpha & (1/2)\sin\alpha & 1 + \cos\alpha \\ -(\sqrt{3}/2)\sin\alpha & (1/2)\sin\alpha & 1 + \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где общий угол α наклона трех боковых датчиков относительно оси конуса регулируется.

Задача заключается в нахождении оценки $\hat{V}$ вектора скорости V .

Решение задачи

При описании (4) вектор $\hat{V} = (\hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{v}_z)^T$, где T – символ транспонирования, находится из решения системы трех уравнений с тремя неизвестными координатами вектора скорости $V = (v_x, v_y, v_z)^T$ методом обратной матрицы:

$$\hat{V} = \lambda \cdot A^{-1} \cdot F. \quad (6)$$

Для повышения точности оценок скорости число приемных датчиков, размещенных по окружности следует увеличить до n ($n > 3$). Система уравнений (3) становится переопределенной и выражение (4) принимает вид (7), где E – вектор ошибок измерения доплеровских частот:

$$A \cdot V = \lambda \cdot (F + E) = \lambda \cdot F + \lambda \cdot E \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{0x} + a_{1x} & a_{0y} + a_{1y} & a_{0z} + a_{1z} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{0x} + a_{nx} & a_{0y} + a_{ny} & a_{0z} + a_{nz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ \dots \\ e_n \end{bmatrix}, \quad (7)$$

По критерию минимума квадрата нормы вектора ошибок $\lambda \cdot E$

$$J = \|\lambda \cdot E\|^2 = (AV - \lambda F)^T (AV - \lambda F) \quad (8)$$

из необходимого условия экстремума (8) находится вектор $\hat{V}$ оценок координат вектора скорости V методом наименьших квадратов:

$$\hat{V} = \lambda (A^T A)^{-1} A^T F. \quad (9)$$

В частном случае при $n = 3$ формула (9) принимает вид (6).

Погрешность оценок

Погрешность оценок (6), (9), подверженных влиянию ошибок измерения доплеровской частоты, определяется ковариационной матрицей $K_{\Delta V}$ ошибок оценок (или самих несмещенных оценок $\hat{V}$, $K_{\hat{V}} = K_{\Delta V}$):

$$\Delta V = V - \hat{V} = V - (A^T A)^{-1} A^T (\lambda F) = V - (A^T A)^{-1} A^T (AV - \lambda E) = \lambda (A^T A)^{-1} A^T E.$$

Для некоррелированного вектора ошибок E матрица $K_{\Delta V}$ имеет вид

$$K_{\Delta V} = M[\Delta V \Delta V^T] = \lambda^2 \sigma_f^2 (A^T A)^{-1}, \quad (10)$$

где M – символ математического ожидания;

σ_f^2 – дисперсия центрированной ошибки измерения частоты.

Погрешность отдельной координаты вектора ошибок оценим по формуле (Tr – след матрицы)

$$\sigma_{vx} = \lambda \sigma_f \sqrt{Tr(A^T A)^{-1} / n}. \quad (11)$$

Норма вектора ошибок $\|\Delta V\| = \Delta v$, как скалярная случайная величина, распределена по закону Максвелла со средним значением Δv_{cp} и среднеквадратическим отклонением (СКО) $\sigma_{\Delta v}$:

$$\Delta v_{cp} = 1,6 \sigma_{vx}, \quad \sigma_{\Delta v} = 1,4 \sigma_{vx}. \quad (12)$$

С учетом (12) средняя ошибка измерения скорости в (12) вычисляется как

$$\Delta v_{cp} = 1,6 \lambda \sigma_f \sqrt{Tr(A^T A)^{-1} / n}. \quad (13)$$

Для матрицы A , заданной выражением (5), обратная матрица в (13) раскрывается как диагональная матрица вида

$$(A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} = \text{diag}(a, a, b), \quad a = \frac{2}{3 \sin^2 \alpha}, \quad b = \frac{1}{3(1 + \cos \alpha)^2} \quad (14)$$

и формула (13) при подстановке (14) принимает вид

$$\Delta v_{\text{cp}} = 1,6 \lambda \sigma_f \sqrt{(2a + b)/n}. \quad (15)$$

Алгоритм оценивания вектора скорости

Алгоритм сводится к следующему.

1. В корпусе прибора в виде усеченного конуса размещаются один приемопередающий датчик по центру большего основания конуса, прикладываемого к участку тела, и три принимающих боковых датчика, расположенных по окружности большего основания конуса с взаимным угловым отклонением 120° и имеющих общий регулируемый угол наклона α к оси конуса.

2. Корпус прибора большим основанием прикладывается к участку тела в направлении сосуда.

3. Центральный датчик излучает ультразвуковой сигнал по осевой линии конуса в направлении сосуда. Отраженные сигналы принимаются боковыми датчиками, расположенными по окружности большего основания конуса и наклоненными под одним начальным углом $\alpha = 60^\circ$ к осевой линии конуса.

4. Измеряются доплеровские сдвиги частот f_1, f_2, f_3 в трех боковых датчиках и на основе измеренных частот вычисляется вектор $\hat{V} = (\hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{v}_z)$ оценок трех координат вектора скорости V движения кровотока по формуле (6).

5. Величина скорости $v(t) = \|V\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$, как норма вектора V , отображается в реальном времени t на экране индикатора.

6. Выбирается угол α поворота боковых датчиков по максимальной величине скорости v_{max} , которая принимается за измеренную максимальную скорость кровотока.

7. Для измерения скорости кровотока в сосудах на большой глубине d (см. рисунок) увеличивается число принимающих датчиков с регулируемым углом α к осевой линии конуса в два раза. Датчики размещаются по окружности парами с угловым расстоянием между соседними парами 90° так, чтобы противоположные датчики не лежали на одной прямой, параллельной сосуду (при параллельности доплеровская частота равна нулю). В состав вектора F дополнительно включаются три измеряемые доплеровские частоты: $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^T$, матрица A меняется на матрицу B формулы (16) и вектор скорости V вычисляется как $\hat{V} = \lambda(B^T B)^{-1} B^T F$.

Расчет средней ошибки

Известно [7], что в практике ультразвуковых измерений используются несущие частоты $f_0 = 2 \div 10$ МГц. Для скорости ультразвука $c = 1540$ м/с длина ультразвуковой волны составляет $\lambda = 1540 / f_0 = (154 \div 770) \cdot 10^{-6}$ м. Формула (15) расчета ошибки измерения скорости для указанного диапазона значений λ и случая трех приемных датчиков ($n = 3$) принимает вид

$$\Delta v_{\text{cp}} = (0,0002 \div 0,0012) \sigma_f \sqrt{(2a + b)/3}, \quad (18)$$

где параметры a и b определены в (14) и зависят от угла α .

Примем скорость кровотока равной $v = 0,1$ м/с [7, 8]. Доплеровская частота в каждом k -м приемном датчике для диапазона углов наклона $\alpha = (30^\circ \div 60^\circ)$ составляет

$$f_k = v_k / \lambda = v \sin \alpha / \lambda = \frac{0,1 \cdot (0,5 \div 0,866) \cdot 10^6}{(154 \div 770)} = (65 \div 562) \text{ Гц.}$$

Также примем СКО ошибки измерения f_k равным $\sigma_f = 10$ Гц.

В таблице 1 показан расчет диапазонов средней ошибки (18) и средней относительной ошибки в процентах $\varepsilon_{cp} = (\Delta v_{cp} / v) \cdot 100\%$ для разных значений угла α , скорости $v = 0,1$ м/с и $\sigma_f = 10$ Гц. Указано расстояние d от центрального излучающего датчика до сосуда в зависимости от угла α : $d = R \cdot ctg \alpha$. Расчет диапазона средней ошибки для шести приемных датчиков ($n = 6$) в соответствии с формулой (7) представлен таблицей 2.

Таблица 1 – Средняя и относительная ошибки ($n = 3$)

α	d	Δv_{cp} , м/с	ε_{cp} , $v = 0,1$ м/с
30°	$1,7R$	$0,0027 \div 0,016$	$2,7 \% \div 16,1 \%$
40°	$1,2R$	$0,0021 \div 0,013$	$2,1 \% \div 12,7 \%$
50°	$0,8R$	$0,0018 \div 0,011$	$1,8 \% \div 10,7 \%$
60°	$0,6R$	$0,0016 \div 0,010$	$1,6 \% \div 9,6 \%$

Таблица 2 – Средняя и относительная ошибки ($n = 6$)

α	d	Δv_{cp} , м/с	ε_{cp} , $v = 0,1$ м/с
30°	$1,7R$	$0,0019 \div 0,011$	$1,9 \% \div 11,4 \%$
40°	$1,2R$	$0,0015 \div 0,009$	$1,5 \% \div 8,9 \%$
50°	$0,8R$	$0,0013 \div 0,008$	$1,3 \% \div 7,6 \%$
60°	$0,6R$	$0,0011 \div 0,007$	$1,1 \% \div 6,8 \%$

Выводы

1. Из таблиц 1 и 2 следует, что меньшие значения средней ошибки в диапазонах, указанных в таблицах, соответствуют большим частотам излучения. То есть средняя ошибка измерения уменьшается с увеличением частоты зондирования. С увеличением глубины измерения (расстояния d до сосуда), то есть уменьшения угла α , средняя ошибка увеличивается.

2. Увеличение ошибки можно компенсировать увеличением радиуса основания конуса R , но при этом увеличиваются размеры диагностического прибора. Поэтому компенсировать рост ошибки можно увеличением числа приемных датчиков от трех до шести (таблица 2 в сравнении с таблицей 1).

3. Как следует из (18) уменьшение средней ошибки Δv_{cp} также можно достичь уменьшением СКО ошибки измерения доплеровской частоты σ_f .

Увеличение числа приемных датчиков не приводит к увеличению энергетической нагрузки прибора, так как излучает один центральный датчик.

Библиографический список

1. Андреева, И.В. Особенности нормодинамического типа портальной гемодинамики по данным ультразвуковой доплерометрии / И.В. Андреева, Н.А. Клименко, А.А. Виноградов // Общая патология и патологическая физиология. 2007. Т. 2, № 1. С. 42 – 46.
2. Лелюк В.Г., Лелюк С.Э. Ультразвуковая ангиология. М.: Реальное время, 2003. 336 с.
3. Ультразвуковая диагностика сосудистых заболеваний / Под ред. В.П. Куликова. М.: СТРОМ, 2007. 512 с.
4. Патент RU 2 246 896. Способ измерения скорости кровотока и устройство для его реализации / Проскуряков Г.М., Абросимов Д.А. Приоритет 30.10.2001. Оpubл. 27.02.2005. Бюл. № 6.
5. Патент RU 2 585 416. Способ измерения скорости кровотока / Иванов О.В. Приоритет 01.06.2015. Оpubл. 27.05.2016. Бюл. № 15.
6. Ключко В.К., Андреева И.В. Измерение скорости кровотока системой ультразвуковых датчиков // Биомедицинская радиоэлектроника. 2023. Т. 26, № 1. С. 5 – 17.
7. Осипов Л.В. Ультразвуковые диагностические приборы: практическое руководство для пользователей. М.: Видар, 1999. 256 с.

УДК 004.932; ГРНТИ 28.23.15

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА ЛОКАЛИЗАЦИИ ДОРОЖНЫХ ЗНАКОВ НА ОСНОВЕ КАСКАДНОГО КЛАССИФИКАТОРА

В.А. Савин, С.А. Смирнов

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина.
Российская Федерация, Рязань, RemedysOne@gmail.com*

Аннотация. В данной статье проведены исследования алгоритма локализации дорожных знаков для систем технического зрения. Приведены результаты работы алгоритма при различных вариациях обучения, а также при изменении условий наблюдений.
Ключевые слова: система технического зрения, каскадный классификатор, каскадный детектор, локализация дорожных знаков.

RESEARCH OF TRAFFIC SIGN DETECTION ALGORITHM BASED ON CASCADE CLASSIFIER

V.A. Savin, S.A. Smirnov

*Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin.
Russia, Ryazan, RemedysOne@gmail.com*

Abstract. This article describes the research of traffic sign detection algorithm based on cascade classifier for computer vision systems. The results of algorithm operations for the various training variations and different observation conductions are presented.

Keywords: vision system, cascade detector, cascade classifier, localization of traffic signs.

Системы технического зрения в наше время используются в самых различных отраслях – агропромышленность, медицина, ВПК, транспортные системы и т.д. В данной работе приведены исследования алгоритма для системы технического зрения, которая может быть использована в транспортных системах, в частности, для так называемой «Системы помощи водителю». С развитием инфраструктуры и экономики страны на дорогах появляется все больше личного транспорта. На март 2022 года на 1000 жителей России приходится 318 легковых автомобилей [1]. Это уплотняет дорожное движение, что увеличивает риск ДТП. Для решения данной проблемы предлагается использовать выше названную систему, которая будет выводить информацию о текущей дорожной ситуации на дисплей или лобовое стекло, в том числе и информацию о наблюдаемых дорожных знаках и их предписаниях. В основе такой системы лежат алгоритмы локализации дорожных знаков.

Локализация дорожного знака является нетривиальной задачей. Дорожные знаки имеют специфические свойства, приведенные в ГОСТ [2], позволяющие их легко идентифицировать. Однако, на наблюдаемых изображениях могут быть объекты, похожие на дорожные знаки, например, по цвету или форме. Знак может быть частично или почти полностью закрыт другим объектом или же просто поврежден. Стоит также учитывать негативные условия, такие как плохая погода и тёмное время суток.

Для локализации дорожных знаков в наше время применяют различные методы обработки изображений, среди которых: пороговая сегментация, корреляционные алгоритмы, методы на основе выделения границ, метод каскадного детектора, нейросети с глубоким обучением и некоторые другие. У каждого метода есть свои недостатки. Например, для метода пороговой сегментации актуальны проблемы выделения лишних объектов на изображении. Для метода выделения границ, использующий фильтр Кенни, возможно игнорирование областей с малым перепадом яркостей. Корреляционные алгоритмы обладают высокой вычислительной сложностью и данные алгоритмы мало инвариантны к искажениям изображений. Например, повернутый по перспективе и деформированный внешними условиями знак, может быть не определен данными алгоритмами. Нейросети считаются относительно новым и неоптимизированным подходом к обработке изображений. Они могут показывать впечатляющие результаты, но при условии грамотного обучения. Самообучение – сложный и ресурсозатратный процесс. Каскадные классификаторы (детекторы) менее ресурсозатратны и более просты в обучении по сравнению с нейросетями, но менее точны в некоторых случаях. Данный метод достаточно перспективен для использования в наше время, учитывая приведенные выше доводы.

Каскадный детектор объектов применяется для обнаружения объектов, соотношение сторон которых существенно не меняется в зависимости от ракурса съемки. Алгоритм обнаруживает объекты на изображении, перемещая скользящее окно по изображению. Используя обученный каскадный классификатор, алгоритм решает, есть ли в данном окне интересующий нас объект. Обучение каскадного классификатора состоит из этапов (эпох). Каждый следующий этап обучения использует данные, полученные простейшими классификаторами на прошлом этапе для создания высокоточного классификатора. Классификатор соответствующего этапа помечает текущую область скользящего окна как «положительную» или «отрицательную», которая соответствует нахождению или ненахождению искомого объекта. Если метка положительная, то классификатор передает область на следующий этап. Детектор «сообщает» об обнаружении объекта в данном окне, если на заключительном этапе область классифицируется как «положительная». В данной работе за основу был использован алгоритм [3]. Программная реализация классификатора приведена в [4].

Для обучения рассматриваемого алгоритма была создана база изображений, содержащая изображение знака «Главная дорога». Изображение знака соответствует ГОСТ Р 52289-2019. Обучение детектора происходило в 5 этапов на малой выборке в 35 положительных и 70 отрицательных изображений. Ниже на рисунке 1 представлены результаты работы детектора на исходных изображениях.



Рис. 1. Примеры исходных изображений (а) и результатов работы алгоритма (б)

Как видно, детектор позволяет обнаружить объекты, которые частично закрыты листвой, а также имеют слабую цветовую насыщенность и малый размер на изображении.

В ходе исследования алгоритма рассматривалось влияние количества этапов обучения на качество работы. По сравнению с вышеописанным экспериментом, было уменьшено число этапов обучения с 5 до 3, при этом выборка изображений не изменялась. На рисунке 2 приведены результаты для уменьшенного числа этапов обучения.



Рис. 2 – Исходное изображение (а) и результат работы алгоритма (б)

Результатом уменьшения количества этапов обучения является увеличение числа ложных срабатываний.

В реальных системах технического зрения не всегда получается получить изображения хорошего качества. Для моделирования ухудшения качества исходные изображения были зашумлены аддитивным шумом. На рисунке 3 приведены результаты работы алгоритма с пятью этапами обучения на изображениях с добавленным шумом. С увеличением зашумленности изображений уменьшается эффективность алгоритма.



Рис. 3. Исходные изображения (а), изображения при СКО шума 0.02 (б) и изображения при СКО шума 0.07 (в)

Было приведено исследование работы алгоритма на дополнительной выборке изображений. На данной выборке при отсутствии шума алгоритм правильно находит все дорожные знаки «Главная дорога». Результаты локализации дорожных знаков при разных

уровнях шума приведены в таблице 1. Добиться повышения точности локализации на зашумленных изображениях можно за счет их предварительной обработки сглаживающими фильтрами.

Таблица 1 – Влияние зашумления изображений на качество работы алгоритма

Уровень СКО	Частота правильной локализации, %
0	100
0.0015	80
0.02	50
0.05	20
0.07	0

Качество работы алгоритма оценивалось по формуле:

$$T_{пл} = \frac{N_{лок}}{N_{общ}} \cdot 100\%, \quad (1)$$

где $T_{пл}$ – частота правильной локализации;

$N_{лок}$ – количество изображений с верно локализованным знаком;

$N_{общ}$ – общее количество изображений.

Итоговая частота успешной локализации для алгоритма составила 68% на тестовой выборке из 40 изображений. Данный результат можно считать удовлетворительным, так как обучение каскадного классификатора происходило на малой выборке. Отрицательные результаты соответствовали изображениям дорожного знака, подверженным сильным геометрическим искажениям. В исходной выборке, используемой для обучения, присутствовали преимущественно изображения снятые при условии, что линия визирования объектива была перпендикулярна плоскости дорожного знака. Данный детектор очень чувствителен к геометрическим преобразованиям изображения дорожного знака. Для повышения качества работы требуется обучать отдельный детектор для каждой ориентации объекта. Также добиться повышения точности можно путём увеличения количества этапов при обучении классификатора, но каждый следующий этап требует значительного увеличения числа изображений в обучающей выборке.

Библиографический список

1. Структура и прогноз парка легковых автомобилей в России [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.autostat.ru/research/product/438/>. – Дата доступа: 01.02.2023.
2. ГОСТ Р 52289-2019 Технические средства организации дорожного движения. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.mos.ru/upload/documents/files/9432/GOSTR52289-2019.pdf>. – Дата доступа: 01.02.2023.
3. Viola, P., and M. J. Jones. "Rapid Object Detection using a Boosted Cascade of Simple Features." Proceedings of the 2001 IEEE Computer Society Conference. Volume 1, 15 April 2001, pp. I-511–I-518.
4. Get Started with Cascade Object Detector. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.mathworks.com/help/vision/ug/train-a-cascade-object-detector.html>. – Дата доступа: 01.02.2023

УДК 621.3.087.92; ГРНТИ 50.41.25

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ СИМУЛЯЦИИ РАБОТЫ ВЕРОЯТНОСТНОГО РЕЛЕ

Ю.С. Бехтин, А.А. Ильин

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, yuri.bekhtin@yandex.ru, for-ide@mail.ru*

Аннотация. В работе описывается программное обеспечение для симуляции работы вероятностного реле. Приводятся основные функции программы, элементы управления, а также отображаемые графики.

Ключевые слова: вероятностное реле, программное обеспечение.

SOFTWARE FOR SIMULATION OF PROBABILISTIC RELAY OPERATION

Y.S. Bekhtin, A.A. Ilyin

*Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, yuri.bekhtin@yandex.ru, for-ide@mail.ru*

The summary. The paper describes the software for simulation of probability relay operation. Given it's main features, controls and displayed graphs.

Keywords: probabilistic relay, software.

Введение

Необходимость разработки специализированного программного обеспечения для имитационного моделирования работы вероятностного реле [1] обусловлена следующей задачей.

В настоящее время в системах радиоавтоматики и робототехники широко используются тепловизионные каналы для приема коротких управляющих световых сигналов, генерируемых лазерами. Такие световые сигналы распознаются многоэлементными фотоприемными устройствами (ФПУ) как точечные объекты излучения, диаметр светового пятна которых, как правило, согласован с размером фоточувствительной площадки (ФЧП) ФПУ [2-5]. В процессе сканирования линейкой ФЧП световое пятно может случайным образом располагаться относительно ФЧП, вызывая реакцию на выходе соответствующих электронных каналов ФПУ в форме колоколообразных импульсов. Обычно для упрощения в качестве математической модели таких импульсов используют функцию $\cos^2$ [3-5]. В нашей работе [6] была получена «точная» математическая модель формируемых на выходе ФПУ импульсов от точечных объектов. Эта модель используется в рассматриваемом разработанном программном обеспечении. Преимущество разработанной модели по сравнению с известными моделями в том, что при случайном расположении светового пятна относительно двух ФЧП модель учитывает изменения не только амплитуды, но также формы и длительности канальных импульсов (рис. 1, а, б). Задача заключается в вычислении оценок амплитуд канальных импульсов и расположения светового пятна относительно ФЧП, что позволяет определять расстояние и координаты до объекта.

Решение такой задачи является сложным и многоэтапным процессом, поскольку формируемые на выходе ФЧП электрические импульсы искажаются воздействием т.н. геометрического шума чувствительности (неоднородности коэффициентов передачи) и темнового тока (медленноменяющаяся низкочастотная помеха) в каждом канале ФПУ.

Метод решения

Основная идея предлагаемого метода решения заключается в стабилизации последовательности импульсных сигналов от точечных объектов, которая детально описана в другой нашей работе [7]. Метод стабилизации последовательности импульсных сигналов базируется на использовании вероятностного реле [1], когда каждый канальный импульс «подтягивает-

ся» по амплитуде к заданному номинальному уровню с помощью цифрового стабилизатора импульсных сигналов [7]. При этом геометрическим шум чувствительности рассматривается как мультипликативная помеха, а геометрический шум темнового тока приводит к низкочастотным помехам в выходном сигнале ФЧП. Кроме того, модель выходного сигнала также содержит высокочастотный аддитивный тепловой шум с нормальным распределением и нулевым средним.

Поскольку световое пятно, диаметр которого равен размеру квадрата ФЧП, "разделено" на две части (в большинстве случаев), основная идея заключается в стабилизации импульсов канала (после их обнаружения на фоне помех) на уровне 0,5 от условной единицы. После обработки сигналы с соседних каналов ФЧП суммируются, получая таким образом последовательность импульсов на выходе ФПУ на уровне номинальной единицы. Таким образом, обработка выходных сигналов ФПУ может выполняться одинаковым образом в каждом канале. Следовательно, имеет смысл перейти к применению одномерного алгоритма стабилизации последовательности импульсов, форма которых известна и их величина должна быть стабилизирована на уровне условной единицы. Детальное описание цифрового стабилизатора импульсных сигналов, работающего в условиях помех, можно найти в нашей работе [8].

Особенности моделирования вероятностного реле

Мы полагаем любые изменения состояния θ_n от одного дискретного момента времени до другого как Марковскую цепь с двумя состояниями u_0, u_1 и вероятностями перехода q_{ij} , где $i, j \in \{0, 1\}$. Вероятность $\bar{v}_n$ есть результат статистического прогноза для вероятности u_{n-1} (на один интервал дискретизации Δt) и вычисляется по формуле полной вероятности:

$$\bar{v}_n = u_{n-1}(1 - q_{01} - q_{10}) + q_{01}.$$

Для удобства в рассмотрение вводится отношение правдоподобия:

$$\beta(z_n) = \frac{N_{z_n}(\bar{l}_n, S_{z,1}^2)}{N_{z_n}(0, S_{z,0}^2)}.$$

Введенные переменные позволяют переписать выражение для v_n в компактной форме:

$$v_n = \frac{\beta(z_n)\bar{v}_n}{1 + [\beta(z_n) - 1]\bar{v}_n}. \quad (1)$$

Соотношение (1) позволяет построить рекурсивный вычислительный алгоритм для порогового обнаружения импульсного сигнала при воздействии шумов и помех, который описан детально в [1], где получило название «вероятностное реле».

Однако моделирование соотношения (1) в его непосредственном виде затруднительно из-за сложностей с вычислением отношения правдоподобия на каждом такте. В связи с этим, было предложено для имитационного моделирования использовать упрощенную формулу для отношения правдоподобия:

$$\beta(z_n) = e^{k(z_n - a)},$$

где a – пороговый уровень; k – коэффициент, определяющий крутизну функции $\beta(z_n)$. В отсутствии шумов и помех коэффициент k выбирается большим; затем значение k уменьшается, если дисперсия шума увеличивается.

Особенности программного симулятора ВР

Для разработки программного обеспечения (ПО) использовалась бесплатная среда разработки Visual Studio 2022 Community Edition и язык программирования C#. Для разработки графического интерфейса пользователя использовались платформы Windows Forms и .Net Framework.

Язык C# и платформа .Net Framework имеют большое количество различных свободно распространяемых библиотек для связи с периферийными устройствами, что позволяет использовать данную библиотеку в реальных задачах, подав сигнал с периферийного устройства вместо генерируемого синусоидального сигнала.

Также платформа .Net Core позволяет практически без изменения исходного кода переделать библиотеку для различных операционных систем: Windows, Linux, MacOS, Android, IOS.

Для визуализации попадания световых пятен на ФЧП использовались библиотеки с открытым исходным кодом OxyPlot и NetTopologySuite.

На рисунке 1, в световое пятно обозначено в виде круга диаметр которого равен размеру ФЧП. Сами ФЧП представлены в форме квадратов. Области попадания светового пятна на ФЧП закрашены соответствующими контуру каждой ФЧП цветами. В качестве входного сигнала бралась площадь пересечения светового пятна с каждым ФЧП, обозначаемая как закрашенная область соответствующего цвета.

На рисунке 2 в виде графика «Входной сигнал» показан суммарный сигнал с двух ФЧП, а на графиках «Входной сигнал 1» и «Входной сигнал 2» сигналы, поступающие с первой и второй ФЧП соответственно. Жирными точками на графике обозначены моменты дискретизации сигнала.

На графиках «Коэффициент усиления ВР 1» и «Коэффициент усиления ВР 2» показаны коэффициенты усиления на первом и втором вероятностных реле. На графиках «Сигнал на ВР 1» и «Сигнал на ВР 2» показаны выходные сигналы на первом и втором вероятностных реле.

На графиках «Восстановленный сигнал 1» и «Восстановленный сигнал 2» можно увидеть восстановленные сигналы на каждом вероятностном реле, а на графике «Восстановленный сигнал» показан суммарный восстановленный сигнал.

На рисунке 3 показаны элементы управления для настройки различных параметров симуляции. Слайдеры «Высокочастотная помеха» позволяют изменять амплитуду высокочастотной помехи на каждом датчике. Пример сигнала с помехой приведен на рисунке 4.

Слайдер «Число точек отсчета на сигнал» позволяет изменять количество точек отсчета, приходящихся на время, равное периоду сигнала. Большее количество точек отсчета повышает точность работы вероятностного реле. Пример сигнала с увеличенным количеством точек отсчета приведен на рисунке 5.

Слайдер «Координата Y пучка» позволяет изменять координату Y светового пятна, что приводит к изменению площадей попадания светового пятна на каждую ФЧП и амплитуд соответствующих входных сигналов. Примеры визуализации попадания светового пятна на ФЧП и входные сигналы при смещении светового пятна по оси Y приведены на рисунке 6.

Заключение

Таким образом, разработанное ПО имитирует попадание светового пятна на массив фоточувствительных площадок, обработку сигналов с ФПУ при помощи вероятностного ре-

ле (ВР) [1], последующее восстановление сигнала, что позволит эффективно решать вторичные задачи, связанные с определением расстояния до точечного объекта и его координат.

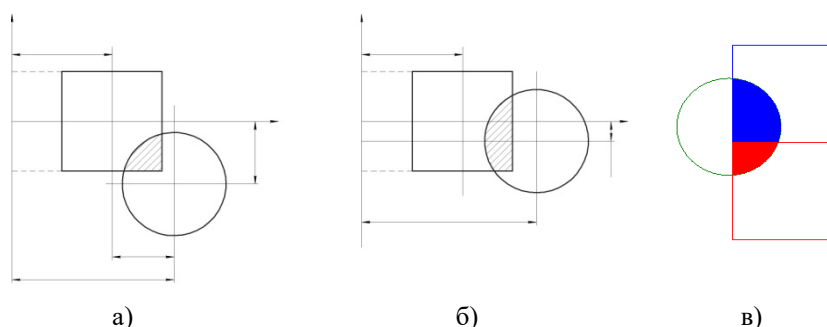


Рис. 1. Две ситуации взаимного расположения светового пятна и ФЧП и их визуализация

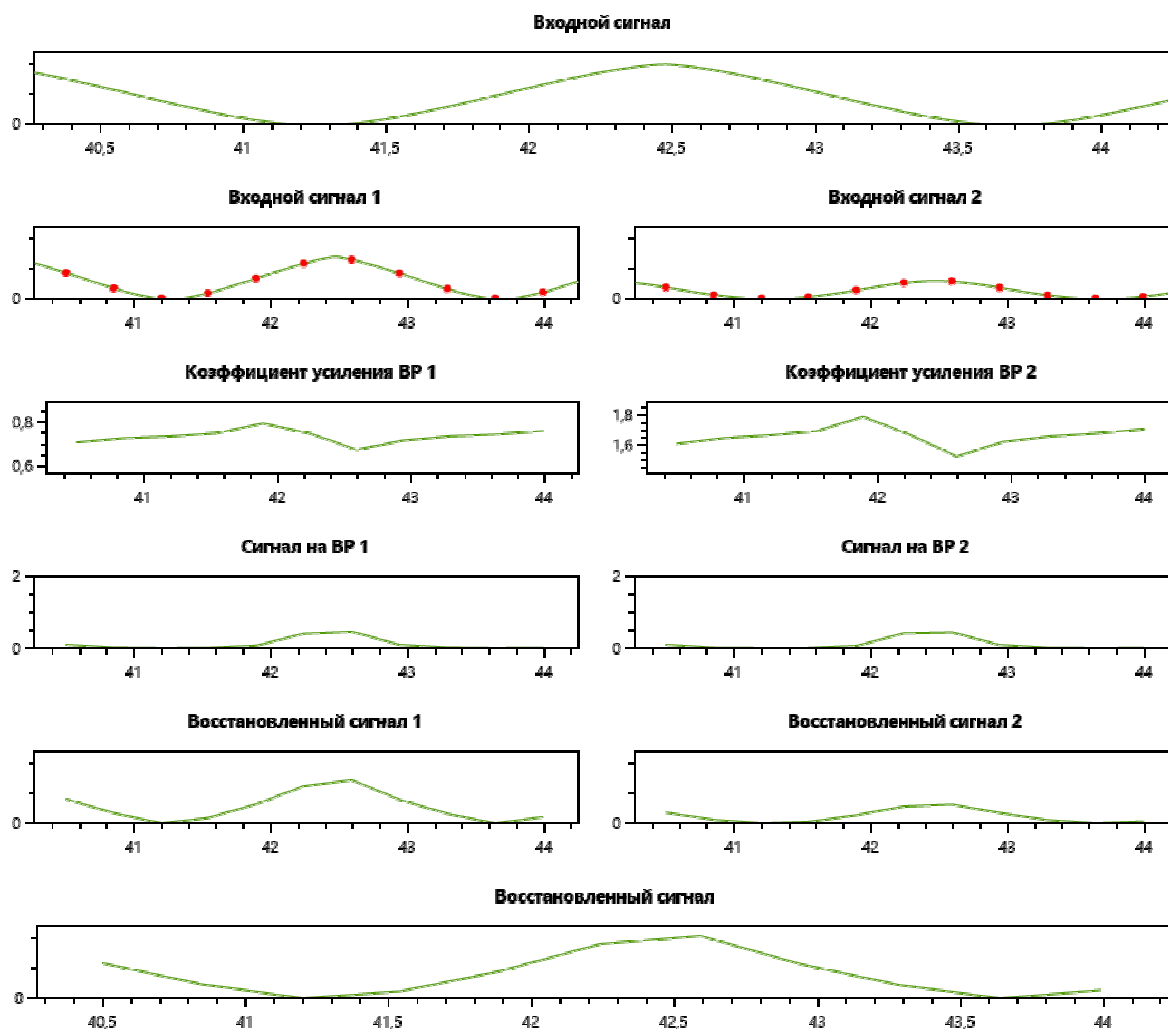


Рис. 2. Отображаемые программой графики

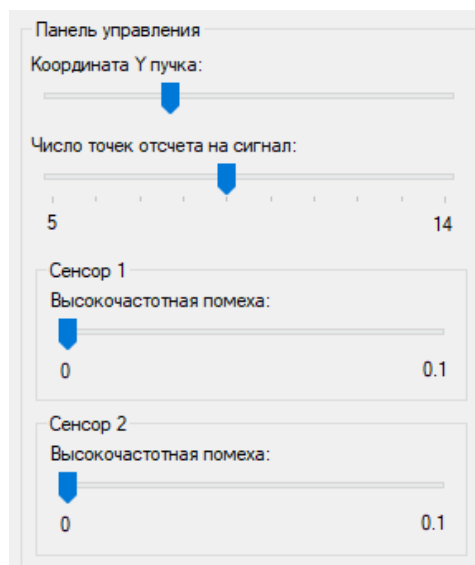


Рис. 3. Элементы управления для настройки симуляции

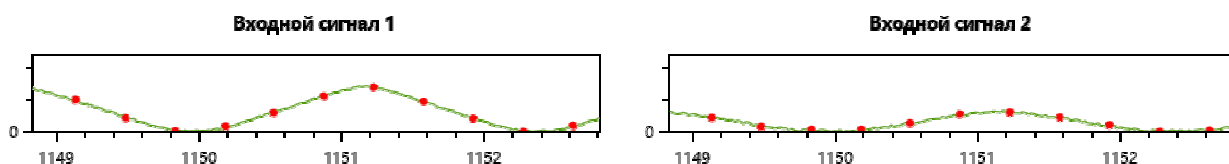


Рис. 4. Пример сигнала с высокочастотной помехой

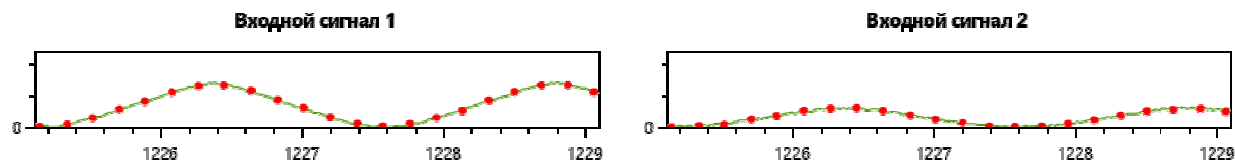


Рис. 5. Входной сигнал с 14-ю выборками

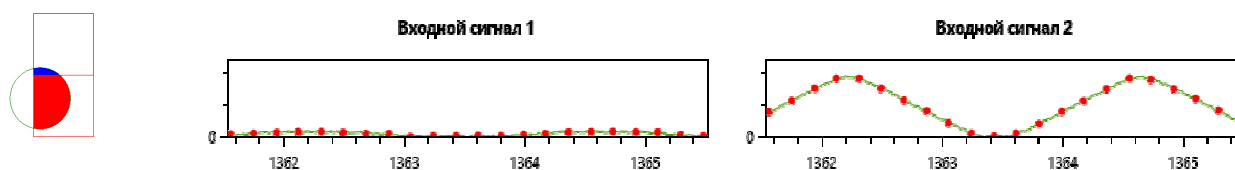


Рис. 6. Визуализация светового пятна, смещенного в сторону нижнего датчика, и соответствующие выходные сигналы двух соседних ФЧП

Библиографический список

1. А.с. (патент) (СССР) № 605317/ Опул. в БИ № 16, 1978. Активное вероятностное реле. Коршунов Ю.М., Симкин А.В., Филатов Ю.А.
2. Haykin S., K. J. Ray Liu. Handbook on array processing and sensor networks // John Wiley & Sons. 2010. V. 63. pp. 102-107.
3. Katsuhiko O. Modern Control Engineering. Fifth Edition, Prentice Hall, 2010.
4. Norton P.C., Horn S. Third generation infrared imagers // Proceeding SPIE. 2000. V. 4130. pp. 226-235.
5. Левшин В.Л. Пространственная фильтрация в оптических системах пеленгации. М.: Советское радио, 1971. 200 с.

6. Бехтин Ю.С., Филатов Ю.А., Ильин А.А., Ширабакина Т.А. Математическая модель реакции сканирующего оптико-электронного анализатора на точечный объект в телекоммуникационных системах. Телекоммуникации, № 6, 2021. С. 2-9.

7. Yu. Bekhtin, Yu. Filatov, A. Ilyin. Compensation of IR-sensor Fixed Pattern Noise during Point Object Magnitude Recovering. GraphiCon 2022: труды 32-й Междунар. конф. по компьютерной графике и машинному зрению (Рязань, 19–22 сент. 2022 г.). М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2022. DOI: 10.20948/graphicon-2022-604-612. С. 604-612.

8. Y. S. Bekhtin, Y. A. Filatov and A. A. Lupachev, "Digital Stabilizing Pulse Signals on the Base of their State Estimators under Noise Environment," 2019 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon), Vladivostok, Russia, 2019, pp. 1-7. DOI: 10.1109/FarEastCon.2019.8933874

УДК 004.42; ГРНТИ 50.33

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ПОСТРОЕНИЯ КАРТ ГЛУБИНЫ

А.В. Антонов, А.И. Ефимов

Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, antonovav@lanit.ru, lexie62rus@mail.ru

Аннотация. В работе рассматриваются существующие алгоритмы построения карты глубины на основе двух двумерных изображений от систем стереозрения, выполнен сравнительный анализ их достоинств и недостатков, сформулированы общие рекомендации по применению.

Ключевые слова: карта глубины, техническое стереозрение, машинное стереозрение, компьютерное зрение, матрица изображения, двумерное изображение, нейронные сети.

RESEARCH DESIGN ALGORITHMS OF DEPTH MAP

A.V. Antonov, A.I. Efimov

Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, antonovav@lanit.ru, lexie62rus@mail.ru

The summary. The paper discusses the existing algorithms for constructing a depth map based on two two-dimensional images from stereo vision systems, a comparative analysis of their advantages and disadvantages is performed, and general recommendations for use are formulated.

Keywords: depth map, technical stereo vision, machine stereo vision, computer vision, image matrix, two-dimensional image, neural networks.

Стереовидение - это метод компьютерного зрения, который использует два цифровых изображения для оценки пространственной структуры сцены. Одним из наиболее важных применений стереовидения является оценка карты глубины, которая включает в себя вычисление карты плотного несоответствия, представляющей относительную глубину расположения объекта на сцене. В данной статье рассматриваются существующие алгоритмы построения карты глубины на основе двух двумерных изображений, полученных со стереокамеры.

С математической точки зрения, цифровое изображение – это матрица чисел, принимающие неотрицательные целочисленные значения, определяющие яркость (интенсивность) изображения в точке с координатами (x, y) на дискретной сетке $M \times N$.

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{1N} \\ \dots & \dots & \dots \\ I_{M1} & I_{M2} & I_{MN} \end{pmatrix}$$

Оценка карты глубины - важнейший шаг в стереовидении. Эта информация может быть использована для широкого спектра приложений, таких как реконструкция сцены, распознавание объектов и автономная навигация роботизированных устройств, осуществляющих одновременно локализацию и построение карты окружающей среды в реальном времени (SLAM) [1].

Производя снимки одной и той же сцены с нескольких точек обзора можно оценить относительное расстояние смещения одного или группы пикселей на левом и правом изображении, как показано на рисунке 1.

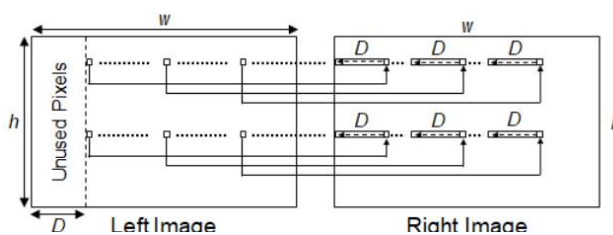


Рис. 1. Сопоставление пикселей левого и правого изображений

Цель состоит в том, чтобы вычислить плотную карту несоответствий, которая представляет относительную глубину каждого пикселя. Карта несоответствий вычисляется путем нахождения соответствующих точек на двух изображениях и вычисления разницы в их координатах по горизонтальной оси абсцисс. Эта разница, известная как диспропорция, пропорциональна глубине точки на сцене.

Описание методов построения карты глубины

Существует несколько алгоритмов для вычисления карты глубины на стереоизображении, они обычно принадлежат одной из двух категорий: локальные методы и глобальные методы [2].

Локальные методы часто используются, когда требуется работа в реальном времени и производительность является более значимым требованием, чем качество и точность полученных данных. Такие методы часто включают в себя минимизацию фотометрической ошибки, которая рассчитывается по окружающим пикселям изображений.

Глобальные методы используются в случае, когда точность построенной карты глубины важнее вычислительной эффективности алгоритма. Поэтому такие методы, как правило, используются в тех приложениях, в которых не требуется работа в реальном времени. Эти алгоритмы добавляют условие пространственной гладкости к задаче минимизации фотометрической ошибки.

В основе метода полуглобального сопоставления SGM, SGBM (Semi-Global Block-Matching Algorithm) [3] лежит поиск такого соответствия между пикселями, которое максимизирует взаимную информацию для каждой пары пикселей. Гладкость полученной карты дальностей достигается путем комбинирования нескольких одномерных ограничений.

Так же в последнее время становится все более актуальным и популярным применение сверточных нейронных сетей (CNNs).

Алгоритм сопоставления блоков

Простой и быстрый подход к оценке карты глубины стереоизображения. Он включает в себя разделение каждого изображения на перекрывающиеся блоки и поиск наиболее подходящего блока на другом изображении. Затем несоответствие оценивается как разница в координатах по оси абсцисс между соответствующим блоком и опорным блоком.

Основная идея сопоставления блоков заключается в сравнении небольших участков двух изображений и поиске того, у которого наименьшая сумма абсолютных различий (SAD, sum of absolute differences) [4]. Разница между двумя блоками вычисляется путем взятия абсолютного значения разницы между каждой парой соответствующих пикселей и суммирования результатов.

Алгоритм сопоставления блоков может быть формализован следующим образом. Пусть L и R - два предобработанных изображения, и пусть x и y - координаты блока на левом и правом изображении соответственно. Расстояние между блоками с центром в точке x и y определяется следующим образом:

$$C(x, y, d) = \sum_{i < n} \sum_{j < n} |L(x + i, y + j) - R(x + d + i, y + j)|,$$

где n - размеры блока. Наилучший соответствующий блок правого изображения для блока с центром в x найден путем поиска по диапазону возможных несоответствий d и вычисления суммы абсолютных различий для каждого. Затем карта несоответствий вычисляется как разница в координатах x между соответствующими блоками левого и правого изображения.

Преимущества:

- алгоритм сопоставления блоков прост и понятен;
- быстрый и эффективен с точки зрения вычислений, что делает его подходящим для приложений реального времени;
- не чувствителен к шуму изображения, поскольку SAD является надежной мерой сходства между блоками.

Недостатки:

- алгоритм сопоставления блоков предполагает, что интенсивность изображения постоянна внутри каждого блока, что не всегда имеет место в реальных сценах. Это может привести к ошибкам в карте несоответствий;
- алгоритм может приводить к ошибкам в карте несоответствий на границах объекта и других неоднородностях, поскольку он чувствителен к изменениям интенсивности;
- алгоритм ограничен в своей способности обрабатывать большие расхождения, поскольку диапазон поиска наилучшего совпадающего блока конечен.

Алгоритм полуглобального сопоставления (SGM)

Полуглобальное сопоставление (Semi-Global Matching, SGM) [4] – это более сложный подход к оценке карты глубины стереоизображения, который устраняет некоторые ограничения блочного сопоставления, предложен Heiko Hirschmuller в 2005 году в статье [5].

SGM включает вычисление объема затрат, который представляет собой стоимость сопоставления каждого пикселя на одном изображении со всеми пикселями на другом изображении при заданном несоответствии. Стоимость вычисляется на основе функции, которая измеряет сходство между интенсивностями соответствующих пикселей.

Получение карты диспаритности с использованием алгоритма Semi-Global Matching, в общем виде состоит из трёх этапов:

1. Вычисление стоимости сопоставления пикселя;
2. Суммирование стоимостей;
3. Вычисление карты отклонений.

В алгоритме SGM объем затрат вычисляется с использованием подхода который включает вычисление затрат для каждого пикселя по нескольким расстояниям от левого изображения к правому. Стоимость для каждого пикселя вычисляется как минимальная стоимость по всем расстояниям отклонения, которые достигают этого пикселя. Затем вычисляется окончательная карта несоответствий путем нахождения несоответствия с минимальной стоимостью для каждого пикселя.

Математическая формулировка SGM может быть выражена следующим образом [6]. Пусть $L_r(p, d)$ - стоимость сопоставления пикселя p на одном изображении с пикселем с раз-

ницей d на другом изображении. Стоимость вычисляется на основе функции стоимости, которая измеряет сходство между интенсивностями соответствующих пикселей. Затем объем затрат может быть вычислен следующим образом[6]:

$$\begin{aligned} L_r(p, d) = \min (L_r(p - 1, d), \\ L_r(p - 1, d - 1) + P_1, \\ L_r(p - 1, d + 1) + P_2), \end{aligned}$$

где $L_r(p, d)$ - функция затрат на сходство между интенсивностями соответствующих пикселей, а P_1 и P_2 - штрафы за изменения несоответствия.

Агрегирование стоимости изображения – это сумма агрегации стоимости каждого пикселя:

$$S(p, d) = \sum L_r(p, d) .$$

Преимущества SGM:

- SGM дает более точные результаты по сравнению с алгоритмом сопоставления блоков, поскольку учитывает изменения интенсивности внутри изображения;
- позволяет обрабатывать большие различия, поскольку вычисляет объем затрат в гораздо большем диапазоне различий;
- менее чувствителен к изменениям интенсивности и границам объекта, поскольку вычисляет объем затрат на основе нескольких траекторий вдоль изображения.

Недостатки SGM:

- SGM является более сложным в вычислительном отношении по сравнению с алгоритмом сопоставления блоков, что делает его менее подходящим для приложений реального времени;
- подход, используемый в SGM, может быть чувствителен к перекрытиям и другим несоответствиям в изображении, что приводит к ошибкам в карте несоответствий.

Сверточные нейронные сети (CNNs)

Наиболее популярный в последние годы и наиболее часто применяемый подход к решению задачи оценки карты глубины, демонстрирующий хорошие результаты. CNN обучены распознавать соответствие между стереоизображениями и соответствующей картой глубины путем оптимизации функции потерь, которая измеряет разницу между прогнозируемой картой глубины и картой истинной глубины.

Основная идея заключается в извлечении объектов из стереоизображений и использовании их для прогнозирования карты глубины. Сеть обычно состоит из нескольких сверточных слоев, которые извлекают объекты из изображения, за которыми следует один или несколько полностью связанных слоев, которые создают окончательную карту глубины.

На рисунке 2 представлены пары левого и правого изображения, а также построенная карта глубины. Использовался алгоритм «CREStereo», представленный в статье [7], в основе которого лежит стереосогласование при помощи каскадной рекуррентной сети с адаптивной корреляцией.



Рис. 2. Результат работы алгоритма при помощи каскадной рекуррентной сети с адаптивной корреляцией

На результирующем изображении видно, что объекты, имеющие относительно большее смещение на кадре в результате явления параллакса, имеют более ярким цвет и, соответственно, находятся более близко к точке наблюдения на реальной сцене.

Преимущества CNNs:

- CNN дают результаты высокой точности по сравнению с другими алгоритмами, поскольку могут сопоставлять сложные взаимосвязи между стереоизображением и картой глубины;
- подходят для приложений реального времени, поскольку алгоритмы подходят к распараллеливанию и эффективно обрабатывать на графических процессорах;
- менее чувствительны к изменениям интенсивности и границам объектов по сравнению с другими алгоритмами, поскольку они учатся справляться с этими проблемами во время обучения;

Недостатки CNNs:

- CNN требуют больших объемов обучающих данных, получение которых может быть трудозатратным и занимает значительное время. Сам процесс обучения, в зависимости от объема датасета, в среднем составляет от нескольких дней до недель.
- могут быть чувствительны к качеству обучающих данных, однако любые ошибки в обучающих данных могут быть изучены и усилены сетью дополнительно.
- трудно интерпретировать с математической точки зрения, поскольку результат работ внутренних слоев сети не очевиден, из-за этого результат не всегда может быть предсказуемым.

Оценка по тесту Middlebury Stereo Vision Benchmark

Тест Middlebury stereo vision benchmark [8, 9] – это широко используемая таблица результатов работы различных алгоритмов построения карты глубины стереоизображения.

Результаты первых 10 алгоритмов оценки карты глубины стереоизображения в наборе данных Middlebury показаны на рисунке 3. Как можно видеть, алгоритмы, основанные на CNN превосходят другие алгоритмы, причем наиболее эффективный алгоритм достигает средней ошибки в 3,2 пикселя, а улучшенный алгоритм SGM-Forest имеет ошибку 7,37.

Date	Name	Res	Weight	Austr	AustrP	Bicyc2	Class	ClassE	Compu	Crusa	CrusaP	Djemb	DjembL	Hoops	Livgrm	Nkuba	Plants	Stairs
				MP: 5.6 nd: 290 im0 im1 GT nonocc	MP: 5.6 nd: 290 im0 im1 GT nonocc	MP: 5.6 nd: 250 im0 im1 GT nonocc	MP: 5.7 nd: 610 im0 im1 GT nonocc	MP: 5.7 nd: 610 im0 im1 GT nonocc	MP: 1.5 nd: 256 im0 im1 GT nonocc	MP: 5.5 nd: 800 im0 im1 GT nonocc	MP: 5.5 nd: 800 im0 im1 GT nonocc	MP: 5.7 nd: 320 im0 im1 GT nonocc	MP: 5.7 nd: 320 im0 im1 GT nonocc	MP: 5.7 nd: 410 im0 im1 GT nonocc	MP: 5.9 nd: 320 im0 im1 GT nonocc	MP: 5.5 nd: 570 im0 im1 GT nonocc	MP: 5.6 nd: 320 im0 im1 GT nonocc	MP: 5.2 nd: 450 im0 im1 GT nonocc
↓↑	↓↑	↓↑	↓↑	↓↑	↓↑	↓↑	↓↑	↓↑	↓↑	↓↑	↓↑	↓↑	↓↑	↓↑	↓↑	↓↑	↓↑	↓↑
11/10/22	DLNR	F	3.20	2.91	2.37	2.18	1.67	3.21	1.37	1.66	1.66	1.11	6.25	7.07	3.45	8.90	4.43	2.91
06/13/22	EAI-Stereo	F	3.68	4.02	3.32	2.48	1.42	4.19	2.37	2.18	2.01	1.16	10.2	8.84	4.00	7.15	3.14	6.44
11/10/21	CREStereo	F	3.71	4.73	3.94	5.07	1.96	3.02	1.42	2.28	2.05	1.51	6.86	6.35	4.25	6.01	4.60	5.49
11/07/22	ConvStereo	F	4.62	5.66	4.86	4.49	2.47	3.38	1.83	2.81	2.62	1.55	10.4	7.32	5.53	9.74	5.08	6.91
10/01/22	CREStereo++_RVC	F	4.68	5.09	4.04	5.24	3.21	5.05	2.11	3.52	3.58	1.67	8.01	6.61	4.68	9.53	4.61	5.98
07/26/21	RAFT-Stereo	F	4.74	4.19	3.44	3.11	1.51	7.30	2.79	2.67	2.59	1.39	7.46	10.2	5.86	13.02	3.59	9.38
05/26/18	NOSS_ROB	H	5.01	3.57	2.84	3.99	1.93	5.15	3.34	3.32	3.15	2.32	8.55	7.45	7.06	12.5	5.20	9.06
07/23/21	HBP_ISP	H	5.20	3.70	3.05	3.57	2.34	7.80	3.79	3.34	3.09	1.87	9.85	10.1	7.82	11.2	5.26	7.86
06/22/17	LocalExp	H	5.43	3.65	2.87	2.98	1.99	5.59	3.37	3.48	3.35	2.05	10.3	9.75	8.57	14.4	5.40	9.55

Рисунок 3. Сводная таблица оценки алгоритмов по тестам Middlebury

Данные Middlebury Stereo dataset состоят из набора пары изображений высокого разрешения со сложной геометрией и данными о несоответствии действительности с точностью до пикселя. Достоверные различия достигаются с помощью технологии, которая использует структурированное освещение и не требует калибровки световых проекторов. Алгоритмы оцениваются на основе средней ошибки между оцененными и истинными картами глубины.

Выводы

Исходя из проведенного анализа, выбор конкретного алгоритма определяется требованиями к скорости обработки данных, качеству получаемых результатов, а также используемой аппаратной платформы. Невозможность создания абсолютно универсального подхода, демонстрирующего одинаково качественные результаты во всех случаях применения, определяет необходимость дальнейшего совершенствования существующих и создания новых подходов.

Библиографический список

1. G. Ryan, R. Roelofs. Simultaneous Localization and Mapping, Swarthmore College. Dept. of Engineering, 2013, URL: <https://triceratops.brynmawr.edu/handle/10066/11713>
2. Q. Yang, L. Wang, and N. Ahuja, A constant-space belief propagation algorithm for stereo matching. CVPR 2010. URL: <https://xing-mei.github.io/files/rdp.pdf>
3. MathWorks. Stereo Disparity Using Semi-Global Block Matching. URL: <https://www.mathworks.com/help/visionhdl/ug/stereoscopic-disparity.html>
4. ProgrammerSought. A summary of the three basic algorithms SAD, SSD, SGBM and development status of binocular stereo vision. URL: <https://www.programmersought.com/article/93105038292/>
5. H.Hirschmuller. Accurate and efficient stereo processing by semi-global matching and mutual information. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2006
6. Spangenberg, R.; Langner, T.; Adfeldt, S. & Rojas, R. Large scale Semi-Global Matching on the CPU Intelligent Vehicles Symposium Proceedings, 2014 IEEE, 2014, 195-201. URL: <https://www.mi.fu-berlin.de/inf/groups/ag-ki/publications/Semi-Global-Matching/Semi-Global-Matching.pdf>
7. Jiankun Li, Peisen Wang, Pengfei Xiong, Tao Cai, Ziwei Yan, Lei Yang, Jiangyu Liu, Haoqiang Fan, Shuaicheng Liu, Megvii Research, Tencent University of Electronic Science and Technology of China. Practical Stereo Matching via Cascaded Recurrent Network with Adaptive Correlation. URL: https://openaccess.thecvf.com/content/CVPR2022/papers/Li_Practical_Stereo_Matching_via_Cascaded_Recurrent_Network_With_Adaptive_Correlation_CVPR_2022_paper.pdf
8. Middlebury College. Repository for computer vision evaluations and datasets URL: <https://vision.middlebury.edu/stereo/eval3/>
9. Daniel Scharstein. The Middlebury Stereo Evaluation Version 3. Department of Computer Science Middlebury College. URL: <https://hci.iwr.uni-heidelberg.de/sites/default/files/profiles/khonauer/files/MiddleburyStereoEval3-DanielScharstein-cvpr2015.pdf>

УДК 004.932; ГРНТИ 49.03.03

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИСПОРЧЕННЫХ (ИЛИ ЗАШУМЛЕННЫХ) ВИДЕОКАДРОВ

Н.М. Сафронов

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, nik.evropin.99@mail.ru.*

Аннотация. В работе оценивается эффективность методов восстановления испорченных видеок кадров. Рассматриваются несколько методов восстановления испорченных видеок кадров. Производится их анализ и рассматриваются результаты работы каждого из методов.

Ключевые слова: видеоконтроль, методы восстановления видеок кадров, эффективность.

EVALUATION OF THE EFFECTIVENESS OF METHODS FOR RECOVERING CORRUPTED (OR NOISY) VIDEO FRAMES

N.M. Safronov

*Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, nik.evropin.99@mail.ru*

The summary. The paper evaluates the effectiveness of methods for recovering corrupted video frames. Several methods for recovering corrupted video frames are considered. They are analyzed and the results of each of the methods are considered.

Keywords: video monitoring, video frame recovery methods, efficiency

Введение

В настоящее время спектр использования систем видеоконтроля очень велик. Такие системы надежны, просты в настройке и установке. Эти факторы сделали их использование повсеместным. В космической отрасли системы видеоконтроля находят широкое применение, в части например, фиксации запусков космических объектов [1]. Видеофиксация запуска и отслеживания дальнейшего полета ракеты - значимый элемент процесса.

При особенных моментах пуска – манёврах, отстыковках, срабатывании двигателей, сопровождаемых значительными скоростными и динамическими перегрузками, могут возникать искажения в изображении (помехи) визуального представления элементов ракеты. Появление помех изображения является критичным фактором видеоконтроля. При значительном уровне помех конечное изображение может получиться неполным и не точным.

Для решения проблем возникновения помех применяются различные методы восстановления видеок кадров. Предлагаемые методы, которые работают по разным алгоритмам, имеют разную структуру и нагруженность. Целью статьи является оценка эффективности методов восстановления испорченных или зашумленных участков видеок кадров и выбор наиболее оптимального для решения конкретной задачи.

Теоретическая часть

Для задачи фиксации космических пусков должны быть использованы специальные методы быстрого восстановления видеок кадров, ведь съемка происходит в реальном времени, и для поставленной задачи более актуально получение и исследование простых алгоритмов восстановления.

Рассмотрим методы быстрого восстановления испорченных участков видеок кадров, реализация которых выполняется с меньшими вычислительными затратами, и проведем сравнения между их результативностью.

Первый из методов восстановления представляет собой выявление искажений на кадре путем нахождения функции корреляции между соседними строками одного кадра, а также одинаковыми строками соседних кадров. Такое искажение является дефектной областью на

изображении. Для определения границ искажённого участка кадра разность строк соседних кадров в цветовом пространстве RGB находится так:

$$S_i = \sum_{j=1}^w |b_{rij} - a_{rij}| + |b_{gij} - a_{gij}| + |b_{bij} - a_{bij}|, \quad (1)$$

где S_i – текущая строка;

S_{i-1} – предыдущая строка;

j – элемент строки;

a, b – яркостные компоненты точек

Начало дефектной области находится следующим образом:

$$S_i - S_{i-1} > 3 * \Delta_s,$$

где Δ_s – сумма разностей компонентов пикселей для предыдущей строки.

Окончание дефектной области определяется двумя условиями:

$$S_i - S_{i-1} < 0, |S_i - S_{i-1}| > 3 * \Delta_s$$

Такой метод хотя и действенный, но не всегда рабочий, из-за того что искаженные кадры могут следовать друг за другом.

Это происходит в следствие использования алгоритма jpg, поэтому в конкретном случае метод будет неэффективен.

Поэтому, для устранения данной проблемы был разработан следующий метод восстановления, его суть заключается в том, что восстановление применяется только на анализе текущего кадра, именно того, который восстанавливается. Для определения границ искажённого участка кадра разность соседних строк одного кадра в цветовом пространстве RGB находится следующим образом:

$$S_i = \sum_{j=2}^w |a_{rij} - a_{rij-1}| + |a_{gij} - a_{gij-1}| + |a_{bij} - a_{bij-1}| \quad (2)$$

Начало и конец дефектного участка определяются по тому же принципу что и в 1 методе, но при обнаружение искаженных строк, верхняя половина серии заменяется последней строкой предыдущего качественного участка кадра, а нижняя первой строкой, которая следует за искаженной. Недостаток данного метода заключается в том, что если плохой участок начался с первой строки, то его восстановление сделает только хуже и полностью испортит.

Исходя из вышеперечисленных был разработан 3 метод восстановления на основе аппроксимации из соседних кадров, суть метода заключается в следующем: имеется испорченный участок, для каждой ячейки цветового компонента проводится линейная аппроксимация. Выявление границ дефектных участков полностью идентично предыдущему методу. Для каждого i -го столбца, ограниченного точками $[x_{i y_{b1}} \dots x_{i y_{bn}}]$, где $b1$ и bn – номера первой и последней строк дефектного участка, выбираются яркостные компоненты точек $x_{i y_{b1-1}}$ и $x_{i y_{bn+1}}$ (т.е. в последней строке предыдущего достоверного участка и первой строке следующего достоверного участка). Если a_{r0} и a_{rn+1} – красные компоненты этих точек, то

$$a_{ri} = a_{r0} + \frac{a_{rn+1} - a_{r0}}{b_n - b_1 + 1} * (i - b_1 + 1). \quad (3)$$

Практическая часть

В этой части статьи будут проведены эксперименты и показаны результаты работы каждого из выбранных методов восстановления. Ниже представлен кадр с типичным искажением для формата MJPG.

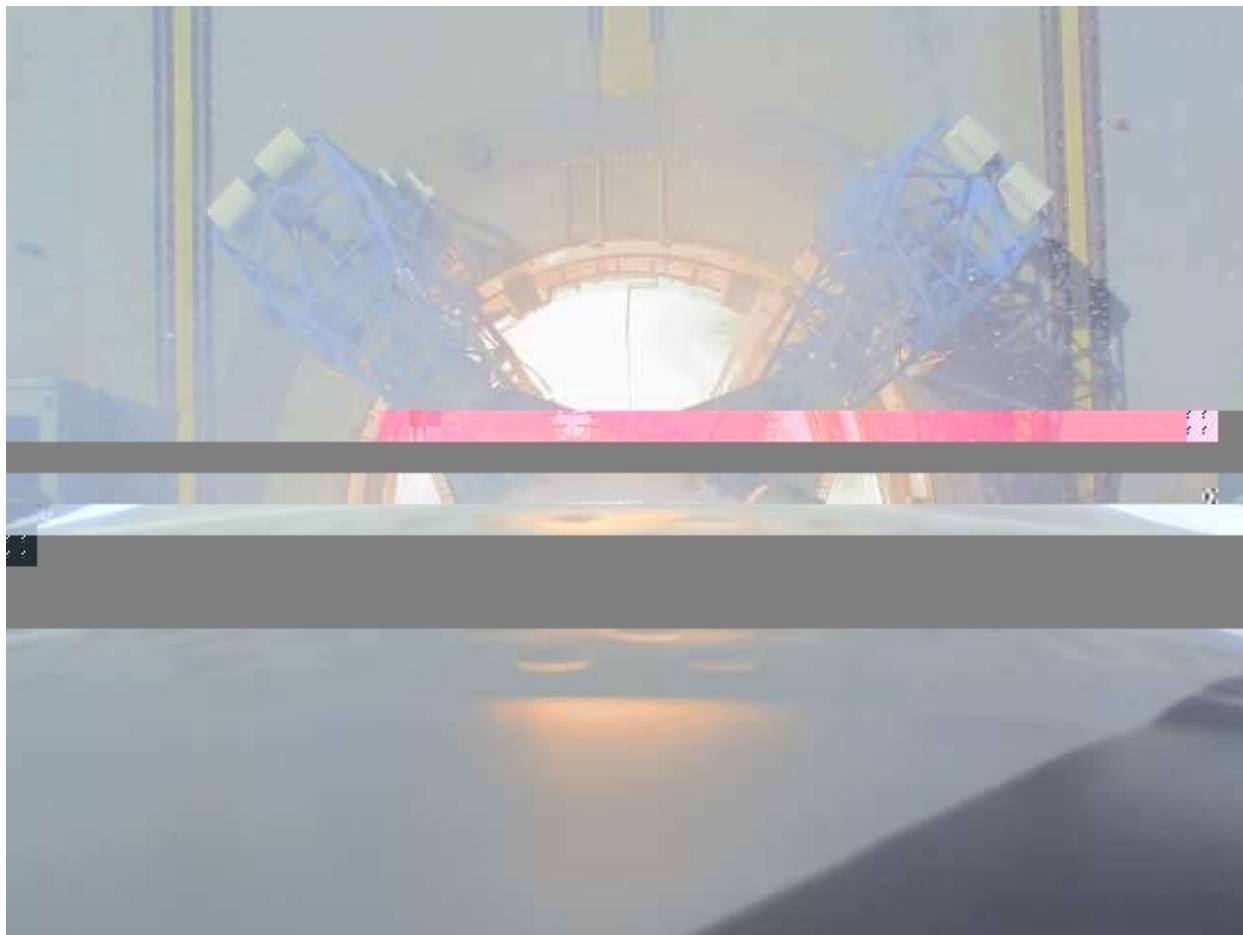


Рис. 1. Пример кадра с искажением

Перед началом восстановления строится общая гистограмма по двум кадрам, искаженному и предшествующему ему качественному кадру

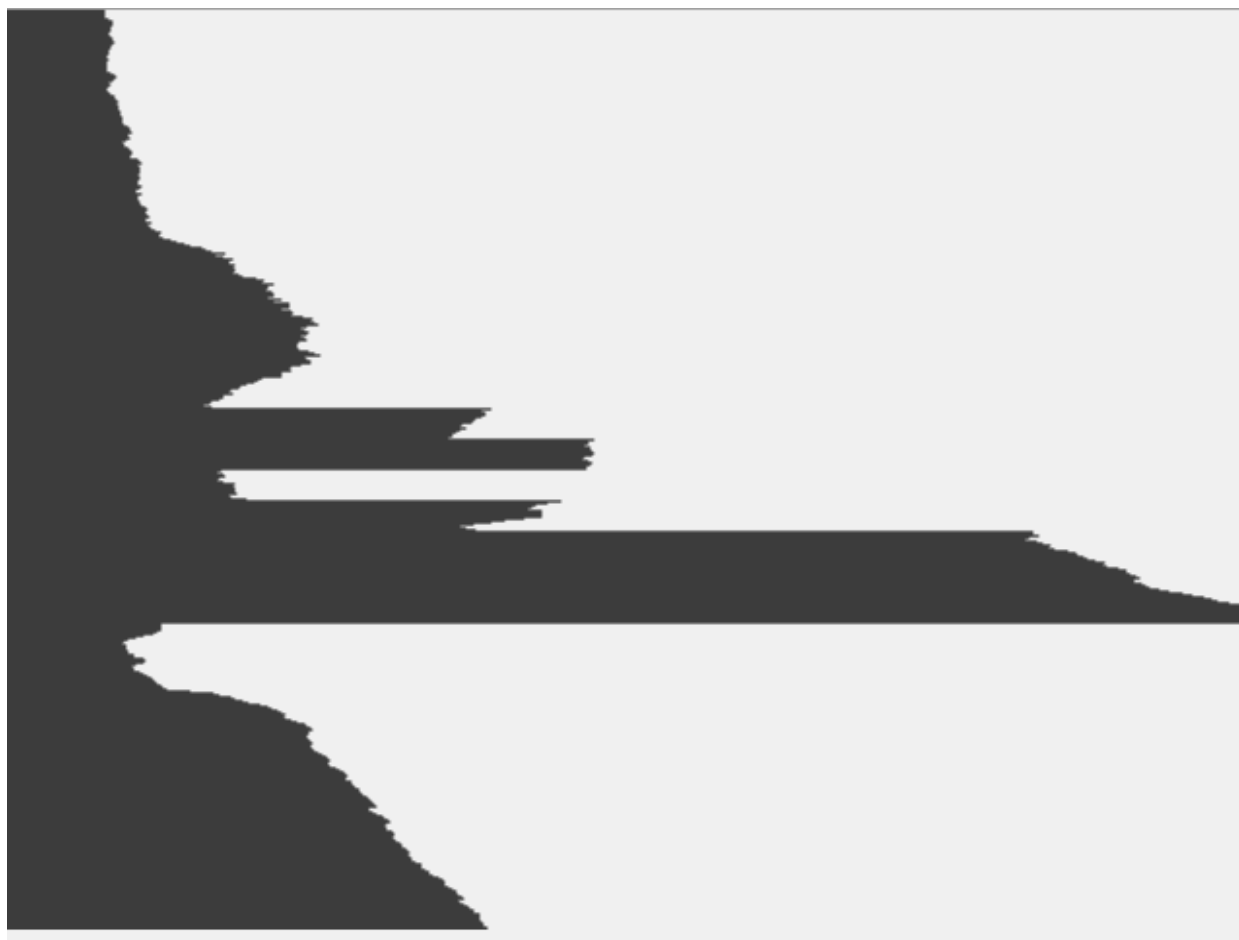


Рис. 2. Общая гистограмма по двум кадрам

Пример восстановленного кадра можно наблюдать на рисунке 3.

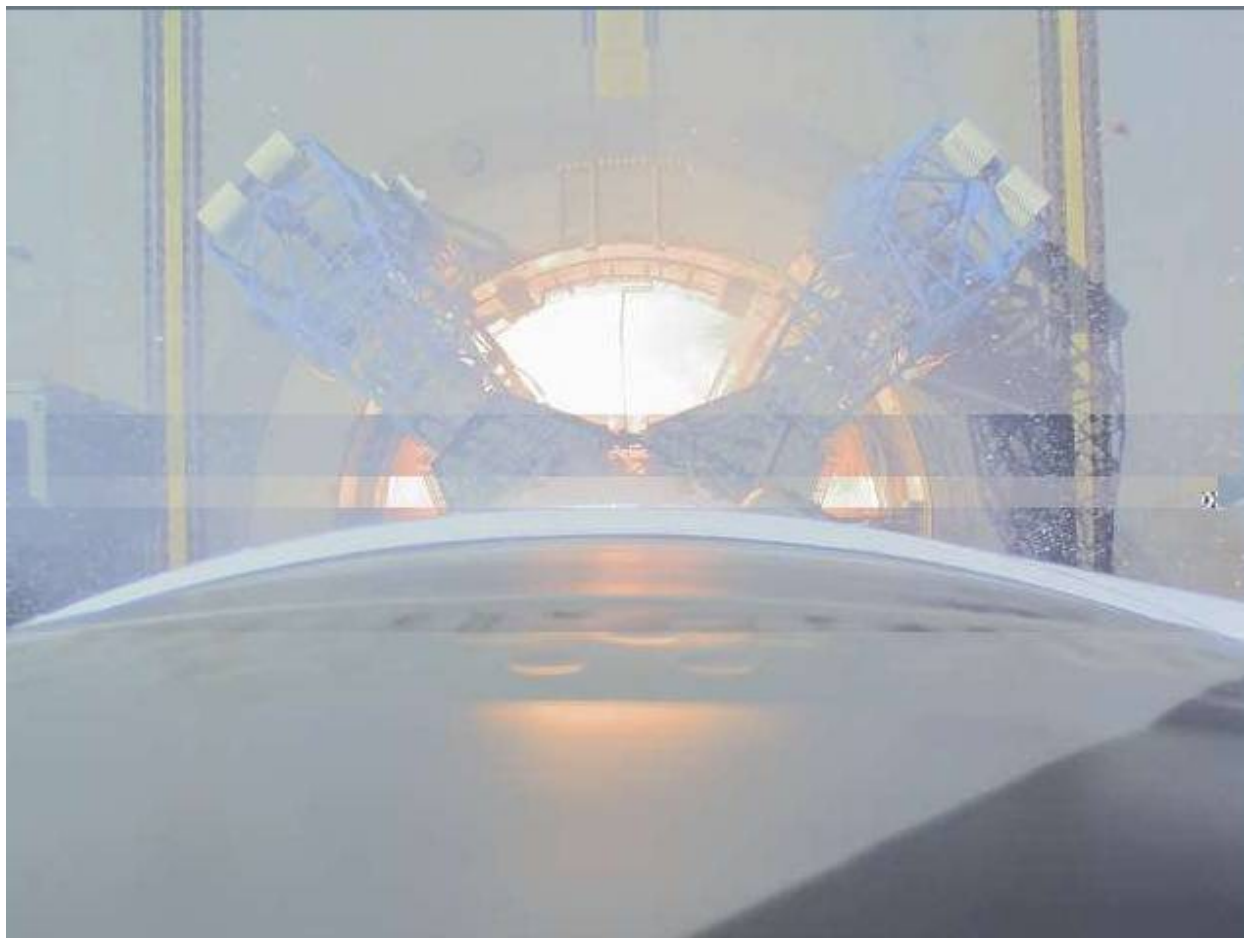


Рис. 3. Результат работы метода восстановления по двум кадрам

Поскольку метод хорошо работает в случае, когда искажённому кадру предшествует заведомо достоверный, т.е. восстановление эффективно только для помех в одиночных кадрах. В этом случае на искажённый кадр могут быть наложены строки предыдущего кадра. Если же несколько искажённых кадров следуют один за другим, метод теряет свою эффективность. Для решения данной проблемы был разработан 2 метод восстановления.

Для следующего метода восстановления была построена гистограмма по дефектному кадру, которую можно наблюдать на рисунке 4.

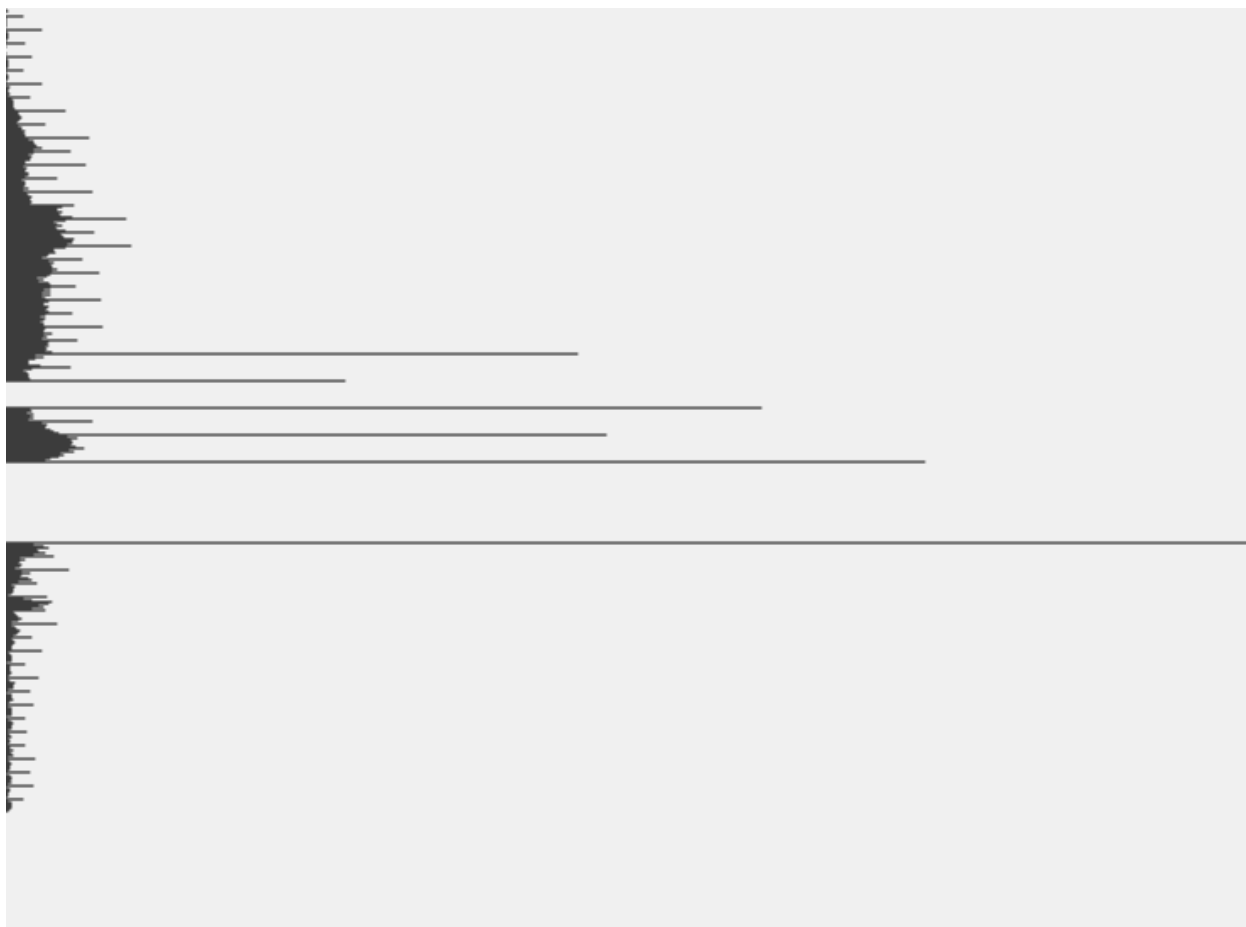


Рис. 4. Гистограмма построенная по дефектному кадру

Восстановленный кадр с помощью второго метода можно увидеть на рисунке 5.



Рис. 5. Результат работы метода восстановления по дефектному кадру

После анализа работы данного метода было выяснено, что если плохой участок начался с первой то восстановление будет работать только на ухудшение качества кадра, по этой причине было принято решение разработать еще один метод восстановления на основе аппроксимации строк.

Как можно видеть из рисунка 6 для работы данного метода так же строится гистограмма по дефектному кадру:



Рис. 6. Гистограмма построенная по дефектному кадру

Результат восстановления показан на рисунке 7.



Рис. 7. Результат работы метода на основе аппроксимации кадров

Последний метод хоть и более универсален в своем применении, но полученный с помощью него результата несколько хуже чем двух предыдущих методах, так как в результате восстановления испорченные участки замыливаются.

Выводы

В ходе исследования трех рассмотренных методов восстановления можно сделать следующие выводы. Первый метод восстановления обеспечивает наиболее приятный для глаза результат, однако, его применение ограничено спецификой работы алгоритма сжатия. В результате работы второго метода конечный кадр выглядит не совсем точно. Вместе с тем, его применение более универсально, но также не лишено ограничений. Исходя из всего вышеперечисленного применение метода три наиболее оптимально. Результат его работы последнего из методов дает лучше чем у метода 2 результаты, хотя при этом качество изображения и уступает методу 1. Метод 3 лишен недостатков двух других методов, что делает его применение универсальным.

Библиографический список

1. М.Ю. Звездочкин, Г.Ю. Геннадьев, С.М. Белоусов. Способ быстрого восстановления искажённых фрагментов кадров при передаче информации бортовых систем видеоконтроля // Материалы VII Всероссийской научно-технической конференции «Актуальные проблемы ракетно-космической техники» (V Козловские чтения), Самара, 2017. Т.2, с. 218.
2. Роджерс Д., Адамс Дж.А. Математические основы машинной графики. Пер.с англ.-М.:Мир,2001.- 604с.,ил. 4. <http://www.compression.ru> - все о методах сжатия.
3. Просис Д. Файлы растровой графики: взгляд внутрь. // PC Magazine. - 1996. - December с. 3 - 21.

УДК 004.921; ГРНТИ 81.14.11

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БИБЛИОТЕКИ SNAP.SVG ДЛЯ РАЗРАБОТКИ ОНЛАЙН ИГРЫ «CRAZY RACCOON»

В.А. Антошкин, А.В. Арсенов, М.С. Синёв

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина,
Российская Федерация, Рязань, v.antoshkin@rsu.edu.ru, sasha9182-2015@yandex.ru,
a.arsenov1507@stud.rsu.edu.ru

Аннотация. В работе рассмотрен подход анимации графических примитивов игры «Crazy Raccoon» с использованием JavaScript библиотеки Snap.svg.

Ключевые слова: SVG, JavaScript, компьютерные онлайн игры, Google, Crazy Raccoon.

USING THE SNAP.SVG LIBRARY FOR THE DEVELOPMENT OF THE ONLINE GAME «CRAZY RACCOON»

V.A. Antoshkin, A.V. Arsenov, M.S. Sinyov

Ryazan State University named for S.A. Yesenin,
Russia, Ryazan, v.antoshkin@rsu.edu.ru, sasha9182-2015@yandex.ru

The summary. The article considers the approach of animation of graphic primitives of the game "Crazy Raccoon" using the Snap.svg JavaScript library.

Keywords: SVG, JavaScript, computer online games, Google, Crazy Raccoon.

SVG (Scalable Vector Graphics) – это рекомендация Консорциума Всемирной паутины и язык разметки для представления двумерной масштабируемой векторной графики в формате XML.

Размеченное таким образом изображение может быть встроено в html-код любой веб-страницы и масштабироваться без потери качества на любых устройствах. Кроме этого, к элементам такого изображения можно добавлять различные эффекты анимации: перемещение, поворот, сжатие, скручивание и т.д [1].

Для создания SVG-изображений можно использовать любой текстовый редактор, однако наиболее эффективно применять для этого специализированные программы, например, Adobe Illustrator (рис. 1).

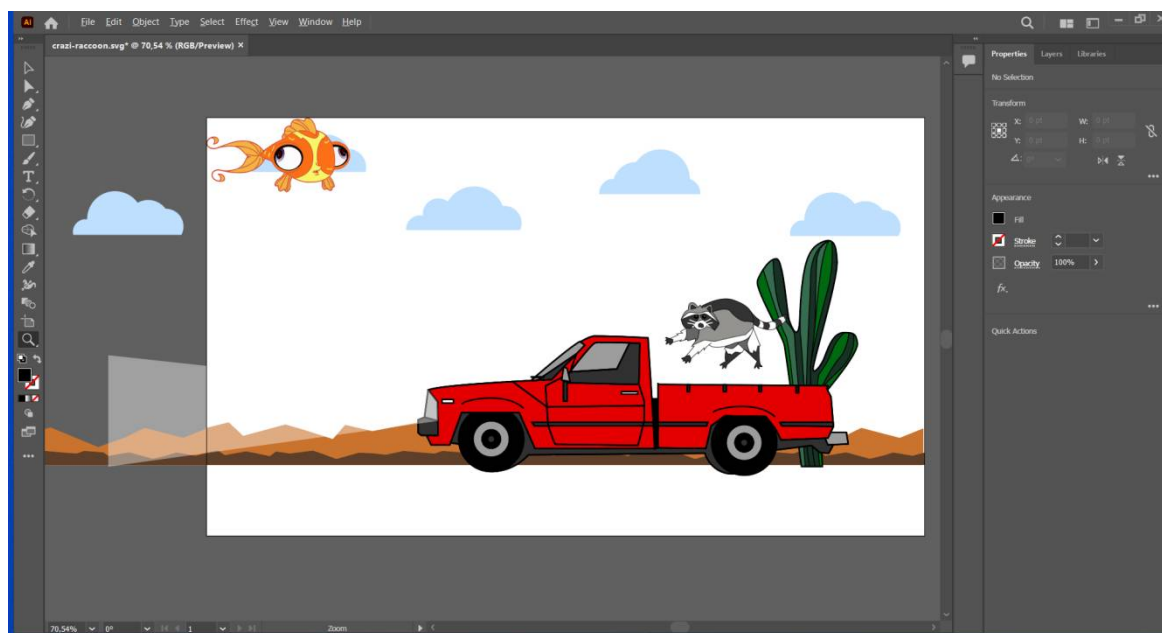


Рис. 1. Набор SVG-изображений для игры «Crazy Raccoon»

Этот редактор в графическом режиме позволяет создать целый набор svg-образов в одном файле. Каждый из этих образов группируется отдельно с помощью специального тега «g» с указанием уникального идентификатора этой группы. Например, все элементы изображения рыбки было сгруппированы в теге «g» с идентификатором «fGroup», как это показано на рисунке 2.

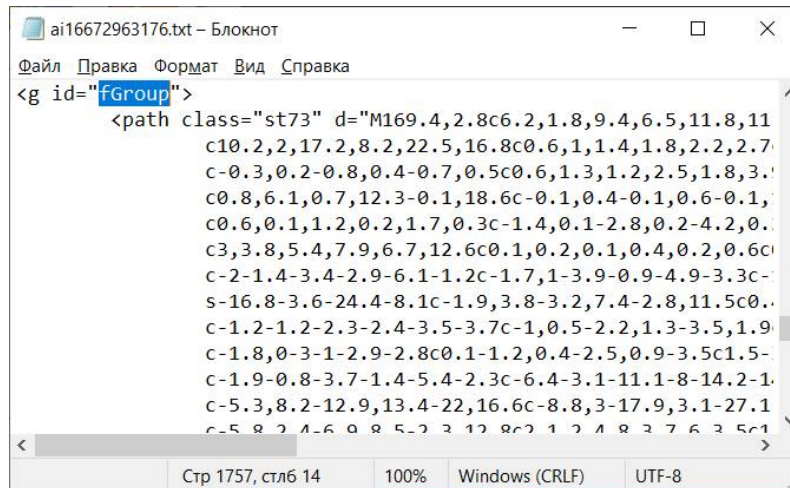


Рис. 2. Разметка изображения золотой рыбки

Аналогично были сгруппированы изображения: облаков, горизонта, гор, кактуса, грузовика, света фар и енота, которые будут использоваться в дальнейшем для создания игры. Часть этих изображений выходит за границы основной области рисунка для того, чтобы к ним можно было бы добавить позже эффект непрерывного движения.

Для создания анимационных эффектов предложено использовать специализированную JavaScript-библиотеку «Snap.svg» (рис. 3). Ее уникальной особенностью является возможностью работы с svg-образами также, как и с обычными объектами языка JavaScript [2].

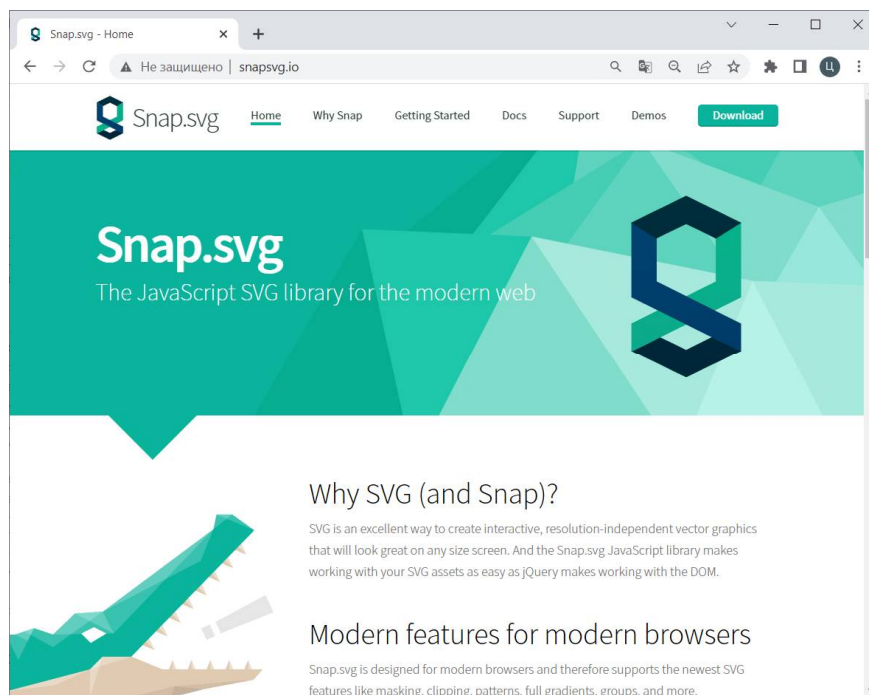


Рис. 3. Библиотека «Snap.svg»

Эта библиотека позволяет разработать на основе исходного SVG-файла простую детскую онлайн игру «Crazy Raccoon», которая представляет собой сумасшедшего енота, едущего по пустынной дороге в кузове пикапа и мечтающего поймать как можно больше Золотых Рыбок, не пропустив ни одну из них.

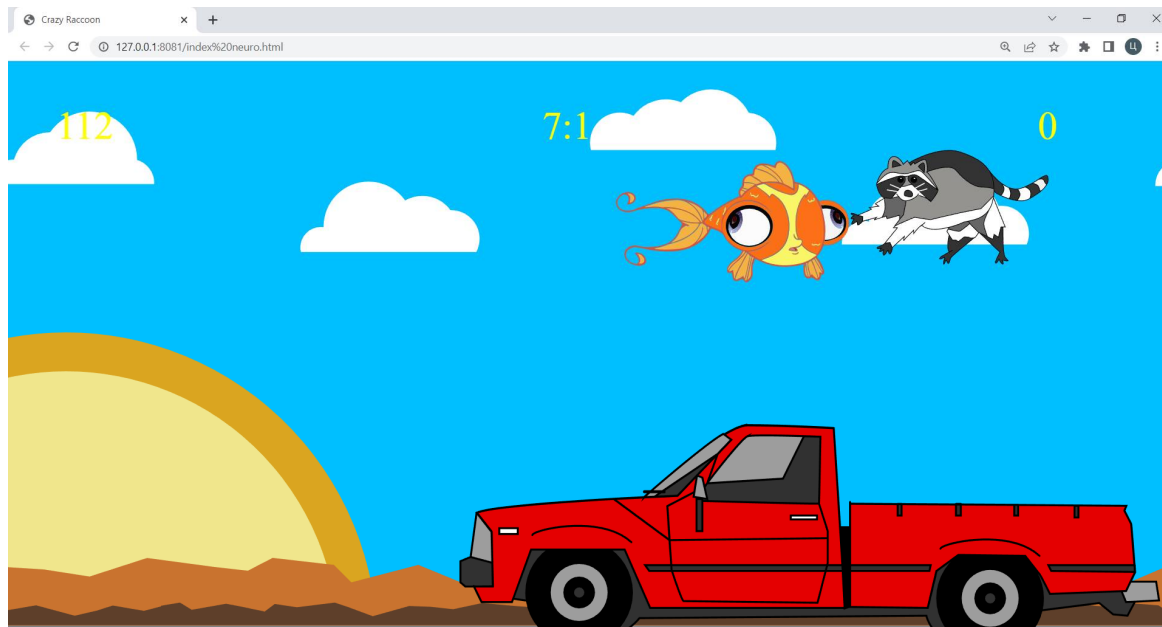


Рис. 4. Геймплей игры «Crazy Raccoon»

Для построения этой игры предложено использовать технологию пользовательских веб-компонентов (Web Components), которая была добавлена в язык JavaScript не так давно [3]. Она позволяет расширить стандартные возможности языка разметки HTML, добавляя к нему механизм отображения пользовательских тегов, также как и его нативных HTML-элементов [4].

Благодаря этой технологии индексный файл игры будет фактически содержать только один пользовательский тег «crazy-raccoon» (рис. 5).

```
<> index.html M X
1  <!DOCTYPE html>
2  <html lang="ru">
3
4  <head>
5      <meta charset="utf-8">
6      <meta name="description" content="Crazy Raccoon">
7      <meta name="viewport" content="width=device-width, initial-scale=1">
8      <title>Crazy Raccoon</title>
9      <link href="css/style.css" rel="stylesheet">
10     <script src="js/snap.svg-min.js"></script>
11     <script type="module" src="js/crazy-raccoon.js"></script>
12 </head>
13
14 <body>
15     <crazy-raccoon></crazy-raccoon>
16 </body>
17
18 </html>
```

Рис. 5. Индексный файл игры «Crazy Raccoon»

Для того чтобы браузер имел возможность отобразить пользовательский тег на странице, его сначала необходимо зарегистрировать с помощью специального метода «define» объекта «CustomElementRegistry» следующим образом:

```
customElements.define("crazy-raccoon", CrazyRaccoon);
```

Этот метод подсказывает браузеру, что за отображение этого тега должен отвечать пользовательский класс «CrazyRaccoon» [5].

Этот класс предложено создать с использованием JavaScript-фреймворка «Lit», разработанного компанией «Google» (рис. 6).



```

1  import { LitElement, html, css } from 'https://unpkg.com/lit@2.0.0/
2  |   index.js?module';
3
4  class CrazyRaccoon extends LitElement {
5  |   static get properties() {
6  > |     return { ...
8  |   }
9  |   }
10 |   static get styles() {
11 > |     return css` ...
44 |   `;
45 |   }
46 |   constructor() {
47 |     super();
48 |     this.version = "1.0.0";
49 |   }
50 |   render() {
51 |     return html`
52 |       <svg id='game' viewBox="0 0 1200 700"></svg>
53 |     `;
54 |   }

```

Рис. 6. Объявление пользовательского класса «CrazyRaccoon»

Фактически в методе «render» этого класса формируется тег компонента «svg», который затем будет отображаться на веб-странице внутри пользовательского тега «crazy-raccoon».

Библиотека «Snap.svg» позволяет сформировать содержимое тега «svg», используя собственный набор методов. Для этого сначала необходимо получить доступ к этому тегу через теневое дерево компонента следующим образом:

```
const s = Snap(this.shadowRoot.getElementById("game"));
```

Содержимое этого тега будет формироваться на основе svg-образов, хранящихся в исходном файле с именем «crazy-raccoon.svg». Этот файл сначала необходимо загрузить с помощью метода «load» библиотеки «Snap.svg»:

```
Snap.load("images/crazy-raccoon.svg", onSVGLoaded);
```

После загрузки его содержимого будет выполнена функция обратного вызова «onSVGLoaded» (рис. 7).

```
function onSVGLoaded(data) {
    truck = data.select("#tGroup");
    lights = data.select("#lights");
    cactus = data.select("#cGroup");
    mountains = data.select("#mGroup");
    mountainRange = data.select("#mrGroup");
    clouds = data.select("#clGroup");
    raccoon = data.select("#rGroup");
    fish = data.select("#fGroup");
}
```

Рис. 7. Формирование svg-тега игры

В ней доступ к svg-образам, хранящихся в файле «crazy-raccoon.svg», осуществляется с помощью метода «select» библиотеки «Snap.svg». Этот метод преобразует эти образы в объекты языка JavaScript, которые затем можно использовать для управления исходными svg-изображениями. Например, эти образы можно добавить к тегу «svg» самой игры с помощью специального метода «append»:

```
s.append(mountains);
s.append(mountainRange);
s.append(cactus);
s.append(clouds);
s.append(fish);
s.append(raccoon);
s.append(truck);
```

Для того чтобы переместить какой-либо svg-образ, теперь достаточно вызвать специальный метод «transform» относительного его JS-объекта. Например, чтобы переместить рыбку влево на 600 пикселей достаточно написать все лишь одну строчку кода:

```
fish.transform('t-600');
```

Также легко можно задать и анимацию svg-объекта. Например, для того чтобы заставить рыбку двигаться горизонтально в течении 5 секунд, достаточно для ее объекта вызвать метод «animate» со следующими параметрами:

```
fish.animate({ transform: 't1400' }, 5000, mina.linear, animateFish2)
```

Первый параметр этого метода определяет вид анимации, второй задает ее продолжительность в миллисекундах, третий параметр определяет временную функцию анимации, а последний – задает функцию, которая должна быть выполнена после завершения этой анимации.

В результате вызова этого метода рыбка будет перемещаться по горизонтали с позиции -600 пикселей до позиции 1400 пикселей в течении 5 секунд с линейной скоростью движения.

Для того чтобы движение рыбки повторялось с определенной периодичностью, в конце ее анимации необходимо задать функцию обратного вызова. Ее можно реализовать следующим образом:

```
function animateFish2() {
    fish.transform('t-600,100');
    fish.animate({transform: 't1400'}, 5000, mina.linear, animateFish2);
}
```

Здесь сначала рыбка перемещается в исходное положение, а затем ее движение повторяется с использованием параметров предыдущей анимации. В результате этого будет создаваться впечатление, что каждый раз с левой стороны будет появляться новая рыбка.

Аналогично задается анимация прыжка енота. Она определяется двумя функциями. Первая функция «animateCoonUp» задает начальную стадию прыжка, когда енот подпрыгивает вверх на высоту 270 пикселей от его начального положения:

```
function animateCoonUp() {  
    raccoon.animate({ transform: 't100,-270' }, 800, mina.backout,  
animateCoonDown);  
}
```

Вторая функция «animateCoonDown» выполняется после окончания первой анимации и определяет параметры падения енота:

```
function animateCoonDown() {  
    raccoon.animate({ transform: 't100,140' }, 400, mina.bounce);  
}
```

Здесь при приземлении енот будет несколько раз подпрыгивать из-за другой выбранной временной функции «mina.bounce».

Анимацию прыжка енота можно запустить нажатием любой клавиши клавиатуры благодаря следующему обработчику:

```
document.addEventListener('keydown', animateCoon);
```

Для нахождения пересечения рыбки с енотом используется метод «setInterval», функция которого выполняется каждые 100 миллисекунд (рис. 8).

В этом методе задается время игры, которое на каждом шаге таймера увеличивается на 1. Это время в десятых долях секунды отображается с помощью JavaScript-объекта, созданного в области svg-рисунка с помощью метода «text»:

```
timeText = s.text(50, 80, '0');
```

Для отображения этого текста размером в 40 пикселей желтым шрифтом достаточно вызвать специальный метод «attr» его объекта со следующими параметрами:

```
timeText.attr({ fill: 'yellow', "font-size": "40px" });
```

Нахождение координат текущей области рыбки и енота осуществляется с помощью метода «getBBox» библиотеки «Snap.svg».

Факт пересечения путей этих объектов определяется методом «isBBoxIntersect». Если области svg-образов пересекаются, то количество пойманных рыб увеличивается на единицу и отображается наряду с пропущенными рыбками в виде текстовой надписи с помощью объекта «pointsText».

```

let gameTime = 0;
let intervalID = setInterval(() => {
    gameTime += 1;
    timeText.attr({ text: Math.round(gameTime), fill: 'yellow', "font-size":
    "40px" });
    fishBox = fish.getBBox();
    raccoonBox = raccoon.getBBox();
    if (raccoon.inAnim().length !== 0) {
        let intersect = Snap.path.isBBoxIntersect(raccoonBox, fishBox);
        if (intersect && !isFish){
            isFish = true;
            caughtFish++;
            pointsText.attr( { text: `${caughtFish}:${missedFish}` });
        }
    }
}, 100)

```

Рис. 8. Проверка пересечения изображения енота с изображением рыбки

В результате этого пользователь может увидеть сколько рыбок поймал енот и сколько он пропустил.

Для большего интереса в левом верхнем углу игры можно вывести текущий рекорд енота (рис. 1), значение которого пользователь должен превзойти.

Из данной работы видно, что использование библиотеки «Snap.svg» позволяет существенно упростить механизм работы с SVG-графикой, уделив все внимание логике игры, а не способам реализации в ней анимационных эффектов.

Библиографический список

1. Антошкин В.А., Морозова С. И. Разработка графических примитивов для игры "Динозавр T-Rex" на основе стандарта SVG // Информатика и прикладная математика. – 2021. – № 27. – С. 10-15. – EDN WBBBRW.
2. Антошкин В.А., Иванов А.И. Методика обучения нейросетей с подкреплением на основе игры «Птица в клетке» // Информатика и прикладная математика / – Рязань: Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина, 2022. – № 28. – С. 9–12. – EDN MPJYLH.
3. Антошкин, В.А., Иванов А.И., Использование библиотеки Keras для обучения нейросетей выполнению простейших логических операций / В. А. Антошкин, А. И. Иванов // Современные технологии в науке и образовании - СТНО-2022 : Сборник трудов V Международного научно-технического форума. В 10-ти томах, Рязань, 02–04 марта 2022 года – Рязань: Рязанский государственный радиотехнический университет, 2022. – С. 34-40. – EDN OHNBND.
4. Антошкин В.А., Щербакова В.И. Использование JavaScript интерфейса прикладного программирования для управления NoSQL базой данных «PouchDB» // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2022: Сборник трудов V Международного научно-технического форума. В 10-ти томах, Рязань, 02–04 марта 2022 года / Под общей редакцией О.В. Миловзорова. Том 4. – Рязань: Рязанский государственный радиотехнический университет, 2022. – С. 24-30. – EDN RORRME.
5. Антошкин В.А., Морозова С.И. Обучение нейронной сети с подкреплением для компьютерной игры «Динозавр T-Rex» // Прикладная математика: современные проблемы математики, информатики и моделирования: Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых, Краснодар, 18–23 апреля 2022 года. – Краснодар: ФГБУ "Российское энергетическое агентство" Минэнерго России Краснодарский ЦНТИ- филиал ФГБУ "РЭА" Минэнерго России, 2022. – С. 296-300. – EDN LYVOIH.

УДК 004.891.2; ГРНТИ 28.23.20

УПРАВЛЕНИЕ ОБОБЩЕННЫМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЭКСПЕРИМЕНТОМ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМОВ ПОИСКА ПОДОБИЯ МНОГОМЕРНЫХ РЯДОВ

Н.В. Беляков, Д.А. Коростелёв

*Брянский государственный технический университет
Российская Федерация, Брянск nikregul@gmail.com*

Аннотация. В работе рассматриваются алгоритмы поиска подобия многомерных рядов для управления ОБЭ (обобщенным вычислительным экспериментом) при корректировке плана его проведения. Рассматриваются ограничения применения алгоритмов в зависимости от размерности ОБЭ.

Ключевые слова: обобщенный вычислительный эксперимент, многомерные данные, управление ОБЭ, планирование ОБЭ.

GENERALIZED COMPUTATIONAL EXPERIMENT MANAGEMENT BASED ON MULTIVARIATE SERIES SIMILARITY SEARCH ALGORITHMS

N.V. Belyakov, D.A. Korostelyov

*Bryansk State Technical University,
Russia, Bryansk, nikregul@gmail.com*

The summary. The paper discusses algorithms for searching for the similarity of multidimensional series for the management of generalized computational experiment with adjusting the implementation plan. Limitations of algorithm application are being studied based on the dimensionality of the GCE.

Keywords: generalized computational experiment, multidimensional data, management of GCE, planning of GCE.

Управление обобщенным вычислительным экспериментом

Обобщенный вычислительный эксперимент (ОБЭ) предполагает многократное решение задачи численного моделирования на множестве заданных моделей путем варьирования значений определяющих параметров. Это дает возможность исследовать влияние комбинаций определяющих параметров на обобщенные показатели результатов вычислительных экспериментов [1].

В связи с переходом от одиночных вычислительных экспериментов к их серии в рамках ОБЭ, объем и размерность данных, которые обрабатываются, значительно увеличиваются. Невозможно моделировать реальные физические процессы, проводя серию вычислительных экспериментов со всеми возможными комбинациями моделей и определяющих параметров, т.к. их бесконечное множество. Поэтому зачастую приходится ограничиваться небольшим количеством комбинаций определяющих параметров в рамках ОБЭ. В этой связи приобретает важное значение задача планирования и управления ОБЭ.

В работе [1] предлагается подход к планированию ОБЭ, который позволяет динамически корректировать план в зависимости от результатов промежуточных этапов, тем самым осуществляя адаптивное управление. План ОБЭ определяется как последовательность вычислительных экспериментов, которые должны быть проведены для исследования многомерного массива значений параметров модели с использованием выбранных методов анализа и интерпретации результатов.

Одним из преимуществ адаптивного управления ОБЭ является определение и исключение из плана проведения ОБЭ неэффективных вычислительных экспериментов, а также детального исследования тех диапазонов определяющих параметров, где требуется подтвердить и уточнить найденные закономерности. Планирование и корректировка может

быть интерактивной за счет привлечения в этот процесс исследователя и предоставляя возможность совместного использования традиционных методов обработки данных и методов их интеллектуального анализа, например, визуально-когнитивной аналитики [2, 3].

Корректировка плана проведения ОВЭ

Под планом ОВЭ понимается последовательность вычислительных экспериментов, подлежащих проведению, для заданного многомерного массива значений определяющих параметров моделирования с выбранными методами анализа и интерпретации результатов вычислительного эксперимента.

Проведение ОВЭ является очень трудоемким, поэтому необходимо как можно раньше выявлять или добавлять в план потенциально более эффективные одиночные вычислительные эксперименты - их проведение в большей степени влияет на результативность всего ОВЭ.

Один из способов поиска эффективных вычислительных экспериментов - нахождение схожих траекторий и множеств комбинаций определяющих параметров в планах проведения других ОВЭ. Возможность такого поиска осуществляется за счет поддержки накопления и функционирования специализированного хранилища ОВЭ [4]. При сопоставлении параметров вычислительных экспериментов между разными ОВЭ можно попытаться определить, какие вычислительные эксперименты могут оказывать больший эффект на определение текущего состояния ОВЭ, что даст возможность понять, какие вычислительные эксперименты следует проводить в первую очередь, а какие можно провести на более поздних этапах (или в последствии и вовсе отказаться от их проведения). Руководство дальнейшим проведением ОВЭ становится более обоснованным при нахождении схожего плана.

Таким образом можно отметить, что одной из важных задач в управлении ОВЭ является поиск подобных среди уже проведенных в хранилище ОВЭ. Для успешного выполнения этой задачи необходимо удовлетворить определенные методологические и программные требования: выбрать подходящие методы, представления и структуры хранения данных, а также алгоритмы для их обработки [3]. Для нахождения похожих сценариев проведения ОВЭ в разных областях знаний, также необходимо решить задачу поиска сходства планов ОВЭ.

План ОВЭ можно определить, как совокупность серии проведенных (A) и планируемых (B) вычислительных экспериментов на множестве моделей M : Каждая из серий вычислительных экспериментов A и B упорядочена.

Формально план ОВЭ можно представить в виде: $P = \langle A_i, B_j \rangle$, $P = \langle A_i, B_j \rangle$, где A_i - описание проведенного вычислительного эксперимента, а B_j - описание планируемого к проведению вычислительного эксперимента, $1 \leq i \leq C < j \leq D$, где C - количество проведенных вычислительных экспериментов, а D - общее кол-во проведенных и планируемых вычислительных экспериментов. Описание проведенного вычислительного эксперимента включает как значения определяющих параметров, так и результаты расчета обобщенных показателей, т.е. $A_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,N}, r_{i,1}, r_{i,2}, \dots, r_{i,K}\}$, где N - кол-во определяющих параметров, а K - кол-во обобщенных показателей. Описание планируемого вычислительного эксперимента включает только значения определяющих параметров, т.е. $B_j = \{a_{j,1}, a_{j,2}, \dots, a_{j,N}\}$.

Применительно к задаче поиска подобия ОВЭ можно ограничиться только подмножеством A проведенных вычислительных экспериментов плана P .

Подобие ОВЭ

Текущий этап вычисления ОВЭ можно представлять в различных видах, например, в результатах проведения ОВЭ - обобщенных показателях результативности. Также можно представить в виде состояния ОВЭ. Представление в виде состояния имеет ряд преимуществ - если проводить вычислительные эксперименты в разном порядке, то состояние ОВЭ останется неизменным. Однако состояние ОВЭ очень тяжело вычисляется.

Будем считать, что ОВЭ можно назвать схожими, если схожа часть их плана проведения, то есть результаты проведения вычислительных экспериментов имеют схожее поведение, то есть одинаковую логику изменений.

Таким образом задача поиска схожих планов проведения сводится к задаче поиска подобия в многомерных рядах.

Методы поиска подобия многомерных рядов

Проанализируем методы поиска подобия в многомерных рядах, а также выявим их достоинства и недостатки.

Различные ОВЭ могут иметь различное количество результирующих параметров, различное влияние этих параметров на результативность вычислительного эксперимента. Это не позволяет напрямую работать с параметрическими методами поиска подобия многомерных выборок.

Рассмотрим ряд статистических методов, с помощью которых можно оценить сходство многомерных выборок данных, например, U-критерий Манна-Уитни. Это непараметрический тест, который сравнивает медианы двух массивов. Он основан на рангах элементов в двух массивах и не предполагает какого-либо конкретного распределения данных. Непараметрические индексы сходства полезны, когда данные не соответствуют предположениям параметрических тестов и когда трудно вычислить точные расстояния или сходства между элементами массивов [5].

При использовании рассчитанного состояния вычислительного эксперимента можно использовать метрики расстояния и связанные с ними индексы, например, косинусное сходство [6] (мера косинуса угла между двумя массивами, когда они рассматриваются как векторы в многомерном пространстве) и индекс Жаккара [6].

Таким образом искать подобные вычислительные эксперименты можно непараметрическими методами или через оценку состояния. В общем случае необходимо применять непараметрические методы, однако задачу можно привести к случаю, где можно будет использовать классические метрики расстояния.

Например, при поиске ОВЭ с таким же количеством определяющих параметров или обобщенных показателей можно использовать следующий обобщенный алгоритм (рис. 1).

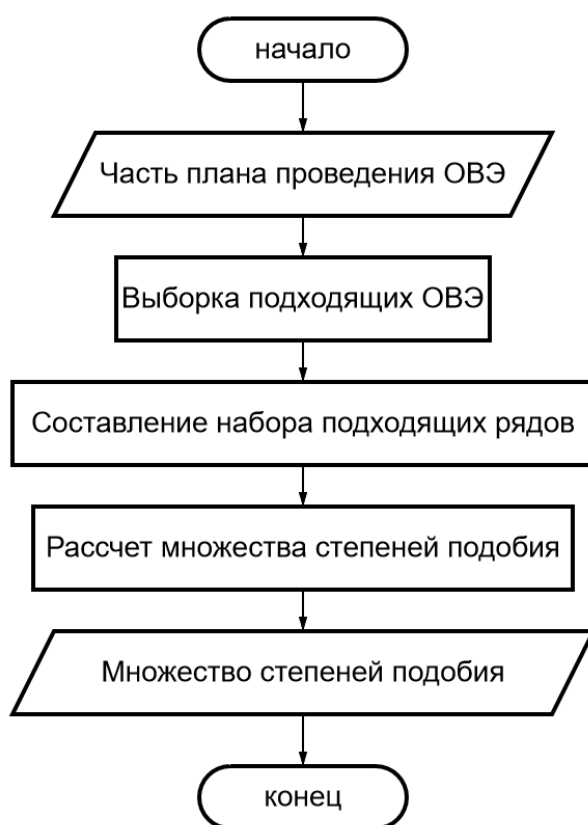


Рис. 1. Обобщенный алгоритм поиска подобия ОВЭ

В качестве входных данных - часть плана проведения ОВЭ, из которого можно узнать количество определяющих параметров и обобщенных показателей, а также данные о них (диапазон, нормирование и т.д.).

Рассмотрим алгоритм, если поиск подобия будет проводится по определяющим параметрам.

1. Из хранилища данных ОВЭ выберем те ОВЭ, в которых количество входных параметров совпадает с искомым;

2. Настроим глубину поиска, то есть на сколько элементов может отличаться искомое множество от заданного. Пример: заданное множество состоит из 5 вычислительных экспериментов. Будем искать подобные вычислительные эксперименты с глубиной 2. Они могут состоять от 3 до 7 элементов. Получим все комбинации рядов определяющих параметров ОВЭ;

3. Для каждого элемента данного множества рассчитаем степень подобия. Получим рассчитанное множество степеней подобия.

4. На основе данного множества можно сделать предложение альтернативы следующего вычислительного эксперимента на основе ранжирования данных подобных ОВЭ. Имея сопоставление между заданным и найденным ОВЭ, корректируем определяющие параметры и предлагаем альтернативы.

Данный алгоритм позволяет управлять ОВЭ как автоматически, так и при помощи эксперта. При автоматическом управлении необходимо руководствоваться планом, степень подобия которого наибольшая. При экспертном управлении эксперт сам может принять решение о дальнейшем проведении вычислительных экспериментов.

Обобщенный алгоритм поиска подобия при использовании обобщенных показателей ОВЭ:

– построение гипотезы о сходстве\различии вычислительных экспериментов;
 – проверка данной гипотезы с помощью непараметрических критериев;
 – если гипотеза не отвергается, то имеет смысл продолжать сравнение, например, использовать G-критерий знаков.

Иногда существует возможность использовать параметрические метрики. Например, при одинаковом количестве определяющих параметров и обобщенных показателей. В таких случаях можно использовать классические методы вычисления подобия выборок.

Рассмотрим пример.

Хранилище данных имеет ряды вида табл. 1.

Таблица 1. Выборка из хранилища данных для задачи обтекания конуса под углом атаки при вариации угла атаки, угла полураствора конуса и числа Маха набегающего потока

Результирующий параметр – норма L1			Результирующий параметр – норма L2		
rCF	pCF	sF	rCF	pCF	sF
0,017438	0,019238	0,030632	0,026174	0,032426	0,046394
0,017538	0,019005	0,040696	0,030636	0,037702	0,067424
0,030313	0,034870	0,059381	0,046490	0,058198	0,091404
0,030541	0,033079	0,073547	0,050298	0,060187	0,116237
0,031905	0,032515	0,081784	0,060519	0,069622	0,145829
0,038515	0,039105	0,080534	0,060614	0,069128	0,123338
0,039625	0,042500	0,097085	0,065373	0,075543	0,149785

ОВЭ, для которого будем искать подобие имеет следующие проведенные вычислительные эксперименты (табл. 2).

Таблица 2. Выборка данных из текущего вычислительного эксперимента

Результирующий параметр – норма P1			Результирующий параметр – норма P2		
aCF	bCF	cF	aCF	bCF	cF
0,170138	0,159365	0,326148	0,242904	0,231811	0,407482
0,180028	0,151521	0,321466	0,238585	0,211191	0,376159
0,185029	0,168038	0,341536	0,251868	0,230660	0,405215
0,201782	0,176265	0,339543	0,294566	0,266854	0,432661

В рассматриваемой ситуации сравнение можно провести с помощью классических метрик, таких как косинусное сходство, Евклидово расстояние или с помощью индексов, которые используют метрики расстояний.

Заключение

В данной работе были рассмотрены алгоритмы поиска подобия многомерных рядов. Были выявлены ограничения, из-за которых в общем случае необходимо использовать непараметрические критерии и метрики, был составлен обобщенный алгоритм поиска подобия ОВЭ. В частном случае, при поиске с определенным количеством критериев можно использовать классические методы вычисления подобия многомерных рядов.

При нахождении подобия ОВЭ исследователь, опираясь на найденный план, имеет больше обоснований к корректировке плана исходного ОВЭ. Это позволяет управлять ОВЭ более эффективно.

Библиографический список

1. Zakharova A, Korostelyov D, Podvesovskii A. Evaluating State Effectiveness in Control Model of a Generalized Computational Experiment. In: A.G. Kravets et. al. (ed.): Creativity in Intelligent Technologies and Data Science. CIT&DS 2021. Communications in Computer and Information Science, Vol.1448. Springer, Cham, 2021. P.207-222. DOI: 10.1007/978-3-030-87034-8_16.
2. Bondarev AE, Galaktionov VA. Generalized Computational Experiment and Visual Analysis of Multidimensional Data. Scientific Visualization. 2019; 11(4): 102-114. DOI: 10.26583/sv.11.4.09.
3. Zakharova AA, Korostelyov DA, Podvesovskii AG, Galaktionov VA. Methods of Constructing a Visual Map of Generalized Computational Experiment. Scientific Visualization. 2021; 13(4): 76-92. DOI: 10.26583/sv.13.4.07.
4. Подвесовский А.Г., Коростелёв Д.А., Лупачёв Е.А., Беляков Н.В. Построение хранилища обобщённых вычислительных экспериментов на основе онтологического подхода // Онтология проектирования. 2022. Т.12, №1(43). С.41-56. DOI: 10.18287/2223-9537-2022-12-1-41-56.
5. Seok-Lyong Lee, Seok-Ju Chun, Deok-Hwan Kim, Ju-Hong Lee and Chin-Wan Chung, "Similarity search for multidimensional data sequences," Proceedings of 16th International Conference on Data Engineering (Cat. No.00CB37073), San Diego, CA, USA, 2000, pp. 599-608, doi: 10.1109/ICDE.2000.839473.
6. Baikousi, Eftychia & Rogkakos, Georgios & Vassiliadis, Panos. (2011). Similarity measures for multidimensional data. 171-182. 10.1109/ICDE.2011.5767869.

УДК 621.396; ГРНТИ 47.47

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ ОБРАБОТКА ТЕКСТОВОЙ ИНФОРМАЦИИ. ТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.

Я.А. Артемов

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, yaroslav.artemov1@gmail.com*

Аннотация. В работе рассматриваются существующие методы интеллектуального анализа текстов. Описывается методика тематического моделирования, а также представлена программная реализация решения задачи кластеризации.

Ключевые слова: интеллектуальная обработка текста, тематика текста, предобработка данных, эмбединг.

INTELLIGENT TEXT INFORMATION PROCESSING. THEMATIC MODELING.

Y.A. Artemov

*Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, yaroslav.artemov1@gmail.com*

The summary. The paper considers the existing methods of intelligent text information processing. The technique of thematic modeling is described and the software implementation to solve the clustering problem is presented.

Keywords: intelligent text processing, text themes, data preprocessing, embedding.

В настоящее время количество информации, производимой человечеством, растет в экспоненциальной прогрессии и в мире наблюдается потребность в новых методах анализа информации разного вида, поскольку существующие алгоритмы уже не могут справиться с требуемым объёмом информации. Актуальность научного исследования обусловлена необходимостью обработки огромного количества текстовой информации.

Целью данной статьи является рассмотрение методов тематического моделирования и создания программной реализации для решения задачи кластеризации корпуса текстов на темы.

В ходе работы над данной статьёй были применены такие теоретические методы исследования как: анализ, классификация, аналогия, абстрагирование и моделирование.

Теоретическая часть

Поскольку необходимость анализа большого количества информации возникает довольно часто, были созданы различные методы обработки информации, такие как алгоритмы интеллектуального анализа текста, основанные на предсказании слова по его окружению и обратный этому алгоритм нахождения окружения по слову. Такой подход к анализу текстовой информации был предложен в 2013 год. Он основан на гипотезе совпадения смысла слова в определённом контексте. Ярче всего эту гипотезу иллюстрируют фразеологизмы, ведь слова, входящие в их состав, нельзя разделить без потери смысла. Но эта гипотеза относится и к другим словам. Вся наша речь несёт смысловую нагрузку, а слова в ней сочетаются. Например, фразы “сливочное масло” и “светлое небо” звучат понятно и органично, в отличие от фраз “сливочное небо” и “масляный свет”. Таким образом, имея данные о близости слов можно предсказать следующее слово. При помощи усреднения векторов окружающих слов можно найти вектор, близкий вектору слова, которое будет идти дальше. Усреднение может быть выполнено при помощи функции косинусного расстояния окружающих векторов. Описанный метод анализа текста называется Word2Vec. Но он опирается исключительно на слова. Существует 3 метода расширяющих его функционал. Первый метод опирается на смысл предложения, второй опирается на общую тематику абзацев, своего рода повышая таким образом уровень абстракции, а следующий рассматривает уже текст, как единицу классификации. Рассмотрим данный подход подробнее.

Следуя подходу Text2Vec, в случае, когда мы не имеем подготовленные данные, нам необходимо проанализировать слова, затем расширить анализ до отношений между абзацами и наконец перейти к текстам. Данный метод анализа требует от нас 4 раза проанализировать каждый текст, чтобы получить данные о нём. Однако существует другой подход к анализу.

Пусть мы проанализировали предложения в тексте, найдя их векторное отображение. Таким образом мы нашли своего рода главную мысль предложения, его топик. Теперь, имея эти топики, мы можем разделить тексты по смыслу на темы, находя похожие топики.

Компания Google в 2018 году представила модель нейронной сети BERT, которая совершила революционный скачок в области анализа текстовой информации. В настоящее время у модели BERT существует много аналогов. Сама модель была также улучшена. Были созданы её модификации, специализированные для решения разных задач, например модель RoBERTa или модель DistilBERT. Исходная модель BERT при этом до сих пор остаётся актуальной и полезной из-за своей универсальности. Она применяется для решения задач классификации текстовой информации, генерации новых текста на основе примеров, суммаризации текста с целью выделения его основной мысли и т.д. Также модель BERT можно использовать по частям, например, не решать с её помощью задачи NLP, а получать векторные представления текстов и слов - эмбединги, которые в дальнейшем можно обрабатывать иным способом, отличным от методов работы с моделью BERT, и решать новые задачи.

Практическая часть

Данная технология интеллектуальной обработки информации может быть применена для решения задачи кластеризации. Для того, чтобы продемонстрировать решение задачи кластеризации используем средства языка Python. Предположим, что перед нами стоит задача распределить проанализировать тексты по некоторой тематике, о у нас есть корпус из

множества текстов, которые имеют свои топики, но не имеют темы. Разделение текстов этого корпуса по тематикам для дальнейшего анализа и есть задача кластеризации.

Сначала необходимо установить все нужные для работы программы библиотеки:

```
!pip install transformers
!pip install pyyaml==5.4.1

import numpy as np
import pandas as pd
import torch
import os
import json
import plotly.express as px

from tqdm import tqdm
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.metrics import roc_auc_score
from sklearn.decomposition import PCA
from sklearn.cluster import AgglomerativeClustering
from torch.utils.data import Dataset, DataLoader
from transformers import BertModel, BertTokenizer
```

Затем нужно подготовить анализируемые данные, сформировав корпус текстов:

```
df = pd.read_csv('/content/lenta-ru-news.csv', low_memory=False)
df['topic'].unique()
corpus = df.loc[df['topic']=='Наука и техника', 'text'].to_numpy()
corpus = corpus[:10000]
corpus[0]
```

После того, как мы получили наш корпус текстов, нам необходимо совместить тексты и их топики:

```
with open("/content/rubert_cased_L-12_H-768_A-12_pt/bert_config.json", "r") as read_file,
open("/content/rubert_cased_L-12_H-768_A-12_pt/config.json", "w") as conf:
    file = json.load(read_file)
    conf.write(json.dumps(file))
!rm /content/rubert_cased_L-12_H-768_A-12_pt/bert_config.json
```

Далее создаём модель и объявляем основной класс и методы:

```
tokenizer = BertTokenizer.from_pretrained('rubert_cased_L-12_H-768_A-12_pt')
model = BertModel.from_pretrained('rubert_cased_L-12_H-768_A-12_pt',
put_hidden_states = True)

class CustomDataset(Dataset):

    def __init__(self, X):
        self.text = X

    def tokenize(self, text):
        return tokenizer(text, return_tensors='pt', padding='max_length', truncation=True,
max_length=150)

    def __len__(self):
        return self.text.shape[0]
```

```

def __getitem__(self, index):
    output = self.text[index]
    output = self.tokenize(output)
    return {k: v.reshape(-1) for k, v in output.items()}

eval_ds = CustomDataset(corpus)
eval_dataloader = DataLoader(eval_ds, batch_size=10)

def mean_pooling(model_output, attention_mask):
    token_embeddings = model_output['last_hidden_state']
    input_mask_expanded = attention_mask.unsqueeze(-
1).expand(token_embeddings.size()).float()
    sum_embeddings = torch.sum(token_embeddings * input_mask_expanded, 1)
    sum_mask = torch.clamp(input_mask_expanded.sum(1), min=1e-9)
    return sum_embeddings / sum_mask

Настраиваем модель нейронной сети BERT для работы с нашим корпусом текстов:

device = torch.device("cuda") if torch.cuda.is_available() else torch.device("cpu")
model.to(device)
model.eval()

embeddings = torch.Tensor().to(device)

with torch.no_grad():
    for n_batch, batch in enumerate(tqdm(eval_dataloader)):
        batch = {k: v.to(device) for k, v in batch.items()}
        outputs = model(**batch)
        embeddings = torch.cat([embeddings, mean_pooling(outputs, batch['attention_mask'])])
    embeddings = embeddings.cpu().numpy()

```

Поскольку решение задачи кластеризации требует очень много времени, для упрощения вычислений уменьшим количество топиков с 768 до 15 и начинаем решение задачи кластеризации. При этом, задаём пороговое значение кластера и выбираем функцию для вычисления центров кластеров и функцию для вычисления метрики. В данном случае применим функцию вычисления центров кластеров как среднее значение координат элементов кластера, а функцию вычисления метрики как косинусное расстояние:

```

ca = PCA(n_components=15, random_state=42)
emb_15d = pca.fit_transform(embeddings)
clustering = AgglomerativeClustering(n_clusters=None, distance_threshold=0.6, affinity='cosine', linkage='average').fit(emb_15d)
pca = PCA(n_components=2, random_state=42)
emb_2d = pd.DataFrame(pca.fit_transform(embeddings), columns=['x1', 'x2'])
emb_2d['label'] = clustering.labels_
emb_2d['label'].nunique()

```

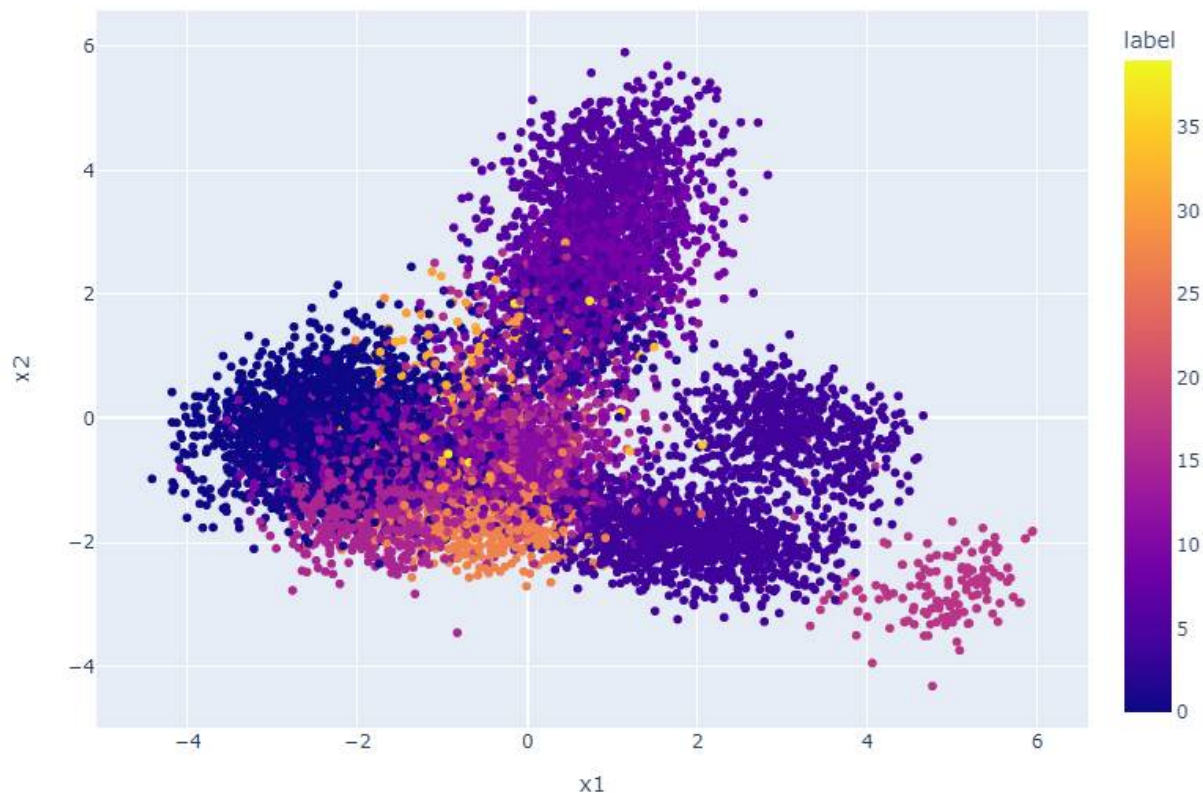
Отобразим полученные кластеры на плоскости:

```

fig = px.scatter(emb_2d, x='x1', y='x2', color='label', width=800, height=600)
fig.show()

```

В результате решения задачи кластеризации у нас получилось разделить имеющийся корпус текстов на 40 кластеров. Расположив все эти тексты на плоскости и разделив на кластеры, получим следующий результат:



Исходя из графика видно, что преобладает 7 основных кластеров, а остальные представлены меньшим числом элементов.

Таким образом можно отобрать нужные нам тексты по определенной тематике для дальнейшего анализа. Мы разделили корпус текстов на некоторое количество групп. Задачу кластеризации можно считать решенной.

Библиографический список

1. Collobert R. et al. Natural language processing (almost) from scratch //Journal of Machine Learning Research. – 2011. – Т. 12. – №. Aug. – С. 2493-2537
2. Trofimov I. V. Person name recognition in news articles based on the persons-1000/1111-F collections //16th All-Russian Scientific Conference Digital Libraries: Advanced Methods and Technologies, Digital Collection, RCDL. – 2014. – С. 217- 221.
3. Tomas Mikolov, Kai Chen, Greg Corrado, and Jeffrey Dean. Efficient estimation of word representations in vector space. CoRR, abs/1301.3781,
4. Tomas Mikolov, Ilya Sutskever, Kai Chen, Gregory S. Corrado, and Jeffrey Dean. Distributed representations of words and phrases and their compositionality. In Advances in Neural Information Processing Systems 26: 27th Annual Conference on Neural Information Processing Systems 2013. Proceedings of a meeting held December 5-8, 2013, Lake Tahoe, Nevada, United States, pages 3111–3119, 2013.

УДК 628.9.04; ГРНТИ 29.31.47

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ ЭЛЛИПСОВ МАКАДАМА С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИ ЦВЕТОВЫХ ОЩУЩЕНИЙ БЕЛЯЕВОЙ-МАТВЕЕВА

В.П. Будаков, Р.А. Делян

*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
Российская Федерация, Москва, ruzana.delyan@gmail.com*

Аннотация. В работе рассмотрена модель цветковых ощущений, разработанная сотрудниками МЭИ Беляевой Н. М. и Матвеевым А. Б., и исследование изменений эллипсов Макадама в широком диапазоне яркостей и цветностей объекта наблюдения и фона.

Ключевые слова: эллипсы Макадама, цветовой порог, светодиоды, бинирование.

INVESTIGATION OF CHANGES IN MACADAM ELLIPSES USING THE BELYAEVA-MATVEEVA COLOR SENSATION MODEL

V.P. Budakov, R.A. Delyan

*National Research University "MPEI",
Russian Federation, Moscow, ruzana.delyan@gmail.com*

Annotation. The paper considers a model of color sensations developed by the MPEI collaborators Belyaeva N. M. and Matveev A. B., and the study of changes in the MacAdam ellipses in a wide range of brightness and chromaticity of the object of observation and background.

Keywords: Macadam ellipses, color threshold, LEDs, binning.

Введение

Появление новых источников света – светодиодов (СД), повышение уровней освещенности рабочей поверхности, усложнение зрительных работ в современных условиях работы ставят перед светотехниками новые задачи, связанные с повышением качества световой среды производственных, рабочих помещений. К числу таких задач можно отнести, в том числе и обеспечение пространственную однородность излучения СД.

Материалы и методы

Одним из преимуществ белых СД, которые получили наибольшее распространение, является широкий диапазон коррелированных цветковых температур (Т_{цв}). Для обеспечения цветовой однородности излучения световых приборов (СП) нормативными документами вводятся ограничения либо только на разброс Т_{цв} [1], либо на разброс Т_{цв} и разброс координат цветности x , y [2]. Нормирование разбросов цветности СД проводится по четырехугольникам, в центре которого находится заданная Т_{цв}, при этом длина сторон этого четырехугольника определена таким образом, чтобы в него вписывался 7-ступенчатый эллипс Макадама [3], представленных на рисунке 1.

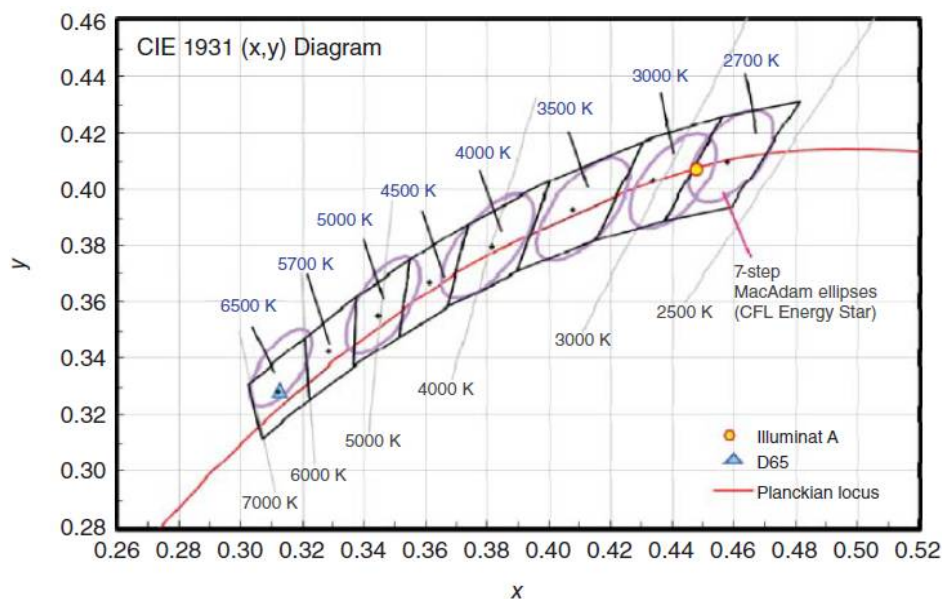


Рис.1. Изображение допустимых разбросов в четырехугольниках и эллипсах МакАдама

Однако, даже при выполнении требований по разбросу координат цветности x , y в рамках указанных четырехугольников возможно наблюдать отчетливое различие в цветности ИС [3]. В связи с этим ведущие производители СД разрабатывают свои сетки допустимых разбросов цветности СД, обеспечивая соответствие своей продукции с помощи процедуры биннирования СД. За счет сужения площади допустимых разбросов для отдельных бинов производители СД декларируют цветовую однородность СП, с применением указанных бинов (рис. 2).

График цветных координат МКО 1931

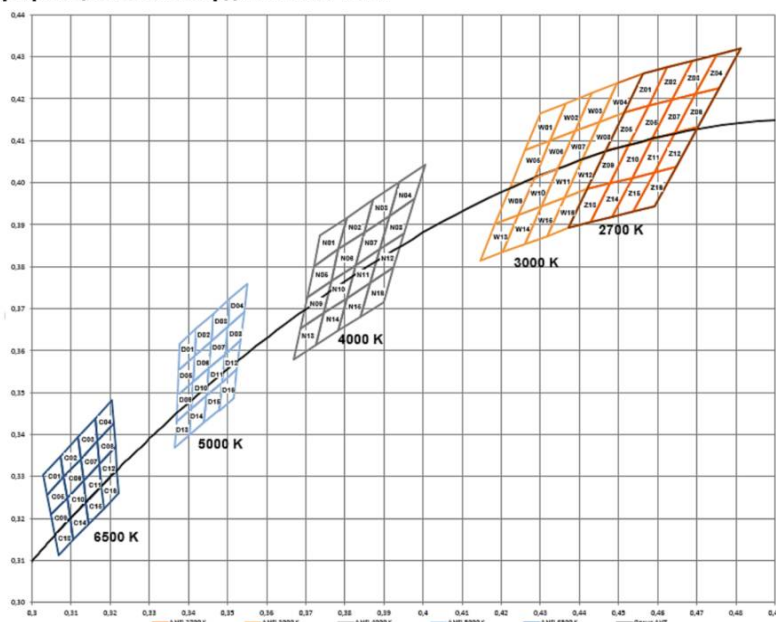


Рис. 2. Сетка биннирования СД компании МСК [4]

Измерения цветовых порогов МакАдама, на которых основаны современные сетки биннирования, проводились при постоянной яркости полей сравнения, равной $48 \text{ кд} \cdot \text{м}^{-2}$ на фоне с яркостью $24 \text{ кд} \cdot \text{м}^{-2}$, цветность которого соответствовала стандартному источнику

С[5]. Данные условия по яркости объекта не соответствуют реальным яркостям СД и СД светильников, яркости которых составляют тысячи $\text{кд} \cdot \text{м}^{-2}$.

Представляет интерес исследовать изменение эллипсов МакАдама в широком диапазоне яркостей фона и объекта, а также оценить влияние цветности фона и объекта.

Для исследования влияния хроматической и яркостной адаптации на изменение цветовых порогов была использована равноконтрастная модель цветовых ощущений на основе физиологической системы КЗС, разработанной Беляевой-Матвеевым на кафедре Светотехника, МЭИ в 1964 г.

Выбор данных двух моделей был продиктован следующими причинами: модели CIELAB и CIELUV, также рекомендованные МКО обладают недостатками [6]:

- низкая точность модели хроматической адаптации;
- отсутствие учета яркостного влияния просматриваемых объектов;
- отсутствие механизма моделирования когнитивных эффектов, таких, как когнитивное обесцвечивание осветителя;
- в CIELAB и CIELUV не рассчитываются корреляты с абсолютными атрибутами восприятия, такими, как субъективная яркость и полнота цвета.

Помимо этого преимуществами модели цветовых ощущений являются [5]:

- учет влияния фона на процессы адаптации и индукции. В расчете цветовых ощущений v_m учитываются процессы адаптации и индукции зрительного процесса с учетом влияния фона.

$$v_m = \frac{A_m \cdot m'_0}{\alpha_{\omega} \cdot m'_0 + m'_{\phi}} + C_m \cdot \left(\frac{L_0}{L} \right)^p \quad \text{где } v_m = \frac{A_m \cdot m'_0}{\alpha_{\omega} \cdot m'_0 + m'_{\phi}}$$

$$m'_{\omega} = \left[t_m \cdot \frac{L_0}{L_{\phi}} \cdot m'_0 + (1 - t_m \cdot \frac{L_0}{L_{\phi}}) \cdot m'_{\phi} \right] \left(\frac{L_0}{L_{\phi}} \right)^n \quad \text{- расчет влияния адаптации}$$

L_0, L_{ϕ} - яркости объекта и фона

m_0, m_{ϕ} - координаты цветов объекта и фона в физиологической системе КЗС

A_m, C_m, t_m - постоянные модели

- применение в основе модели физиологических кривых чувствительностей трех цветовоспринимающих рецепторов, в том числе благодаря чему модель позволяет с высокой точностью определить закономерности цветового зрения: изменение цветового порога по цветовому тону для однородных излучений, изменение насыщенности в функции длины волны, явление Бецольда-Брюкке, эффект Бецольда-Эбнея, эффект Кольрауша;

- высокая степень равноконтрастности цветового графика системы, которая определяется степенью приближенности преобразованных эллипсов МакАдама к окружности. На рисунке 3 представлены преобразованные пороговые эллипсы МакАдама на равноконтрастном графике в пространстве $uvkvzv$

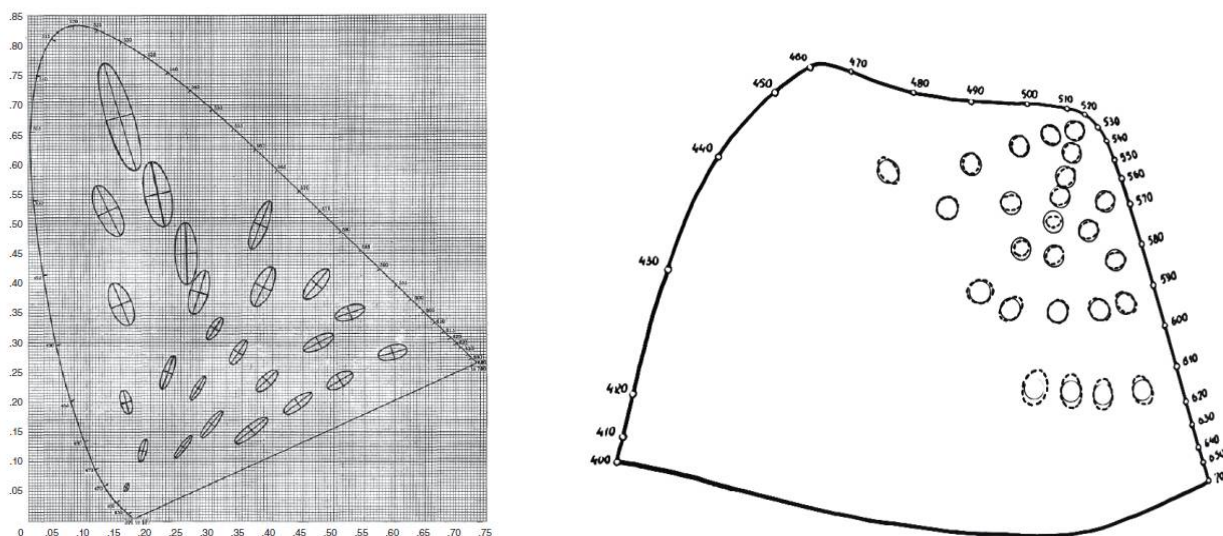


Рис. 3. Преобразованные пороговые эллипсы МакАдама из пространства МКО1931 г. x, y в пространство uvz

Модель цветовых ощущений uvz не применима к ситуациям, при которых значим палочковый компонент зрения (сумеречное и ночное зрение), или к ситуациям с экстремально высокими уровнями яркости, способными вызвать колбочковое ослепление [6].

Исследование изменений эллипсов МакАдама проводилось в следующих условиях (Таблица 1):

Таблица 1 – Условия наблюдений

	Исследование №1 (яркостная адаптация)	Исследование №2 (цветовая адаптация)	Исследование №3
Лобъекта/ Lфона	0,1 – 10	10	10
Тцв объекта	6 500 К	2 700 К	6 500 К
Тцв фона	6774 К (ИС типа С)	2 700 – 6 500 К	2 700 – 6 500 К

Результаты

Проведенные оценка изменений эллипсов МакАдама с помощью моделирования в программной среде MatLab показала следующие закономерности:

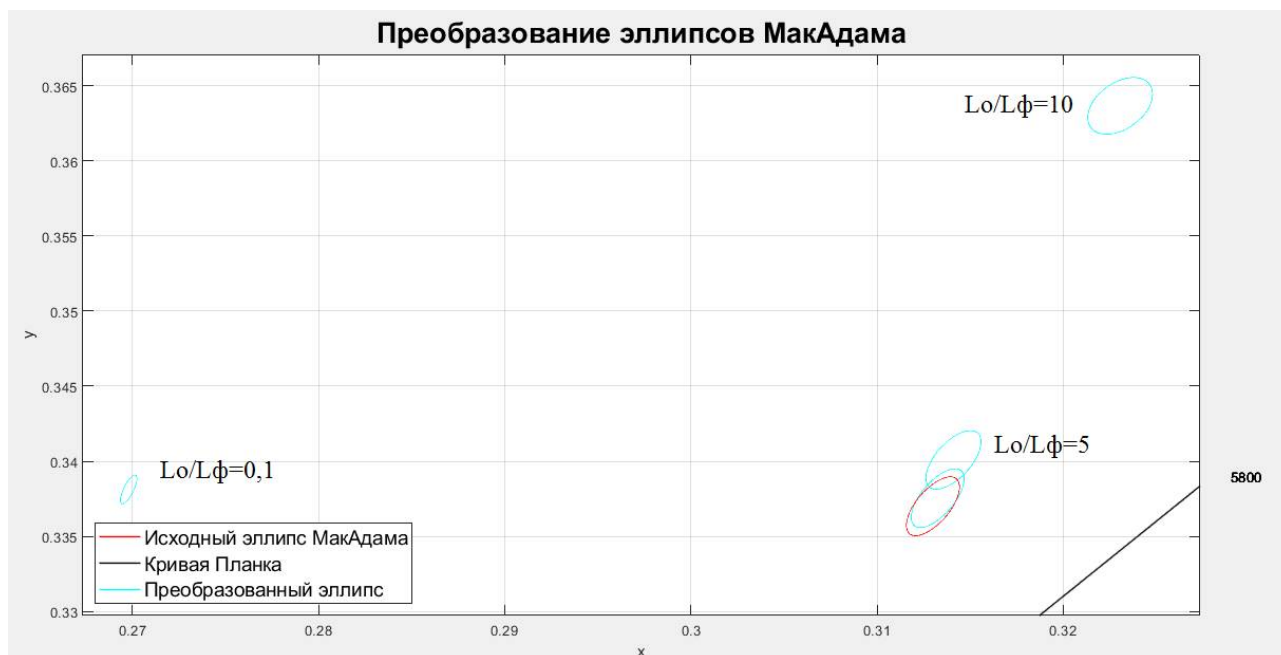


Рис. 4. Изменение эллипсов МакАдама по модели укзвс при условиях Исследования 1

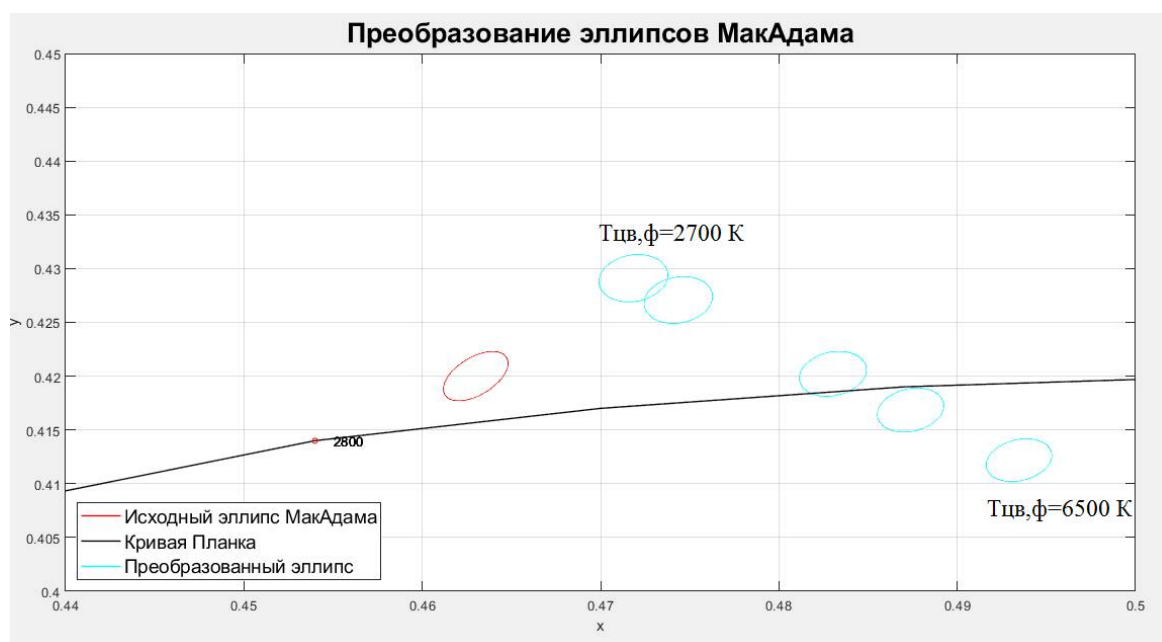


Рис. 5. Изменение эллипсов МакАдама по модели укзвс при условиях Исследования 2

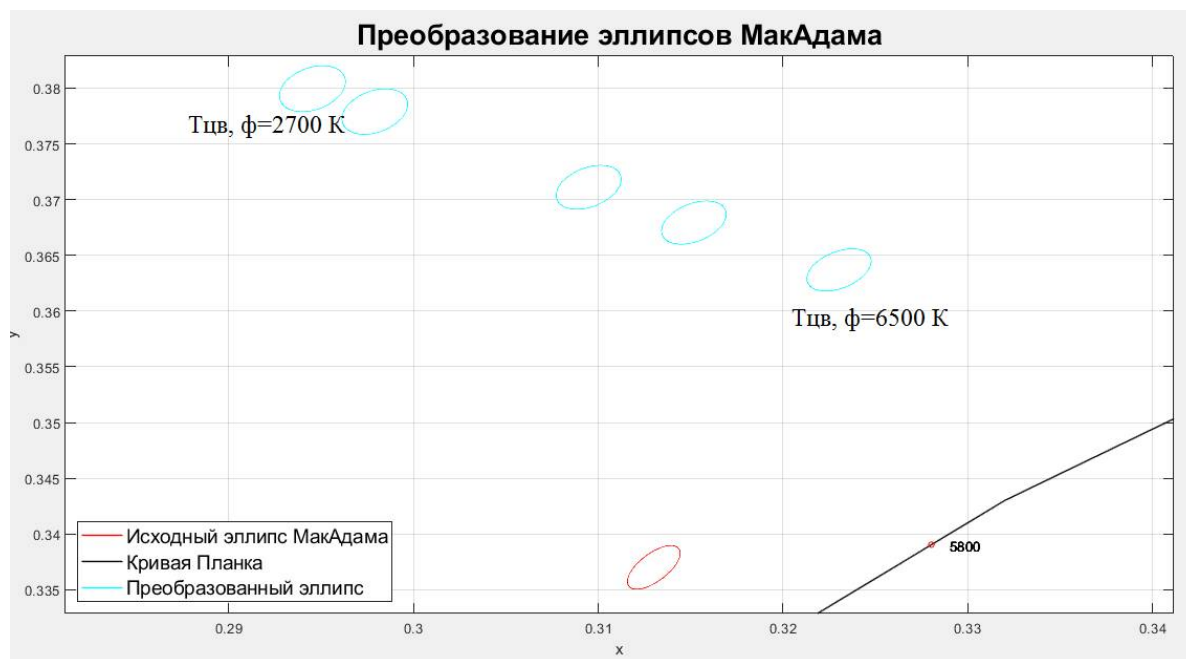


Рис. 6. Изменение эллипсов МакАдама по модели укзвс при условиях Исследования 3

Обсуждение

Полученные результаты демонстрируют некоторые закономерности:

1. При яркостной адаптации увеличение относительной яркости в рассмотренных границах $0,1 \leq L_{\text{объекта}}/L_{\text{фона}} \leq 10$ приводит к смещению координат цветности центров эллипсов МакАдама в область больших Тцв. При этом в диапазоне изменений $L_{\text{объекта}}/L_{\text{фона}} \leq 5$ смещение находится вблизи исходного эллипса МакАдама. при увеличении соотношения яркостей наблюдается резкий скачок цветового порога. Также наблюдается заметное изменение формы эллипсов при изменении соотношения яркости.

2. При цветовой адаптации наблюдается значительное смещение координат цветности центра эллипсов МакАдама при изменении Тцв фона с 2700К к 6500 К.

Выводы

Аналогично модели цветового восприятия CIECAM02, модель цветовых ощущений укзвс демонстрирует изменение эллипсов МакАдама по расположению и форме на графике МКО 1931 г. в зависимости от яркости и цветности объекта/фона. Представляет интерес дальнейшие исследования изменения цветовых порогов с учетом адаптации и сравнения, полученных результатов по двум моделям цветового восприятия CIECAM02 и укзвс Беляевой-Матвеева. Для определения какая из моделей демонстрирует более точный результат влияния условий наблюдений на цветовые пороги необходимо провести эксперимент.

Библиографический список

1. ГОСТ 54350-2015
2. ГОСТ 38419-2021
3. LED Lighting, Technology and Perception. T. Q. Khanh, P. Bodrogi, Q. T. Vinh, and H. Winkler, Wiley-VCH, 2015, p. 299-301.
4. CLP-2835F2E-01B - DS - v2.1.pdf - Google Диск
5. Н. М. Беляева, Построение равноконтрастной системы для определения цветовых соотношений в архитектурных интерьерах, кандидатская диссертация, 1972 г., Москва
6. M.D. Fairchild, Color Appearance Models, 2nd. ed., Wiley, Chichester, 2005

УДК УДК 004.932; ГРНТИ 28.23.15

АНАЛИЗ МЕТОДОВ АВТОМАТИЧЕСКОГО РАСПОЗНАВАНИЯ АВТОМОБИЛЬНЫХ НОМЕРОВ НА ОСНОВЕ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В ДОЖДЛИВУЮ ПОГОДУ

Т. Горелова, Д.А. Коростелёв

*Брянский государственный технический университет,
Российская Федерация, Брянск, tatiana-gorelova32br@yandex.ru*

Аннотация. В работе рассматриваются методы автоматического распознавания автомобильных номеров в дождливую погоду. Приводятся их основные особенности, достоинства и недостатки, а также изучено влияние дождливой погоды на системы автоматического распознавания номерных знаков.

Ключевые слова: автоматическое распознавание автомобильных номеров, локализация, нормализация, сегментация, распознавание символов, синтаксический анализ.

ANALYSIS OF AUTOMATIC LICENSE PLATE RECOGNITION METHODS BASED ON ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS IN RAINY WEATHER

T. Gorelova, D.A. Korostelyov

*Bryansk State Technical University,
Russia, Bryansk, tatiana-gorelova32br@yandex.ru*

Annotation. The paper discusses methods of automatic recognition of car license plates. Their main features, advantages and disadvantages are given, and the influence of rainy weather on automatic license plate recognition systems is studied.

Keywords: automatic recognition of license plates, localization, normalization, segmentation, character recognition, syntactic analysis.

Распознавание объектов на изображениях – одно из самых интенсивно развивающихся направлений в области информационных технологий. Востребованность в таких системах возникает в самых разных областях – от систем обеспечения безопасности до различных видов медицинской диагностики. Распознавание объектов на изображениях – это назначение объекту определенного класса по существенным признакам, отделяющим данный объект от остальных.

Технологии, идентифицирующие автомобили по номерным пластинам, являются важным аспектом контроля и безопасности дорожного движения, и используются в различных областях: охраняемые зоны, предприятия, контроль дорожного движения, заправочные станции, автомобильные стоянки, контроль въезда и выезда и т.п.

Данная работа рассматривает распознавание детектированных номерных пластин в специфических условиях – в дождливую погоду. В основе автоматического распознавания лежат следующие этапы:

- 1) предобработка изображения;
- 2) сегментация номерного знака на отдельные символы;
- 3) распознавание сегментированных символов.

Суть предобработки изображения заключается в устранении шума, улучшении качества, усилении полезной и подавлении нежелательной информации, выполнении геометрических преобразований, изменении яркости и контраста. На втором этапе изображение разделяется на знакоместа, т.е. сегментируются области отдельных символов. На третьем этапе идет процедура распознавания сегментированных символов, в результате которой формируется строка символов.

Основной проблемой в задачах распознавания автомобильных номеров является неточное распознавание символов номерных знаков.

Процесс решения задачи распознавания автомобильных номерных знаков в общем виде может быть представлен в последовательности шагов, показанных на рисунке 1.

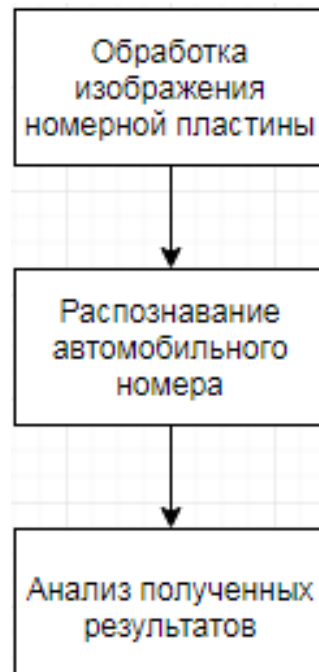


Рис. 1. Общая схема решения задачи распознавания автомобильного номерного знака
Подробная структурная схема процесса представлена на рисунке 2.



Рис. 2. Структурная схема процесса распознавания

Предлагаемый алгоритм распознавания номерных знаков представляется в виде последовательности следующих шагов:

1. Перевод изображения автомобильного номера в градации серого.
2. Удаление шумов.
3. Бинаризация изображения.
4. Нахождение границ автомобильного номера.
5. Нахождение и отрисовка контуров символов и букв.
6. Сегментация номерной пластины
7. Распознавание символов и букв.

Существует несколько методов распознавания автомобильных номеров, которые рассмотрим ниже.

Метод сопоставления шаблонов

Суть сопоставления шаблонов [1, 2] заключается в позиционировании номерного знака, последовательной обработке, сегментации символов и одновременном создании библиотеки символов номерного знака. После сегментации символов номерного знака, нормализации и разделения номерного знака с сопоставлением пикселей библиотеки символов номерного знака, выбирается наилучшее соответствие результатов сопоставления, чтобы предсказать результат. Формула (1) для расчета коэффициента соответствия выглядит следующим образом:

$$R(x, y) = \frac{\sum_{ij} (T(ij) I(x+i, y+j))}{\sqrt{\sum_{ij} T(ij)^2 \sum_{ij} I(x+i, y+j)^2}}, \quad (1)$$

где диапазон значений порогового значения $R(x, y)$ равен $[0; 1]$.

Когда $R(x, y)$ установлен равным 0,88, эффект сопоставления является наилучшим, когда $R(x, y)$ больше 0,88, эффект сопоставления слабый.

Метод опорных векторов

Метод опорных векторов [3, 4] – это метод машинного обучения для классификации символов номерных знаков с помощью механизма многомерного пространственного отображения. Этот метод представляет собой задачу модели бинарной классификации и линейный классификатор с максимальным интервалом в пространстве признаков. Стратегия обучения состоит в том, чтобы максимизировать геометрический интервал и, наконец, решить задачу выпуклого квадратичного программирования.

При распознавании номерных знаков требуется применять метод опорных векторов к распознаванию номерных знаков. После позиционирования номерного знака сегментируются символы номерного знака, а затем используется метод опорных векторов.

При использовании метода опорных векторов использование преобразования методов опорных векторов заключается в рисовании матричных векторов. В процессе обработки данных мы разделяем наборы данных в соответствии с пропорцией. 80 % данных будут использоваться для обучения модели метода опорных векторов, а 20 % данных – для проверки модели.

Метод глубокого обучения

Концепция глубокого обучения [5,6] возникла из изучения искусственной нейронной сети. Сверточная нейронная сеть – это нейронная сеть, специально разработанная для обработки изображений.

По сравнению с полносвязной сетью ее основные преимущества заключаются в совместном использовании параметров и разреженном соединении. Нейроны сверточной нейронной сети могут реагировать на окружающие единицы в области частичного покрытия, показывая, что на вывод ее части покрытия не влияют другие пиксели. Более важными слоями в сверточной нейронной сети являются сверточный слой, слой объединения, слой полного соединения, слой функции активации, слой функции потерь и слой

полного соединения, где сверточный слой выражается по формуле (2) следующим образом:

$$F_{rc} = \sum_{ij} W_{ij} \times X_{r+i, c+j} + b, \quad (2)$$

где W_{ij} – вес i строки и j столбца ядра свертки;

$X_{r+i, c+j}$ – строка $r+i$ и столбец $c+j$ входных данных слоя свертки;

b – отклонение;

F_{rc} – элемент в строке r и столбце c сверточного слоя.

В этой статье используется простая модель нейронной сети для изменений в скрытом слое, чтобы соответствовать слою свертки и объединения в середине скрытого слоя. Для более позднего использования полный слой соединения будет находиться в процессе свертки. Окончательная классификация в основном использует слой Софтмакс, слой Софтмакс может получить текущую выборку, принадлежащую другому распределению вероятности классификации.

Весь процесс реализации системы включает устранение шума, увеличение резкости изображения, начальное расположение номерного знака, точное определение положения номерного знака, исправление деформации номерного знака, сегментацию символов и распознавание отдельных символов с помощью нейронной сети.

Распознавание номерных знаков (LPD) – один из наиболее важных этапов системы автоматического распознавания номерных знаков (ALPR), поскольку он является отправной точкой всего процесса распознавания. Однако LPD на открытом воздухе по-прежнему представляет собой проблему из-за большого количества факторов, которые могут повлиять на процесс и получаемые результаты. Это свидетельствует о том, что полный обучающий набор изображений, включающий как можно больше ракурсов и размеров номерных знаков, улучшает работу каждого классификатора.

В этом направлении работы многочисленные обучающие наборы содержат изображения, сделанные в различных погодных условиях. Однако ни в одном исследовании не проверялись различия в эффективности разных дескрипторов для этих разных состояний (рис. 3).



Рис. 3. Примеры изображений: с помехами от дождя (а) и обработанный вариант (б)

В этой статье, различные классификаторы были обучены с функциями, извлеченными из набора изображений дождя, с использованием различных типов дескрипторов на основе текстуры. Точность этих специально обученных классификаторов на тестовом наборе изо-

бражений осадков сравнивалась с точностью той же пары дескриптор-классификатор, обученной с использованием функций, извлеченных из набора изображений в идеальных условиях.



Рис. 4. Выполнение распознавания автомобильного номера в дождливую погоду

Когда система обнаружения объектов, основанная на классификации признаков, используется на открытом воздухе, разумно полагать, что лучший способ получить хорошую производительность – это учитывать все условия окружающей среды в тренировочных наборах. Если он расположен в месте, где часто идут дожди, выполнимой стратегией является обучение классификатора с использованием изображений дождя в надлежащих пропорциях.

Точно так же, если система работает ночью, имеет смысл использовать слабоосвещенные изображения пропорционально расчетному времени работы системы в этих условиях или, если есть возможность, работать с разными классификаторами, которые специально обучены для каждого условия (рис. 5).



Рис. 5. Примеры изображений, извлеченных из набора с низкой освещенностью (а) и набора осадков (б)

Ниже представлена таблица, описывающая набор изображений, который используется для экспериментов (таблица 1).

Таблица 1. Описание наборов изображений, используемых для экспериментов.

Название	Цель	Количество изображений	Описание
GenTrainingSet	тест	1000	Снимки сделаны в оптимальных условиях (без осадков и при хорошем освещении)
RainTestSet	тест	1000	Изображения, сделанные в условиях дождя
NightTestSet	тест	1000	Изображения, сделанные в сложных условиях освещения

Проведенные эксперименты позволили сделать выводы, что включение изображений, затронутых дождем, в обучающие выборки не повышает точность распознавания номерных знаков классификатором по сравнению с изображениями, сделанными в сложных погодных условиях. Классификаторы, обученные на изображениях с идеальными условиями, повышают точность определения номерных знаков на изображениях, затронутых дождями, до 19 % в зависимости от типа извлеченных признаков.

Когда дождь фиксируется камерой в 2D-изображении, взвешенные частицы создают случайный узор между камерой и объективом. Эти шаблоны различаются, и кажется, что процесс выделения признаков не способен восстановить соответствующую информацию для улучшения классификации. На самом деле, включение этой случайной информации в номерные знаки может ухудшить работу классификатора потому, что его эффект аналогичен эффекту цифрового шума. Наоборот, результаты говорят о том, что влияние света следует учитывать в тренировочном процессе. Текстуры, цветовые или градиентные узоры, полученные в различных условиях освещения, являются важной информацией, которую необходимо извлечь, поскольку эти узоры могут быть распознаны классификатором. Одним словом, рассмотренный в статье метод позволяет лучше идентифицировать номерной знак в дождливые дни.

Библиографический список

1. Selmi, Z.; Halima, M.B.; Alimi, A.M. Deep learning system for automatic license plate detection and recognition. In Proceedings of the 2017 14th IAPR International Conference on Document Analysis and Recognition (ICDAR), Kyoto, Japan, 2017, 135 p
2. Laroca, R.; Severo, E.; Zanlorensi, L.A.; Oliveira, L.S.; Gonçalves, G.R.; Schwartz, W.R.; Menotti, D. A robust real-time automatic license plate recognition based on the YOLO detector. In Proceedings of the 2018 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN), Rio de Janeiro, Brazil, 2018, 57 p

3. Redmon, J.; Farhadi, A. YOLO9000: Better, faster, stronger. In Proceedings of the 2017 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), Honolulu, HI, USA, 2017, 197 p
4. Vijayan, G.; Reshma, S.R.; Dhanya, F.E.; Anju, S.; Nair, G.R.; Aneesh, R.P. A novel shadow removal algorithm using Niblack segmentation in satellite images. In Proceedings of the 2016 International Conference on Communication Systems and Networks (ComNet), Dayton, OH, USA, 2016, 232 p
5. Фурман Я.А., Юрьев А.Н., Яншин В.В. Цифровые методы обработки и распознавания бинарных изображений. Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1992. 248 с.
6. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. 3-е изд., испр. и доп. М.: Техносфера, 2012. 1104 с.

ОБЗОР МЕТОДОВ КЛАССИФИКАЦИИ ОБЪЕКТОВ НА РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЯХ

Л.Л. Кузнецов

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, kuznleo@gmail.com*

Аннотация. В работе приведён обзор основных методов классификации объектов на радиолокационных изображениях в задачах дистанционного зондирования Земли.

Ключевые слова: классификация объектов, радиолокационные изображения (РЛИ), дистанционное зондирование Земли (ДЗЗ).

OBJECTS CLASSIFICATION METHODS REVIEW FOR RADAR IMAGES

L.L. Kuznetsov

*Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, kuznleo@gmail.com*

Abstract. The paper gives a review on most common objects classification methods for radar images in Earth remote sensing tasks.

Keywords: objects classification, radar images, Earth remote sensing.

Одной из наиболее важных и, в то же время, сложных задач обработки радиолокационной информации является классификация объектов на получаемых радиолокационных изображениях (РЛИ). Такая задача востребована во множестве различных направлений, в частности, в системах дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ), где радиолокационные изображения получили широкое распространение благодаря тому, что они не зависят от погодных условий и времени суток. Поскольку методы ДЗЗ, развиваясь, используются для решения всё большего круга задач, возникает необходимость разработки алгоритмов автоматического поиска изменений на местности в режиме реального времени.

Проблемы, возникающие при обработке РЛИ, в первую очередь, связаны с тем, что формирование РЛИ происходит при боковом обзоре, что сильно искажает образы целей и вызывает формирование радиолокационных теней, при этом изображения одной и той же цели, снятые с разных ракурсов, могут сильно отличаться. В настоящее время для решения задач классификации объектов используются две основные группы методов: обучение с учителем на основе априорной информации о пространственно-распределённых целях и обучение без учителя исключительно на основе анализа наблюдаемых данных [1].

Рассмотрим основные методы классификации без обучения.

Пороговая обработка

При пороговой обработке используются простейшие алгоритмы сегментации. Суть данного метода заключается в сравнении некоторого признака изображения с заранее установленным пороговым значением. Результат такой обработки обычно представляет собой бинарное изображение, поэтому процедуру пороговой обработки также называют бинариза-

цией. В качестве порогового значения, как правило, используется амплитуда или некоторая функция от амплитуды РЛИ. Например, на данных ДЗЗ, обладающих различным типом поляризации, объекты с горизонтальной и вертикальной ориентацией будут давать образы различной яркости, поэтому использование логарифма яркости в качестве порогового значения для РЛИ дорог и мостов является наилучшим решением с целью сегментации изображения и дальнейшего распознавания таких объектов [2].

Основные приёмы, на которых основана сегментация изображения – анализ гистограммы изображения, расчёт энтропии и метод Оцу, основанный на анализе дисперсии изображения. В первой группе методов рассчитываются и анализируются различные параметры гистограммы (высота и положение максимумов, степень кривизны и др.), при этом порог устанавливается так, чтобы минимизировать вероятность ошибочной классификации. Во второй группе методов пороговое значение устанавливается таким образом, чтобы энтропия всего изображения была максимальна. В методе Оцу пороговое значение выбирают так, чтобы максимизировать межклассовую дисперсию. При этом, для РЛИ используется двумерный метод Оцу, где рассчитывается двумерная дисперсия яркости отдельных элементов и значений усреднённой яркости в пределах некоторого окна.

Кластеризация

Кластеризация основана на использовании алгоритма К-средних значений, основной идеей которого является минимизация разброса признаков элементов кластеров по отношению к их центрам масс, при этом после каждого изменения расстояний между кластерами производится перерасчёт центров масс. Число формируемых классов является произвольной величиной, которая устанавливается заранее. Основным применением данного метода является расчёт производных характеристик исходного изображения (среднего значения, дисперсии, энтропии и др.).

Существует метод нечёткой кластеризации, являющийся усовершенствованием метода К-средних, в котором оценивается вероятность принадлежности элементов изображения к каждому из кластеров. Центры кластеров итерационно рассчитываются с использованием элементов матрицы с использованием элементов матрицы принадлежности. Алгоритм выполняется до тех пор, пока значение функции потерь не перестанет уменьшаться.

Выделение границ

Методы сегментации на основе выделения границ строятся на том, что границы кластеров тесно связаны с перепадами яркости на изображении. Поиск границ основан на оценке усреднённых значений яркости в заданном окне и дальнейшем сравнении с порогом, вычисляемым исходя из статистических свойств текущего фрагмента изображения [3]. Для формирования цельных участков на сегментированном изображении должна быть решена проблема объединения полученных границ. Данная задача решается с применением морфологических фильтров или алгоритмов «водораздела». Процедура выполняется итерационно до тех пор, пока не будет достигнут минимум дисперсии по всем сформированным классам.

В целом, методы классификации РЛИ без учителя показывают менее точные результаты, чем методы классификации с учителем. Наиболее надёжные результаты получаются при кластеризации регионов с сильно различающейся эффективной поверхностью рассеивания, например, при выделении гидрографических объектов на общем фоне изображения или при выделении объектов на водной поверхности. Как правило, в практических задачах результаты сегментации используются для предварительной оценки структуры изображения с последующим выбором метода классификации или обнаружения с применением учителя.

К основным классическим методам классификации изображений с обучением относятся байесовский классификатор, линейный дискриминантный анализ и логистическая регрес-

сия. В основе данных методов лежит максимизация апостериорной вероятности принадлежности элементов изображения к конкретному классу или минимизация рисков некорректной классификации. Рассмотрим их поподробнее.

Байесовский классификатор

В основе данного метода лежит байесовский классификатор, который основан на прямом использовании теоремы Байеса и описании вероятностей распределения исходных данных. Чаще всего в качестве априорного закона распределения яркостей элементов используется гамма-распределение, однако в некоторых случаях может применяться и нормальный закон распределения. Данный алгоритм показывает высокую эффективность при обнаружении различных целей по радиолокационной информации ДЗЗ, а также при обнаружении изменений по разновременным изображениям.

Расширением классического байесовского классификатора является Байесовская сеть – вероятностная графовая модель, состоящая из множества трёх и более признаков и их вероятностных зависимостей, определяемых по теореме Байеса. Данный подход применяется при необходимости идентификации четырёх и более различных типов целей. Стоит отметить, что данный алгоритм является вычислительно ёмким.

Линейный дискриминантный анализ

В методе линейного дискриминантного анализа производится построение пространства признаков в виде линейной комбинации исходных данных, при этом делается упор на максимизацию разделимости между классами на основе эталонных выборок. Для нахождения коэффициентов перехода к новому пространству признаков обычно применяется критерий Фишера, основанный на расчёте матриц разброса внутри класса и между классами.

Метод множественного дискриминантного анализа представляет собой обобщение линейного дискриминантного анализа, в нём пересчёт происходит сразу на несколько новых координатных осей с учётом указанных критериев. В большинстве случаев данный метод требует значительной предварительной обработки данных.

Логистическая регрессия

Метод логистической регрессии основан на прогнозировании вероятности отнесения вектора признаков к тому или иному классу с помощью сравнения с логистической функцией, отклик которой принимает бинарные значения, что соответствует наличию или отсутствию образа цели на изображении. Значения коэффициентов регрессии определяются по параметрам обучающей выборки, для их дальнейшей оценки используется метод максимального правдоподобия, градиентного спуска или пошагового отбора. Данный метод показывает высокую точность при классификации мультиполяризационных данных ДЗЗ.

Методы классификации с обучением показывают большую точность, по сравнению с методами без обучения. Основной дилеммой при их использовании является выбор между скоростью обработки (и обучения) и точностью получаемых результатов.

В таблице 3 представлена итоговая информация по рассмотренным методам классификации изображений с обучением и без обучения.

Таблица 3 - Сводная таблица методов классификации

Метод классификации	Критерий классификации	Достоинства	Недостатки	Основные сферы применения
Без обучения				
Пороговая обработка	Сравнение признака изображения с пороговым значением	Высокая скорость обработки данных при анализе гистограмм; высокая точность метода Оцу при наличии шума	В некоторых случаях требуется значительная предварительная обработка для высокой точности	Классификация объектов; обнаружение объектов на водной поверхности и выделение объектов гидрографии для метода Оцу
Кластеризация	Расстояние от признака элемента до центра масс класса	Высокая скорость обработки и точность; возможна комбинация с методами пороговой обработки	Необходимость указания числа классов; выбор центров кластеров происходит случайным образом	Классификация объектов; расчёт производных характеристик исходного изображения
Выделение границ	Сравнение усреднённых значений яркости в окне с порогом	Высокая скорость обработки; возможна комбинация с методами пороговой обработки	Возможно наличие ложных границ, фрагментированность границ или их отсутствие	Классификация объектов; фиксация важных событий и изменений мира в ДЗЗ
С обучением				
Байесовский классификатор	Вероятность принадлежности признака к определённому классу	Малое количество данных, необходимых для обучения; высокая точность	Основным условием является предположение о независимости признаков	Обнаружение целей по радиолокационным данным ДЗЗ; классификация текстов
Линейный дискриминантный анализ	Линейная комбинация признаков, разделяющая классы	Простота реализации метода и интерпретации результатов	Высокая чувствительность к распределению исходных данных	В качестве линейного классификатора; для снижения размерности перед классификацией
Логистическая регрессия	Вероятность принадлежности вектора признаков к определённому классу	Простота реализации; интерпретируемость; высокая точность на небольших наборах данных	Требуется нормализация признаков; низкая точность, если классы не линейно разделимы	Классификация мультиполяризационных данных ДЗЗ; в качестве классификатора в искусственных нейронных сетях

На основании проведённого обзора методов классификации объектов можно сделать вывод о том, что в задачах, требующих повышенной точности распознавания, целесообразно применение методов классификации с обучением, поэтому в дальнейших работах будет выбран и использован наиболее подходящий метод классификации с обучением для решаемых задач.

Библиографический список

1. Доросинский Л.Г., Виноградова Н.С., Иванов О.Ю. Обработка радиолокационных изображений. Монография. Москва, 2021. 334 с.
2. Wang Y., Zheng Q., «Recognition of roads and bridges in SAR images», Pattern Recognition, т. 31, № 7, pp. 953-962, 1998.
3. W. R.G., «Change detection in SAR imagery», International Journal of Remote Sensing, т. 12, № 2, pp. 339-360, 1991.

УДК 004.932; ГРНТИ 50.37

ПРИМЕНЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В СИСТЕМАХ ВИДЕОАНАЛИТИКИ

Р.А. Никитин, Т.И. Молчанова, П.В. Бабаян

*Рязанский государственный радиотехнический университет имени В.Ф. Уткина,
Российская Федерация, Рязань, ra.nikitin@inbox.ru*

Аннотация. В работе рассматриваются системы видеоаналитики, которые позволяют оценивать параметры автомобильного трафика. Предлагается распределенный принцип построения таких систем, который позволяет корректировать параметры алгоритмов основываясь на статистических данных, обработанных центральным узлом управления.

Ключевые слова: автомобильный трафик, видеопоток, детектор, параметры алгоритма, распределенная система, система видеоаналитики (СВА), центральный узел управления

APPLICATION OF DISTRIBUTED INFORMATION PROCESSING IN VIDEO ANALYTICS SYSTEMS

R.A. Nikitin, T.I. Molchanova, P.V. Babayan

*Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin,
Russia, Ryazan, ra.nikitin@inbox.ru*

The summary. The paper discusses video analytics systems that allow you to evaluate the parameters of car traffic. A distributed principle of constructing such systems is proposed, which makes it possible to adjust the parameters of algorithms based on statistical data processed by the central control node.

Keywords: car traffic, video stream, detector, algorithm parameters, distributed system, video analytics system (VAS), central control node.

Современные системы видеоаналитики (СВА) широко используются во многих сферах: при охране территории, анализе транспортных потоков, контроле движения коммерческого транспорта. В классических моделях СВА источником информации для анализа являются один или несколько источников видеопотока. Первичная обработка видеопотока выполняется каким-либо алгоритмом (классические алгоритмы обработки изображений, интеллектуальные алгоритмы обработки изображений) на изолированных вычислительных узлах. На такой видеопоток оказывают влияние множество внешних факторов, которые ухудшают качество анализируемой сцены — погода, освещенность, механическое воздействие (вибрация, животные, грязь), геометрические особенности и так далее. Для того, чтобы нивелировать вышеперечисленные негативные факторы, алгоритмы обработки видеопотока дополняются различными вспомогательными процедурами, что ведет к увеличению количества независимых параметров этих алгоритмов и процедур. При большом количестве параметров возрастают требования к объему выборок данных, используемых на этапе разработки алгоритма. К примеру в классических алгоритмах — это вопрос о пороговых значениях алгоритмов обнаружения движущихся объектов и степени фильтрации фона для анализируемой сцены, в интеллектуальных алгоритмах — это недостаточное количество данных для обучения в различных условиях (плохая погода, слабая освещенность, избыточная освещенность и т. д.) и слишком сложная архитектура нейронных сетей, что ведет к повышению требований к аппаратной части системы. В настоящей работе предлагается концепция построения СВА, в которой адаптация под внешние факторы выполняется на основе коррекции параметров отдельных вычислительных узлов с помощью центрального узла.

Рассмотрим один из наиболее востребованных направлений, в котором используются СВА — это системы транспортной аналитики, которые зачастую включают в себя большое количество измерительных устройств (детекторов). Системы транспортной аналитики осуществляют свою работу основываясь на различных принципах: механические, акустические и пьезоэлектрические детекторы транспортных средств, измерители скорости транспортных средств на основе радаров, видеодетекторы транспорта, которые осуществляют контроль и

анализ автомобильного трафика в городской дорожной сети [1, 2]. В системах транспортной аналитики, основанных на СВА, камеры устанавливаются на узлах распределения транспортных потоков (в основном на регулируемых перекрестках) и собирают данные об интенсивности, плотности, скорости и других характеристиках транспортного потока на различных направлениях движения, что позволяет регулировать систему контроля очередностью проезда и адаптировать её под конкретную дорожную ситуацию. Пример сцены, наблюдаемой камерой СВА, приведен на рисунке 1.

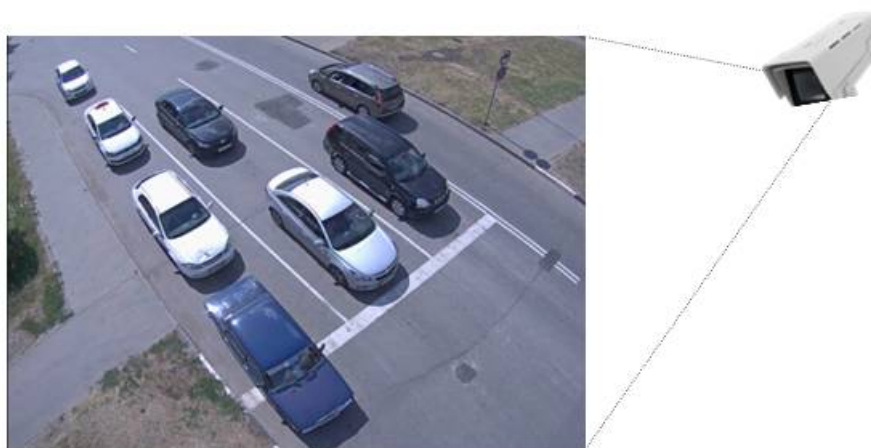


Рис. 1. Пример сцены, наблюдаемой камерой СВА

Недостатком СВА с одним источником видеоинформации является подверженность результатов анализа к изменению погодных условий, условий освещенности, несовершенство подхода к расчету пороговых значений для алгоритма обнаружения автомобилей. Для устранения негативного влияния факторов, влияющих на работу системы видеоаналитики можно масштабировать систему не вертикально (выделяя больше вычислительных мощностей, усложняя алгоритмы и так далее), а горизонтально — организовать взаимодействие и взаимообмен информацией между отдельными изолированными вычислительными узлами, другими словами, сформировать систему по принципу «Одна камера — единица информации, а несколько камер — это статистика». Примером такого взаимодействия могут быть статистическое формирование пороговых значений для классических алгоритмов, которые позволяют выделять и сопровождать движущиеся объекты, локальное дообучение интеллектуальных алгоритмов с использованием данных от различных источников видеосигнала, выявление и классификация помех видеосигналов для использования различных режимов работы алгоритмов (ночь/день/сумерки, солнце/снег/туман/дождь и т. д.). С помощью применения принципа распределенной СВА можно снизить влияние данных негативных факторов на работу как каждого детектора отдельно, так и всей системы в целом.

Предлагаемая авторами концепция функционирования распределенной СВА предполагает её работу по следующему алгоритму (рисунок 2):

- 1) Детекторы в процессе своей работы определенным образом вычисляют дескрипторы, которые передаются на центральный вычислительный узел (датацентр)
- 2) Датацентр производит вычисления, основываясь на полученных значениях дескрипторов со всех вычислительных элементов системы, и, путем их статистической обработки и дообучения определяет параметры применяемых в вычислительных узлах алгоритмов
- 3) Датацентр отправляет параметры на каждый вычислительный узел системы
- 4) Детектор выполняет первичную обработку видеопотока, основываясь на обновленных значениях параметров.

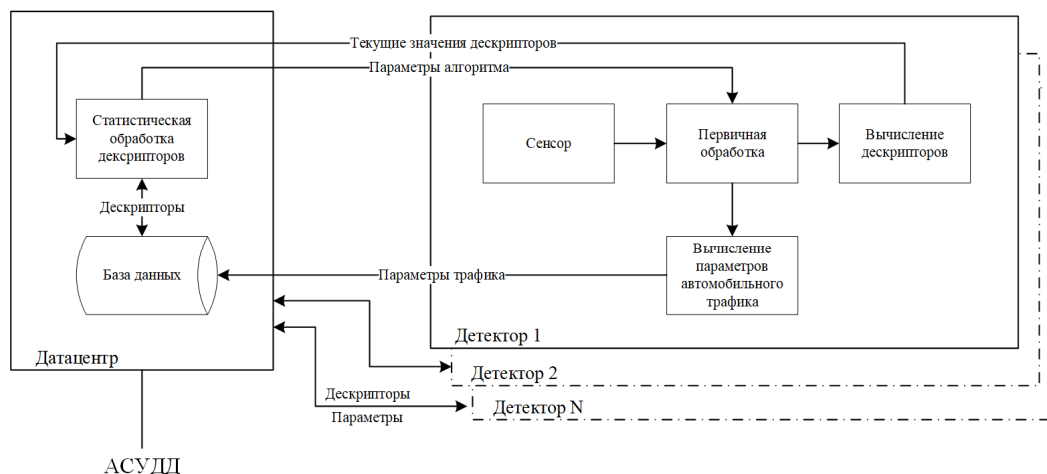


Рис. 2. Схема работы распределенной СВА

Для примера рассмотрим алгоритм выделения движущихся объектов на статичном фоне [3], который применяется в системе контроля и анализа автомобильного трафика в городской дорожной сети [4]. Для выявления принадлежности пикселя изображения к фону или объекту необходимо вычислить пороговое значение яркости пикселя. Если вычислять это значение, основываясь не только на конкретной сцене, а статистически, основываясь на большем количестве сцен с различными внешними воздействиями, то значение порога будет менее восприимчивым к этим внешним воздействиям. Также статистически можно рассчитывать параметры фильтрации фона. Для наиболее корректной работы алгоритма необходимо понимать, с какой скоростью меняется фон, и что на изменение фона оказывает наибольшее влияние. В условиях осадков, при активном движении облаков, сильном ветре и т.п. фон меняется быстрее, чем в нормальных условиях. Подтверждая наличие того или иного фактора изменения фона статистически, можно корректировать параметры его фильтрации.

Основываясь на данных, полученных с элементов распределенной СВА, можно определять сценарии работы алгоритмов. При поступлении в центральный узел системы информации о том, что изображения сцен становятся менее контрастными, либо искажены большим количеством артефактов и т.д. можно принять решение о том, что наступили сумерки, либо пошел снег, что означает необходимость корректировки параметров работы алгоритмов детекторов. Конечно, можно получить данную информацию основываясь на прогнозе погоды или текущем времени, но это делает систему зависимой от внешних источников информации: NTP-сервера, API сервиса с прогнозом погоды и т.д.

Следует отметить, что аналогичные распределенные системы в настоящее время внедряются во многих приложениях, в которых нужно принимать решение, основываясь на нескольких источниках информации. Например, такой принцип организации вычислений нашел применение в системе умного дома, где центральный узел системы должен получать информацию с множества источников-датчиков и принимать решения, соответствующие тому или иному сценарию. Здесь показания датчиков – аналог вычисленных дескрипторов, а принятие решения – корректировка работы алгоритма.

Принцип распределённости делает систему более отказоустойчивой, масштабируемой и точной. Выход из строя одного узла системы не приведет к её полной остановке и практически не повлияет на качество её работы, так как информация формируется статистически.

Использование нескольких источников информации, выявление ключевых особенностей и их взаимное использование в пределах замкнутой СВА позволит улучшить качество работы используемых принципов и алгоритмов без модернизации аппаратной части СВА. На основе существующих методов, реализованных в СВА, планируется построение и апробация

СВА, обладающей более высоким качеством определения параметров транспортного потока, и хорошей масштабируемостью, что повышает её актуальность при использовании в мегаполисах.

Библиографический список

1. Кременец Ю.А. Технические средства организации дорожного движения. – М.: Академкнига, 2005. – 279 с.
2. Власов В.М., Ефименко Д.Б., Богумил В.Н. Информационные технологии на автомобильном транспорте. – М.: Academia, 2014. – 256 с.
3. Алпатов Б.А., Бабаян П.В., Балашов О.Е., Степашкин А.И. Методы автоматического обнаружения и сопровождения объектов. Обработка изображений и управление. – М.: Радиотехника, 2008. – 176 с.: ил.
4. Boris A. Alpatov, Pavel V. Babayan, Maksim D. Ershov. Vehicle Detection and Counting System for Real-Time Traffic Surveillance // Proceedings of 7th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO). – IEEE, 2018. – P. 120-123. DOI: 10.1109/MECO.2018.8406017

СОДЕРЖАНИЕ

ИНФОРМАЦИЯ О VI МЕЖДУНАРОДНОМ ФОРУМЕ «СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИИ» СТНО-2023».....	3
МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИИ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ».....	6
Секция «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ».....	6
Бухенский К.В., Конюхов А.Н., Дюбуа А.Б., Сёмина С.С. Оценка полной нечеткой регрессии для положительных нечетких чисел I_r -типа с аналитически обратимыми функциями формы.....	6
Бухенский К.В., Конюхов А.Н., Дюбуа А.Б., Попова Д.О. Возможное решение проблемы «отрицательных спрэдов» при оценке модели полной нечеткой регрессии методом наименьших квадратов.....	14
Бакулин Н.В. Алгебраические аспекты моделирования производственной системы.....	20
Миронов В.В. Индекс научной респектабельности конференций форумов, симпозиумов на основе публикационных данных их участников.....	26
Ципоркова К.А., Лукьянова Г.С. Метод ортогональных разложений при построении сглаженной оценки векторного случайного процесса.....	33
Абрамов В.В. О некоторых коэффициентных признаках устойчивости для тривиальных решений систем дифференциальных уравнений.....	38
Лискина Е.Ю. Компьютерное моделирование бифуркаций одной системы дифференциальных уравнений с квадратичной нелинейностью.....	45
Новиков А.И. Методы совмещения разнородных изображений подстилающей поверхности в плоскости Земли.....	53
Филипенко Е.А. О решении векторного уравнения переноса излучения для живописи в технике темпера.....	58
Бухенский К.В., Дюбуа А.Б., Конюхов А.Н., Кучерявый С.И., Машнина С.Н., Сафошкин А.С. Плоская геометрия волноводов на поверхностном поляритоне.....	62
Филатов Ю.А., Мурлейкина О.В. Динамическая идентификация экономического процесса.....	68
Карасев И.П., Миронов В.В. Альтернативные методы линейной алгебры.....	72
Карасев И.П., Миронов В.В. Неклассические методы классической линейной алгебры.....	87
Секция «ОБРАБОТКА ДАННЫХ, ИЗОБРАЖЕНИЙ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ».....	99
Муртазов А.К. Определение параметров траектории в атмосфере и орбит метеороидов по данным базисных ПЗС-наблюдений.....	99
Чернов В.Г. Метод сравнения нечетких оценок.....	109
Клочко В.К., Андреева И.В., Хунг В.Б., Григорьев А.С. Алгоритм оценивания вектора скорости в многоканальной диагностической системе.....	113

Савин В.А., Смирнов С.А. Исследование алгоритма локализации дорожных знаков на основе каскадного классификатора.....	118
Бехтин Ю.С., Ильин А.А. Программное обеспечение для симуляции работы вероятностного реле.....	123
Антонов А.В., Ефимов А.И. Исследование алгоритмов построения карт глубины.....	128
Сафронов Н.М. Оценка эффективности методов восстановления испорченных (или зашумленных) видеокадров.....	134
Антошкин В.А., Арсенов А.В., Синёв М.С. Использование библиотеки SNAP.SVG для разработки онлайн игры «CRAZY RACCOON»	143
Беляков Н.В., Коростелёв Д.А. Управление обобщенным вычислительным экспериментом на основе алгоритмов поиска подобия многомерных рядов.....	150
Артемов Я.А. Интеллектуальная обработка текстовой информации. Тематическое моделирование.....	155
Будак В.П., Делян Р.А. Исследование изменений эллипсов Макадама с помощью модели цветовых ощущений Беляевой-Матвеева.....	160
Горелова Т., Коростелёв Д.А. Анализ методов автоматического распознавания автомобильных номеров на основе искусственных нейронных сетей в дождливую погоду.....	166
Кузнецов Л.Л. Обзор методов классификации объектов на радиолокационных изображениях.....	172
Никитин Р.А., Молчанова Т.И., Бабаян П.В. Применение распределенной обработки информации в системах видеоаналитики.....	176

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУКЕ И ОБРАЗОВАНИИ**Научное издание****В 10 томах****Том 5**

Под общей редакцией О.В. Миловзорова.

Подписано в печать 15.06.23. Формат 60х84 1/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Гарнитура «Times New Roman».

Усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ №.

ISBN 978-5-7722-0378-1



9 785772 203781

Рязанский государственный радиотехнический университет,
Редакционно-издательский центр РГРТУ,
390005, г. Рязань, ул. Гагарина, д. 59/1.