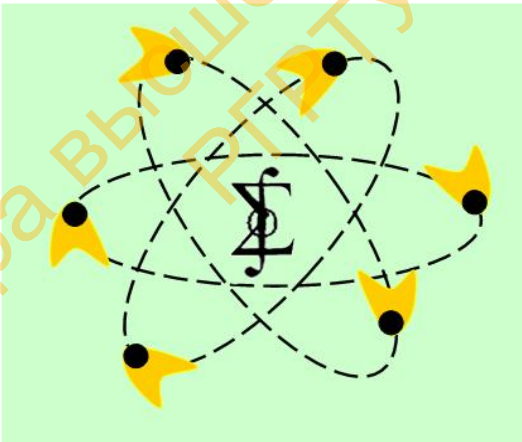
7350

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В.Ф. УТКИНА

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАДЁЖНОСТИ

Методические указания к практическим занятиям



Рязань 2022

УДК 519.21+681.3.06

Основы теории надёжности: методические указания к практическим занятиям / Рязан. гос. радиотехн. ун-т; сост. М.Е. Ильин. – Рязань, 2022. – 32 с.

Рассматриваются основные математические модели, используемые в теории надёжности технических элементов, систем элементов и программного обеспечения. Приведены показатели надежности, методы их расчета и оценивания по результатам статистических наблюдений. Приведенные примеры позволяют студентам получить навыки практического применения математического аппарата.

Предназначены для студентов специальностей 10.05.01 «Компьютерная безопасность», 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем», а также для студентов всех направлений и специальностей, рабочие программы которых включают дисциплины, имеющие отношение к теории надежности.

Ил. 13. Библиогр.: 3 назв.

Надежность, отказ, модели надежности: элемента, системы, программы; поток восстановления, последовательное и параллельное соединения элементов в системе, план испытаний, методы оценивания, точёная и интервальная оценки

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук К.В. Бухенский)

ПЗ 1. Модели надежности элементов

Приведем основные положения теории надежности, необходимые для решения задач. Для произвольной модели надежности справедливы выражения расчета количественных показателей надежности элемента (случайной величины τ)

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau}; Q(t) = 1 - P(t); q(t) = \frac{dQ(t)}{dt}; \lambda(t) = \\ = \frac{q(t)}{P(t)};\ m_\tau = \int\limits_0^\infty P(\tau)d\tau,$$

где $P(t)$ - вероятность безотказной работы изделия на интервале времени от 0 до t; $Q(t)$ - вероятность отказа изделия на интервале времени от 0 до t; $q(t)$ – плотность вероятности отказа элемента (вероятность отказа на единичном интервале); $\lambda(t)$ - интенсивность отказов изделия; m_τ - среднее время наработки на отказ.

В частном случае $\tau \sim Exp(\lambda)$ - экспоненциальная модель надежности (ЭМН), выражения принимают вид:

$$P(t) = e^{-\lambda t}; Q(t) = 1 - e^{-\lambda t}; q(t) = \lambda e^{-\lambda t}; \lambda(t) = \lambda; m_\tau = \\ = \frac{1}{\lambda}. \tag{1.1}$$

Для расчета экспоненты следует воспользоваться встроенной функцией Excel «EXP(x)».

Для $\tau \sim N(a, \sigma^2)$ – получаем нормальную модель надежности (НМН):

$$P(t) = \frac{1}{2} - \Phi(u), u = \frac{t-m}{\sigma};\ Q(t) = \frac{1}{3} + \Phi(u); \Phi(u) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx;\ q(t) = \frac{\varphi(u)}{\sigma};\ \varphi(u) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}};\ \lambda(t) = \frac{\varphi(u)}{\sigma} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} - \Phi(u)}, \tag{1.2}$$

где $\Phi(u)$ - функция Лапласа; $\varphi(u)$ – функция Гаусса; m и σ^2 - математическое ожидание и дисперсия случайной величины τ. Для расчета функции Лапласа следует воспользоваться встроенной функцией Excel «НОРМ.СТ.РАСП(x;1)-0,5».

Для $\tau \sim W(k,\lambda)$ – модель надежности Вейбулла (МНВ):

$$P(t) = e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k};\ Q(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k};\ q(t) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k};\ \lambda(t) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1};\ m = \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right), \quad (1.3)$$

где k,λ - параметры закона распределения Вейбулла; $\Gamma(x)$ - гамма-функция, для расчета которой следует воспользоваться встроенной функцией Excel «ГАММА(x)».

Выражения для модели надежности Релея (МНР) элемента имеют вид:

$$P(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}};\ Q(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}};\ q(t) = \frac{t}{\sigma^2}\cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}};\lambda(t) = \frac{t}{\sigma^2};\ m = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (1.4)$$

где σ - параметр закона распределения Релея.

1.1. Решение типовых задач

Задача 1.1. Надежность элемента подчинена ЭМН с параметром $\lambda = 2.5\cdot 10^{-5}\frac{1}{ч}$. *Найти количественные характеристики надежности элемента* $P(t), Q(t), q(t), m_\tau$ *для* $t = 1000$ ч.

Решение. Воспользуемся выражениями (1.1) для ЭМН. Определим закон надежности элемента

$$P(t) = e^{-\lambda t} = e^{-2.5\cdot 10^{-5} t}.$$

Вычислим частное значение вероятности безотказной работы

$$P(1000) = e^{-2.5\cdot 10^{-5}\cdot 1000} = e^{-0.025} = 0.9753.$$

Определим функцию вероятности отказа

$$Q(t) = 1 - P(t) = 1 - e^{-2.5\cdot 10^{-5} t}$$

и её частное значение при $t = 1000$ ч:

$$Q(1000) = 1 - P(1000) = 1 - e^{-0.025} = 1 - 0.9753 = 0.0247.$$

Определим плотность вероятности отказа

$$q(t) = \lambda\cdot P(t) = 2.5\cdot 10^{-5}\cdot e^{-2.5\cdot 10^{-5}\cdot t}\,\frac{1}{ч}$$

и её частное значение

$$q(1000) = 2.5 \cdot 10^{-5} \cdot e^{-2.5 \cdot 10^{-5} \cdot 1000} = 2.5 \cdot 10^{-5} \cdot 0.9753 =$$
$$= 2.439 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{ч}}.$$

Вычислим среднее время наработки на отказ

$$m_\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2.5 \cdot 10^{-5}} = 40000 \text{ ч}.$$

Задача 1.2. Время работы элемента до отказа подчинено НМН с параметрами $m = 8000$ ч, $\sigma = 2000$ *ч. Найти количественные характеристики надежности* $P(t), q(t), \lambda(t), m_\tau$ *для* $t = 10000$ ч.

Решение. Воспользуемся выражениями (1.2) для НМН. Определим закон надежности элемента – вероятность безотказной работы элемента

$$P(t) = \frac{1}{2} - \Phi(u);\ u = \frac{t-m}{\sigma};\ u = \frac{10000 - 8000}{2000} = 1;\ \Phi(1) =$$
$$= 0.3413$$

и её частное значение

$$P(10000) = \frac{1}{2} - 0.3413 = 0.1587.$$

Определим плотность отказа $q(t)$ и её частное значение:

$$q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{\varphi(t)}{\sigma}, q(10000) = \frac{\varphi(1)}{2000} = \frac{0.242}{2000} =$$
$$= 12.1 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{ч}}.$$

Рассчитаем интенсивность отказов $\lambda(t)$ и её частное значение:

$$\lambda(t) = \frac{q(t)}{P(t)};\ \lambda(10000) = \frac{q(10000)}{P(10000)} = \frac{12.1 \cdot 10^{-5}}{0.1587} =$$
$$= 76.4 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{ч}}.$$

Среднее время безотказной работы элемента

$$m_\tau = 8000 \text{ ч}.$$

Задача 1.3. Время работы изделия до отказа подчиняется МНР. Вычислить количественные характеристики надежности изделия $P(t), q(t), \lambda(t), m_\tau$ *для* $t = 1000$ *ч, если параметр распределения* $\sigma = 1000$ *ч.*

Решение. Воспользуемся выражениями (1.4) для МНР. Вычислим вероятность безотказной работы

$$P(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}};\ P(1000) = e^{-\frac{1000^2}{2\cdot 1000^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = 0.606.$$

Определим плотность отказа

$$q(t) = \frac{t \cdot P(t)}{\sigma^2};\ q(1000) = \frac{1000 \cdot 0.606}{1000^2} = 0.606 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{ч}}.$$

Рассчитаем интенсивность отказов:

$$\lambda(t) = \frac{t}{\sigma^2}; \lambda(1000) = \frac{1000}{1000^3} = 10^{-3}\,\frac{1}{\text{ч}}.$$

Определим среднее время безотказной работы изделия

$$m_\tau = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}};\ m_\tau = 1000 \cdot 1.253 = 1253\ \text{ч}.$$

Задача 1.4. Время безотказной работы изделия подчинено МНВ с параметрами $k = 1.5$; $\lambda = 10$ ч. *Найти количественные характеристики надежности изделия* $P(t), Q(t), q(t), \lambda(t), m_\tau$ *при* $t = 5$ *ч.*

Решение. Воспользуемся выражениями (1.3) для МНВ. Определим вероятность безотказной работы $P(t)$. Имеем

$$P(100) = e^{-\left(\frac{5}{10}\right)^{1,5}} = 0.70.$$

Определим плотность отказов $q(t)$:

$$q(5) = \frac{1,5}{10} \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^{1,5-1} exp\left(-\left(\frac{5}{10}\right)^{1,5}\right) = 0.074\,\frac{1}{\text{ч}}.$$

Определим интенсивность отказов λ(t) и её частное значение:

$$\lambda(t) = \frac{q(t)}{P(t)}; \lambda(5) = \frac{q(5)}{P(5)} = \frac{0.074}{0.70} \approx 0.11\,\frac{1}{\text{ч}}.$$

Определим среднее время безотказной работы изделия

$$m_\tau = \frac{\frac{1}{k} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{k}\right)}{a^{\frac{1}{k}}};\ m_\tau = 10 \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{1.5}\right) = 10 \cdot \frac{1}{1.5}\Gamma\left(\frac{1}{1,5}\right) = 9.03\,\frac{1}{\text{ч}}.$$

Задача 1.5. В результате анализа данных об отказах аппаратуры плотность отказов получена в виде

$$q(t) = c_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Определить количественные характеристики надежности: $P(t), \lambda(t), m_\tau$.

Решение. Воспользуемся общими выражениями для модели надежности. Найдем вероятность безотказной работы. Имеем [3]

$$P(t) = 1 - \int_0^t q(\tau)d\tau = 1 - \left[\int_0^t c_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}d\tau + \int_0^t c_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}d\tau\right] =$$

$$= 1 - (c_1 + c_2) + c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Вычислим сумму $c_1 + c_2$. Так как $\int_0^\infty q(t)dt \equiv 1$, то

$$\int_0^\infty c_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}d\tau + \int_0^\infty c_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}d\tau = c_1 + c_2 \equiv 1.$$

Тогда

$$P(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Найдем зависимость интенсивности отказов от времени по формуле

$$\lambda(t) = \frac{q(t)}{P(t)} = \frac{c_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}}.$$

Определим среднее время наработки на отказ аппаратуры

$$m_\tau = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty \left(c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}\right)dt = \frac{c_1}{\lambda_1} + \frac{c_2}{\lambda_2}.$$

1.2. Задачи для самостоятельного решения

Решения задач здесь и далее выполнить в следующей последовательности.

1. Указать используемый закон надежности.
2. Привести последовательный расчет параметров модели надежности.
3. В том случае, когда в задаче требуется в качестве параметра определить функцию, привести график этой функции.

Задача 1.6. Вероятность безотказной работы автоматической линии в течение 120 *ч равна* 0.9. *Предполагается, что справедлива ЭМН. Найти интенсивность отказов и плотность* *отказов линии для момента времени* $t = 120$ *ч, а также среднее время безотказной работы.*

Задача 1.7. Среднее время безотказной работы автоматической системы управления равно 640 *ч. Предполагается, что справедлива ЭМН. Найти вероятность безотказной работы в течение* 120 *ч, плотность для момента времени* $t = 120$ *ч и интенсивность отказов.*

Задача 1.8. Время работы изделия подчинено НМН с параметрами $m = 8000$ *ч,* $\sigma = 1000$ *ч. Найти количественные характеристики надежности* $P(t), Q(t), q(t), \lambda(t), m_\tau$ *для* $t = 8000$ ч.

Задача 1.9. Время безотказной работы прибора подчинено МНР с параметром $\sigma = 1860$ *ч. Вычислить* $\mathrm{P}(t), Q(t), q(t), \lambda(t)$ *для* $t = 1000$ *ч и среднее время безотказной работы прибора.*

Задача 1.10. Время исправной работы дисковых накопителей подчинено МНВ с параметрами $k = 2.6$; $\lambda = 165$ ч. *Найти количественные характеристики надежности* $\mathrm{P}(t), Q(t), q(t), \lambda(t)$ *для* $t = 150$ *ч и среднее время безотказной работы накопителя.*

Задача 1.11. Вероятность безотказной работы изделия в течение $t = 1000$ *ч* $\mathrm{P}(1000) = 0.95$. *Время исправной работы подчинено МНР. Требуется определить количественные характеристики надежности* $q(t), Q(t), \lambda(t), m_\tau$.

Задача 1.12. Среднее время исправной работы изделия равно 1260 *ч. Время исправной работы подчинено МНР. Необходимо найти его количественные характеристики надежности* $P(t), Q(t), q(t), \lambda(t)$ *для* $t = 1000$ *ч.*

Задача 1.13. В результате анализа данных об отказах изделия установлено, что плотность отказов имеет вид $q(t) = 2\lambda e^{-\lambda t} \cdot \left(1 - e^{-\lambda t}\right)$. *Найти количественные характеристики надежности* $P(t), Q(t), \lambda(t), m_\tau$.

Задача 1.14. В результате анализа данных об отказах изделий установлено, что вероятность безотказной работы выражается формулой $P(t) = 3e^{-\lambda t} - 3e^{-2\lambda t} + e^{-3\lambda t}$. *Найти количественные характеристики надежности* $P(t), Q(t), \lambda(t), m_\tau$.

Задача 1.15. Определить вероятность безотказной работы и интенсивность отказов прибора при $t = 1300$ *ч работы, если при испытаниях получено значение среднего времени безотказной работы* $m_\tau = 1500$ *ч и среднее квадратическое отклонение* $\sigma = 100$ *ч. Определить искомую вероятность для ЭМН, НМН, МНВ и МНР.*

Задача 1.16. Имеется неремонтируемый объект с ЭМН. Найти среднюю наработку до отказа данного объекта, если известно, что вероятность безотказной работы объекта в течение 1000 ч равна 0,999.

ПЗ 2. Последовательное соединение элементов в системе

Приведем основные сведения из теории надежности систем, необходимые при решении задач. Соединение элементов называется последовательным в смысле надежности, если отказ хотя бы одного элемента приводит к отказу всей системы (см. рис. 2.1). Система последовательно соединенных элементов работоспособна тогда, когда работоспособны все ее элементы.

Рис. 2.1. Последовательное соединение элементов

Вероятность безотказной работы системы при основном соединении её элементов за время t определяется выражением [1, 2]

$$P_s(t) = P_1(t) \cdot P_2(t) \cdot \ldots \cdot P_n(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t),$$

где $P_i(t)$ - вероятность безотказной работы i-го элемента за время t.

Если элементы имеют одну и ту же модель надежности $P_i(t) = P(t)$, $i = \overline{1, n}$, то справедливо равенство

$$P_s(t) = P^n(t).$$

Выразим модель надёжности системы $P_s(t)$ через интенсивности отказов $\lambda_i(t)$ элементов системы. Имеем:

$$P_s(t) = e^{-\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \lambda_i(\tau)d\tau}$$

или

$$P_s(t) = e^{-\int_0^t \lambda_s(\tau)d\tau};\ \lambda_s(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t).$$

Здесь $\lambda_i(t)$ – интенсивность отказов i-го элемента; $\lambda_s(t)$ – интенсивность отказов системы. Вероятность отказа системы на интервале времени $(0, t)$ равна

$$Q_s(t) = 1 - P_s(t).$$

Плотность отказа системы $q_s(t)$ определяется соотношением

$$q_s(t) = -\frac{dP_s(t)}{dt}.$$

Интенсивность отказов системы

$$\lambda_s(t) = \frac{q_s(t)}{P_s(t)}.$$

Среднее время безотказной работы системы

$$m_s = \int_0^{\infty} P_s(t)dt.$$

Для ЭМН всех элементов системы имеем

$$\begin{gathered} \lambda_i(t) = \lambda_i = const, i = \overline{1,n};\ \lambda_s(t) = \lambda_s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,; \\ P_i(t) = e^{-\lambda_i t}, i = \overline{1,n};\ P_s(t) = e^{-\lambda_s t}; \\ Q_s(t) = 1 - e^{-\lambda_s t};\ q_s(t) = \lambda_s \cdot e^{-\lambda_s t}; \\ m_s = \frac{1}{\lambda_s} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{-1};\ m_i = \frac{1}{\lambda_i}, \end{gathered} \tag{2.1}$$

где m_i - среднее время безотказной работы i-го элемента.

При расчете надежности систем часто приходится перемножать вероятности безотказной работы отдельных элементов расчета, возводить их в степень и извлекать корни. При значениях $\mathrm{P}(t)$, близких к единице, эти вычисления с достаточной для практики точностью можно выполнять по следующим приближенным формулам [2]:

$$\prod_{i=1}^{n} P_i(t) \approx 1 - \sum_{i=1}^{n} Q_i(t)\,;\; P_i^k(t) \approx 1 - k \cdot Q_i(t);\; \sqrt[k]{P_i(t)} \approx$$
$$\approx 1 - \frac{1}{k} \cdot Q_i(t),$$
где $Q_i(t)$ - вероятность отказа i-го элемента.

2.1. Решение типовых задач

Задача 2.1. Система состоит из трех устройств. Интенсивность отказов электронного устройства равна $\lambda_1 = 0.16 \times \times 10^{-3} \frac{1}{ч} = const$. *Интенсивности отказов двух электромеханических устройств линейно зависят от времени и определяются формулами:* $\lambda_2(t) = 0.23 \cdot 10^{-4} t \frac{1}{ч}$, $\lambda_3(t) = 0.06 \cdot 10^{-6} t^{2.6} \frac{1}{ч}$. *Найти вероятность безотказной работы изделия в течение* 100*ч.*

Решение. Выражение (2.1) позволяет написать
$$P_s(t) = e^{-\sum_{i=1}^{3} \int_0^t \lambda_i(\tau)d\tau} = e^{-\left(\int_0^t \lambda_1(\tau)d\tau + \int_0^t \lambda_2(\tau)d\tau + \int_0^t \lambda_3(\tau)d\tau\right)}.$$
Вычислим каждый интеграл по отдельности:
$$\int_0^t \lambda_1(\tau)d\tau = \int_0^t 0.16 \cdot 10^{-3} d\tau = 0.16 \cdot 10^{-3} \cdot t;$$
$$\int_0^t \lambda_2(\tau)d\tau = \int_0^t 0.23 \cdot 10^{-4} \cdot \tau d\tau = 0.23 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{t^2}{2};$$
$$\int_0^t \lambda_3(\tau)d\tau = \int_0^t 0.06 \cdot 10^{-6} \cdot \tau^{2.6} d\tau = 0.06 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{t^{3.6}}{3.6};$$
$$P_s(t) = e^{-\left(0.16 \cdot 10^{-3} \cdot t + 0.23 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{t^2}{2} + 0.06 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{t^{3.6}}{3.6}\right)}.$$
Для $t = 100$ ч получаем
$$P_s(100) = e^{-\left(0.16 \cdot 10^{-3} \cdot 100 + 0.23 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{100^2}{2} + 0.06 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{100^{3.6}}{3.6}\right)} \approx 0.33.$$

Задача 2.2. Система состоит из трех блоков, среднее время безотказной работы которых равно: $m_1 = 160$ *ч;* $m_2 = 320$ *ч;* $m_3 = 600$ *ч. Для блоков справедлива ЭМН. Определить среднее время безотказной работы системы.*

Решение. Воспользуемся соотношением между интенсивностью и средним временем наработки на отказ (2.1). Из условия задачи интенсивности отказов отдельных блоков равны:

$$\lambda_1 = \frac{1}{m_1} = \frac{1}{160};\ \lambda_2 = \frac{1}{m_2} = \frac{1}{320};\ \lambda_3 = \frac{1}{m_3} = \frac{1}{600}.$$

Теперь интенсивность отказа системы равна

$$\lambda_s = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{1}{160} + \frac{1}{320} + \frac{1}{600} \approx 0.011\,\frac{1}{\text{ч}}.$$

Наконец, среднее время безотказной работы равно

$$m_s = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{0.011} \approx 91 \text{ ч}.$$

Задача 2.3. Система состоит из 12600 *элементов, интенсивность отказов которых* $\lambda = 0.32 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\text{ч}}$. *Найти* $P_s(t)$, $Q_s(t)$, $q_s(t)$, m_s *для* $t = 50$ *ч. Здесь* $P_s(t)$ *- вероятность безотказной работы системы;* $Q_s(t)$ *– вероятность отказа системы;* $q_s(t)$ *– плотность отказа системы в момент времени* t; m_s *– среднее время безотказной работы системы.*

Решение. Интенсивность отказов системы определяется выражением

$$\lambda_s = \lambda \cdot n = 0.32 \cdot 10^{-6} \cdot 12600 = 4.032 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{ч}}.$$

Теперь может быть определена и функция надежности

$$P_s(t) = e^{-\lambda_s t};\ P_s(50) = e^{-4.032 \cdot 10^{-3} \cdot 50} \approx 0.82.$$

Дифференцирование функции надежности позволяет получить функцию плотности отказа [3]

$$q_s(t) = \lambda_s \cdot e^{-\lambda_s t};\ q_s(50) = 4.032 \cdot 10^{-3} \cdot 0.82 = 3.28 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{ч}}.$$

Для функции ненадежности имеем выражение и частное значение:

$$Q_s(t) = 1 - P_s(t); Q_s(50) = 1 - P_s(50) \approx 0.18.$$

Определяем среднее время безотказной работы

$$m_s = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{4.032 \cdot 10^{-3}} \approx 250 \text{ ч}.$$

Задача 2.4. Система состоит из двух устройств. Вероятности безотказной работы каждого из них в течение времени $t\ =$

$= 100$ *ч равны:* $P_1(100) = 0.95$; $P_2(100) = 0.97$. *Справедлива ЭМН. Найти среднее время безотказной работы системы.*

Решение. Найдем вероятность безотказной работы изделия за $t = 100$ ч:

$$P_s(100) = P_1(100) \cdot P_2(100) = 0.95 \cdot 0.97 = 0.92.$$

Для интенсивности отказов изделия воспользуемся её связью с моделью надежности (2.1):

$$P_s(t) = e^{-\lambda_s t},$$

или

$$P_s(100) = 0.92 = e^{-\lambda_s \cdot 100},$$

что позволяет получить с помощью логарифмирования:

$$\lambda_s \cdot 100 \approx 0.083 \Rightarrow \lambda_s = 0.83 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{ч}};\ m_s = \frac{1}{\lambda_s} = 1200 \text{ ч}.$$

Задача 2.5. Вероятность безотказной работы одного элемента в течение времени t_0 *равна* $P(t_0) = 0.9997$. *Требуется определить вероятность безотказной работы системы, состоящей из* $n = 100$ *таких же элементов.*

Решение. Вероятность безотказной работы системы равна $P_s(t_0) = P^n(t_0) = 0.9997^{100}$. Вероятность $P_s(t_0)$ близка к единице, поэтому для ее вычисления воспользуемся приближенным выражением. В нашем случае $Q_s(t_0) = 1 - P_s(t_0) = 1 - -0.9997 = 0.0003$.

Тогда $P_s^n(t_0) \approx 1 - n \cdot Q(t_0) = 1 - 100 \cdot 0.0003 = 0{,}97$.

Задача 2.6. Вероятность безотказной работы системы в течение времени t_0 *равна* $P_s(t_0) = 0.95$. *Система состоит из* $n = 120$ *равнонадежных элементов. Найти вероятность безотказной работы элемента.*

Решение. Очевидно, что вероятность безотказной работы элемента будет $P_i(t_0) = P(t_0) = \sqrt[n]{P_s(t_0)}$.

Так как $P_s(t_0)$ близка к единице, то вычисления $P(t_0)$ будем проводить, пользуясь приближенными соотношениями. В нашем случае

$$Q_s(t_0) = 1 - P_s(t_0) = 1 - 0.95 = 0.05;\ P(t_0) = \sqrt[n]{P_s(t_0)} = $$
$$= 1 - \frac{Q_s(t)}{n} = 1 - \frac{0.05}{120} = 0.9996.$$

Задача 2.7. Система состоит из 12600 *элементов, средняя интенсивность отказов которых* $\lambda = 0.32 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{ч}}$. *Найти вероятность безотказной работы в течение* $t = 50$ *ч.*

Решение. Интенсивность отказов системы определяем выражением

$$\lambda_s = \lambda \cdot n = 0.32 \cdot 10^{-6} \cdot 12600 = 4.032 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{ч}}.$$

Тогда модель надежности определяется выражением

$$P_s(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_s t};\ P_s(50) = \mathrm{e}^{-4.032 \cdot 0.001 \cdot 50} \approx 0.82.$$

2.2. Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.8. Система состоит из 2000 *элементов, интенсивность отказов которых* $\lambda = 0.33 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{ч}}$. *Найти вероятность безотказной работы аппаратуры в течение* $t = 200$ *ч и среднее время безотказной работы аппаратуры.*

Задача 2.9. Невосстанавливаемая в процессе работы электронная машина состоит из 200000 *элементов, средняя интенсивность отказов которых* $\lambda = 0.2 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{ч}}$. *Найти вероятность безотказной работы электронной машины в течение* $t = 24$ *ч и среднее время безотказной работы электронной машины.*

Задача 2.10. Система управления состоит из 6000 *элементов, средняя интенсивность отказов которых* $\lambda = 0.16 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{ч}}$. *Найти вероятность безотказной работы в течение* $t = 50$ *ч и среднее время безотказной работы.*

Задача 2.11. Прибор состоит из $n = 5$ *узлов. Надежность узлов характеризуется вероятностью безотказной работы в течение времени* t, *которая равна:* $P_1(t) = 0.98$; $P_2(t) = 0.99$; $P_3(t) = 0.998$; $P_4(t) = 0.975$; $P_5(t) = 0{,}985$. *Определить вероятность безотказной работы прибора.*

Задача 2.12. Система состоит из пяти приборов, среднее время безотказной работы которых равно: $m_1 = 83$ *ч;* $m_2 = 220$ *ч;* $m_3 = 280$ *ч;* $m_4 = 400$ *ч;* $m_5 = 700$ *ч. Для приборов справедлива ЭМН. Найти среднее время безотказной работы системы.*

Задача 2.13. Прибор состоит из пяти блоков. Вероятность безотказной работы каждого блока в течение времени $t = 50$ *ч равна:* $P_1(50) = 0.98$; $P_2(50) = 0.99$; $P_3(50) = 0.998$; $P_4(50) = 0.975$; $P_5(50) = 0.985$. *Справедлива ЭМН. Найти среднее время безотказной работы прибора.*

Задача 2.14. Какую вероятность безотказной работы $P(t)$ *в течение времени* t *должен иметь отдельный элемент, для того чтобы система, составленная из 10 таких элементов, имела вероятность безотказной работы (надежность) в течение времени* t *не менее* $P_{\text{посл}}(t) = 0{,}95$?

Задача 2.15. Вероятность безотказной работы системы, состоящей из 120 элементов, соединенных последовательно и имеющих экспоненциальное распределение наработки до отказа, в течение времени t *равна* $P(t) = 0{,}95$. *Определить вероятность безотказной работы элемента в течение этого времени.*

ПЗ 3. Расчет надежности системы с постоянным резервированием

Приведем основные сведения из теории надежности, необходимые при решении задач. При постоянном резервировании резервные элементы $1, 2, \dots, m$ соединены параллельно с основным (рабочим) элементом на протяжении всего времени работы системы. Все элементы соединены постоянно, перестройка схемы при отказах не происходит, отказавший элемент не отключается (см. рис. 3.1). Вероятность отказа системы $Q_s(t)$ определяется формулой

$$Q_s(t) = \prod_{i=0}^{m} Q_i(t) = Q_s(t) = \prod_{i=0}^{m} \left(1 - P_i(t)\right),$$

где $Q_i(t)$ - вероятность отказа i-го элемента; $P_i(t)$ - вероятность безотказной работы (модель надежности) i-го элемента. Вероятность безотказной работы всей системы

$$P_s(t) = 1 - \prod_{i=0}^{m} \left(1 - P_i(t)\right).$$

Если $P_i(t) = P(t), j = \overline{0, m}$, то

$$Q_s = Q^{m+1}(t);\ P_s(t) = 1 - \left(1 - P(t)\right)^{m+1}.$$

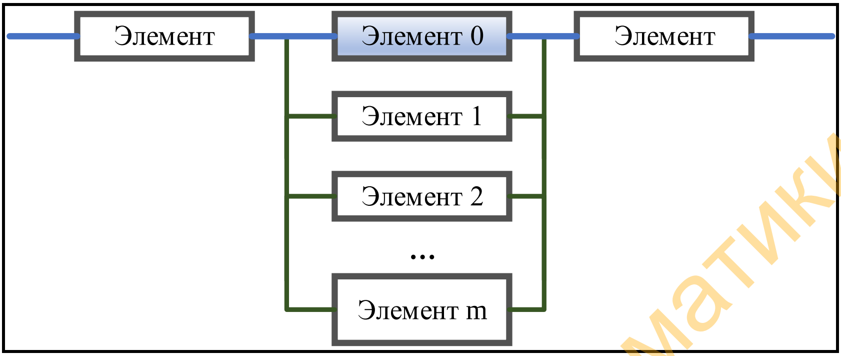


Рис. 3.1. Постоянное резервирование элемента

При ЭМН отдельных элементов имеем

$$P_i(t) = P(t) = e^{-\lambda t}; Q_s(t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{m+1}; P_s(t) = \\ = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{m+1}; m_s = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{1+i}. \qquad (3.1)$$

Резервирование называется общим, если резервируется вся система, состоящая из последовательного соединения n элементов. Схема общего резервирования показана на рис. 3.2. В противном случае (каждый элемент резервируется отдельно) идет речь о раздельном резервировании (см. рис. 3.3).

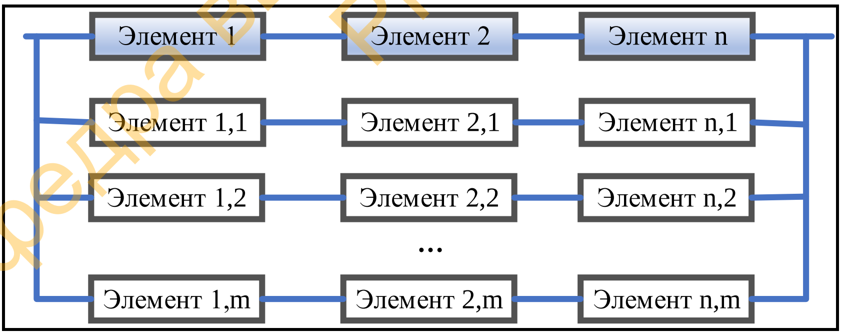


Рис. 3.2. Общее резервирование последовательного соединения

Основная цепь содержит n элементов. Число резервных цепей равно m, т. е. кратность резервирования равна m. Определим количественные характеристики надежности системы с общим резервированием (резервные цепи включены постоянно). Запишем вероятность безотказной работы j-й цепи:

$$Q_s(t) = \left(1 - e^{-\lambda_0 t}\right)^{m+1}; P_s(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda_0 t}\right)^{m+1}; \lambda_0 = \\ = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i. \quad (3.2)$$

Модель надежности j-й цепи резервирования

$$P_j(t) = \prod_{i=1}^{n} P_{ij}(t)\,;\; j = \overline{0, m},$$

где $P_{ij}(t), i = \overline{1, n};\ j = \overline{0, m},$ - вероятность безотказной работы элемента $Э_{ij}$. Вероятность отказа j-й цепи

$$Q_j(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P_{ij}(t).$$

Вероятность отказа системы с общим резервированием

$$Q_S(t) = \prod_{j=0}^{m} \left(1 - \prod_{i=1}^{n} P_{ij}(t)\right). \quad (3.3)$$

Вероятность безотказной работы системы с общим резервированием

$$P_S(t) = 1 - \prod_{j=0}^{m} \left(1 - \prod_{i=1}^{n} P_{ij}(t)\right). \quad (3.4)$$

Частный случай: основная и резервные цепи имеют одинаковую надежность, т.е.

$$P_{ij}(t) = P_i(t).$$

Тогда

$$Q_S(t) = \left(1 - \prod_{i=1}^{n} P_i(t)\right)^{m+1}$$

и функция надежности системы равна

$$P_S(t) = 1 - \left(1 - \prod_{i=1}^{n} P_i(t)\right)^{m+1}.$$

Рассмотрим вариант ЭМН, т. е.

$$P_i(t) = e^{-\lambda_i t}.$$

В этом случае формулы примут следующий вид:

$$Q_s(t) = \left(1 - e^{-\lambda_0 t}\right)^{m+1}; P_s(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda_0 t}\right)^{m+1}; \lambda_0 = \\ = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i. \tag{3.5}$$

где λ_0 – интенсивность отказов цепи, состоящей из n элементов.
Плотность отказов системы с общим резервированием

$$q_s(t) = -\frac{dP_s(t)}{dt} = \lambda_0(m+1)\left(1 - e^{-\lambda_0 t}\right)^m e^{-\lambda_0 t}.$$

Интенсивность отказов системы с общим резервированием

$$\lambda_s(t) = \frac{q_s(t)}{P_s(t)} = \frac{\lambda_0(m+1)\left(1 - e^{-\lambda_0 t}\right)^m e^{-\lambda_0 t}}{1 - (1 - e^{-\lambda_0 t})^{m+1}}.$$

Среднее время безотказной работы резервированной системы

$$m_s = T_0 \cdot \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{1+i}, T_0 = \frac{1}{\lambda_0},$$

где $T_0 = \frac{1}{\lambda_0}$ - среднее время безотказной работы нерезервированной системы.

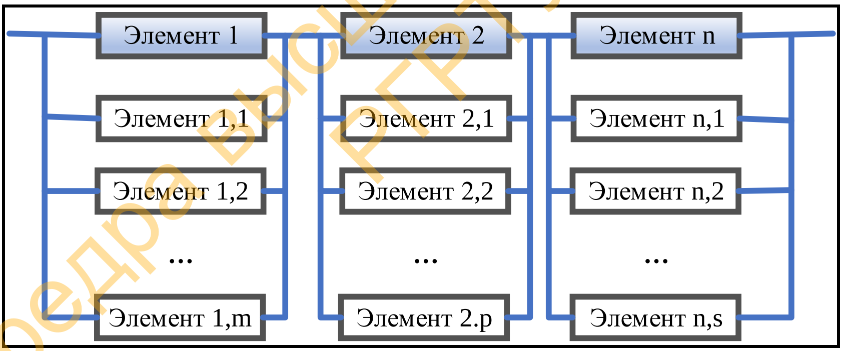


Рис. 3.3. Раздельное резервирование последовательного соединения

3.1. Решение типовых задач

Задача 3.1. Система состоит из 10 последовательно соединенных равнонадёжных элементов, среднее время безотказной работы элемента $T_0 = 1000$ *ч. Предполагается, что справедлива ЭМН элементов системы; основная и резервная системы равнонадёжны. Найти среднее время безотказной работы* *системы m_s, а также плотность отказов $q_s(t)$ и интенсивность отказов $\lambda_s(t)$ в момент времени $t = 50$ ч в следующих случаях: а) нерезервированной системы; б) дублированной системы при включенном резерве.*

Решение. Рассмотрим случай «а». Тогда согласно (2.1):

$$\lambda_s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

где λ_s – интенсивность отказов системы; λ_i - интенсивность отказов i-го элемента; $n = 10$:

$$\lambda_i = \frac{1}{m_i} = \frac{1}{1000} = 0.001;\ i = \overline{1,n}\,;\ \lambda = \lambda_i;\ \lambda_s = \lambda n =$$

$$= 0.001 \cdot 10 = 0{,}01\frac{1}{ч};\ m_s = \frac{1}{\lambda_s} = 100 \text{ ч};$$

$$q_s(t) = \lambda_s(t) \cdot P_s(t);$$

$$\lambda_s(50) = \lambda_s = 0.01\frac{1}{ч};\ P_s(t) = e^{-\lambda_s t};$$

$$q_s(50) = \lambda_s e^{-\lambda_s t} = 0{,}01 \cdot e^{-0{,}01\cdot 50} \approx 6 \cdot 10^{-3}\frac{1}{ч}.$$

Для варианта «б» получаем (3.5):

$$m_s = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{1+j};\ m_s = \frac{1}{0.01}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 150 \text{ ч};$$

$$P_s(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda_0 t}\right)^{m+1};$$

$$P_s(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda_0 t}\right)^2 = 2\,e^{-\lambda_0 t} - e^{-2\lambda_0 t};$$

$$q_s(t) = -\frac{dP_s(t)}{dt} = 2\lambda_0 e^{-\lambda_0 t} \cdot \left(1 - e^{-\lambda_0 t}\right);$$

$$\lambda_s(t) = \frac{q_s(t)}{P_s(t)} = \frac{2\lambda_0 \cdot \left(1 - e^{-\lambda_0 t}\right)}{2 - e^{-\lambda_0 t}}.$$

Задача 3.2. В системе телеуправления применено дублирование канала управления. Интенсивность отказов канала $\lambda = 10^{-2}\frac{1}{ч}$. Найти вероятность безотказной работы системы $P_s(t)$ при $t = 10$ ч, среднее время безотказной работы m_s, плотность отказов $q_s(t)$, интенсивность отказов $\lambda_s(t)$ системы.

Решение. В данном случае $n = 1$; $\lambda_i = \lambda$; $\lambda_0 = n \cdot \lambda = \lambda$; $m = 1$. По формулам (3.5) имеем

$$\text{P}_s(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^2; \ \text{P}_s(10) = 1 - (1 - e^{-0.1})^2.$$

Получим

$$e^{-0.1} = 0{,}9048.$$

Тогда

$$\text{P}_s(10) = 1 - (1 - 0.9048)^2 = 1 - 0.09522 \approx 1 - 0.01 = 0.99\,.$$

Определим m_s. Из формулы расчета среднего времени имеем

$$m_s = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=0}^{1}\frac{1}{1+i} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 150 \text{ ч.}$$

Определим плотность отказа $q_s(t)$. Получим

$$q_s(t\,) = -\frac{dP_s(t)}{dt} = 2\lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

Определим интенсивность отказов $\lambda_s(t)$. Имеем

$$\lambda_s(t) = \frac{q_s(t)}{P_s(t)} = \frac{2\lambda \cdot \left(1 - e^{-\lambda t}\right)}{2 - e^{-\lambda t}}.$$

Задача 3.3. Нерезервированная система управления состоит из $n = 5000$ *элементов. Для повышения надежности системы предполагается провести общее дублирование элементов. Чтобы приближенно оценить возможность достижения заданной вероятности безотказной работы системы* $\text{P}_s(t) = 0.9$ *при* $t = 10$ *ч, необходимо найти среднюю интенсивность отказов одного элемента при предположении отсутствия последействия отказов.*

Решение. Вероятность безотказной работы системы при общем дублировании и равнонадежных элементах равна

$$P_s(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda n t}\right)^2,$$

или

$$P_s(t) = 1 - \left(1 - P^n(t)\right)^2,$$

где

$$P(t) = e^{-\lambda t}.$$

Здесь $P(t)$ – вероятность безотказной работы одного элемента. Так как должно быть

$$1 - \left(1 - P^n(t)\right)^2 \geq 0.9,$$

то

$$P(t) \geq \left(1 - \sqrt{0.1}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Разложив $\left(1 - \sqrt{0.1}\right)^{\frac{1}{n}}$ по степени $\frac{1}{n}$ в ряд и пренебрегая членами ряда высшего порядка малости, получаем

$$\left(1 - \sqrt{0.1}\right)^{\frac{1}{n}} \approx 1 - \frac{1}{5000}\sqrt{0.1} = 1 - 6.32 \cdot 10^{-5}.$$

Учитывая, что $P(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \approx 1 - \lambda t$, получаем

$$1 - \lambda t \geq 1 - 6.32 \cdot 10^{-5}$$

или

$$\lambda \leq \frac{6.32 \cdot 10^{-5}}{t} = \frac{6.32 \cdot 10^{-5}}{10} = 6.32 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{ч}}.$$

3.2. Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.4. Приемник состоит из трех блоков: УВЧ, УПЧ и УНЧ. Интенсивности отказов этих блоков соответственно равны: $\lambda_1 = 4 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{ч}}$; $\lambda_2 = 2.5 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{ч}}$; $\lambda_3 = 3 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{ч}}$. *Рассчитать вероятность безотказной работы приемника при* $t = 100$ *ч для следующих случаев: а) резерв отсутствует; б) имеется общее дублирование приемника в целом.*

Задача 3.5. Для изображенной на рис. 3.4 логической схемы системы определить $P_s(t)$, m_s, $q_s(t)$, $\lambda_s(t)$. *Здесь резерв нагруженный, отказы независимы.*

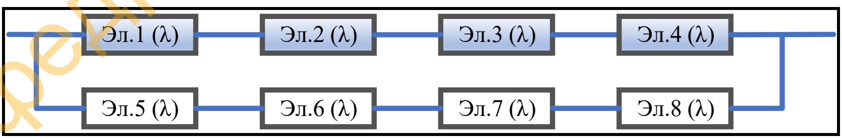


Рис. 3.4. Соединение элементов задачи 3.5

Задача 3.6. В радиопередатчике, состоящем из трех равнонадежных каскадов ($n = 3$), *применено общее постоянное дублирование всего радиопередатчика. Интенсивность отказов каскада равна* $\lambda = 5 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{ч}}$. *Определить* $P_s(t)$, m_s, $q_s(t)$, $\lambda_s(t)$ *радиопередатчика с дублированием.*

Задача 3.7. Для изображенной на рис. 3.5 логической схемы системы определить интенсивность отказов $\lambda_s(t)$. *Здесь резерв нагруженный, отказы независимы.*

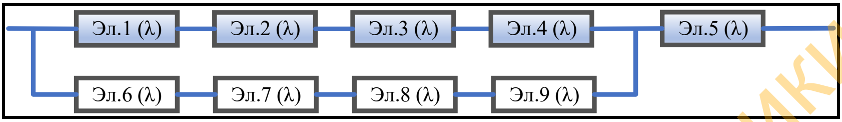


Рис. 3.5. Соединение элементов задачи 3.7

Задача 3.8. Радиоэлектронная аппаратура состоит из трех блоков I, II, III. Интенсивности отказов этих трех блоков соответственно равны: λ_1, λ_2, λ_3. *Требуется определить вероятность безотказной работы аппаратуры* $P_s(t)$ *для следующих случаев: а) резерв отсутствует; б) имеется дублирование радиоэлектронной аппаратуры в целом.*

Задача 3.9. Схема расчета надежности изделия показана на рис. 3.6. Предполагается, что справедлива ЭМН элементов изделия. Интенсивности отказов элементов имеют значения: $\lambda_1 = 0.3 \cdot 10^{-3} \frac{1}{ч}$; $\lambda_2 = 0.7 \cdot 10^{-3} \frac{1}{ч}$. *Найти вероятность безотказной работы изделия в течение времени* $t = 100$ *ч, среднее время безотказной работы изделия, плотность отказа и интенсивность отказов в момент времени* $t = 100$ *ч.*

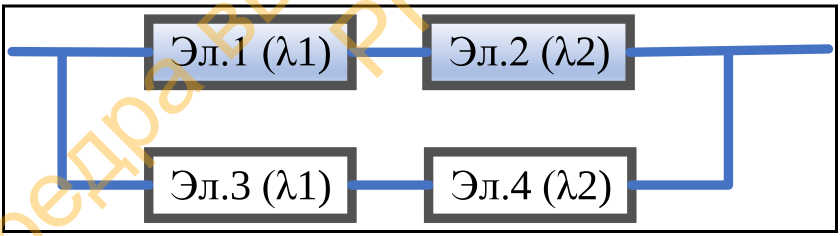


Рис. 3.6. Соединение элементов задачи 3.9

Задача 3.10. В телевизионном канале связи, состоящем из приемника и передатчика, применено общее дублирование. Передатчик и приемник имеют интенсивности отказов $\lambda_{п} = 2 \times 10^{-3} \frac{1}{ч}, \lambda_{пр} = 1 \cdot 10^{-3} \frac{1}{ч}$ *соответственно. Схема канала представлена на рис. 3.7. Определить вероятность безотказной работы канала* $P_s(t)$, *среднее время безотказной работы* m_s, *плотность отказов* $q_s(t)$, *интенсивность отказов* $\lambda_s(t)$.

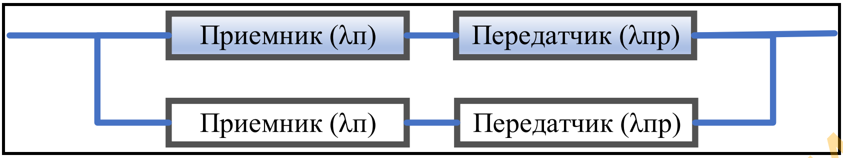


Рис. 3.7. Соединение элементов задачи 3.10

Задача 3.11. Схема расчета надежности изделия приведена на рис. 3.8. Предполагается, что справедлив экспоненциальный закон надежности для элементов изделия. Требуется определить интенсивность отказов изделия, если интенсивности отказов элементов имеют значения λ_1, λ_2.

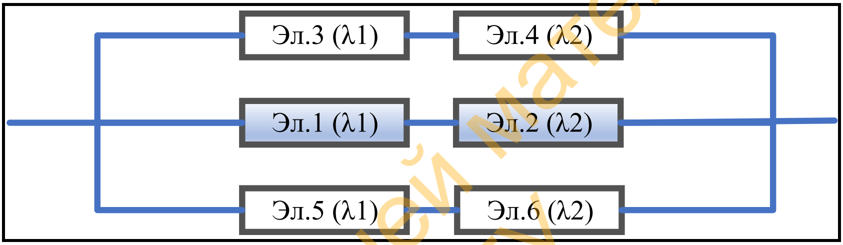


Рис. 3.8. Соединение элементов задачи 3.11

Задача 3.12. Нерезервированная система управления состоит из $n = 4000$ *элементов. Известна требуемая вероятность безотказной работы системы* $P_s(t) = 0.9$ *при* $t = 100$ *ч. Необходимо рассчитать допустимую среднюю интенсивность отказов одного элемента, считая элементы равнонадёжными, для того чтобы приближенно оценить достижение заданной вероятности безотказной работы при отсутствии профилактических осмотров в следующих случаях: а) резервирование отсутствует; б) применено общее дублирование.*

Задача 3.13. Устройство обработки состоит из трех одинаковых блоков (элементов). Вероятность безотказной работы устройства (системы) $P_s(t_i)$ *в течение* $(0, t_i)$ *должна быть не менее* 0.9. *Определить, какова должна быть вероятность безотказной работы каждого блока в течение* $(0, t_i)$ *для случаев: а) резерв отсутствует; б) имеется пассивное общее резервирование с неизменной нагрузкой всего устройства в целом; в) имеется пассивное раздельное резервирование с неизменной нагрузкой по блокам.*

Задача 3.14. Вычислитель состоит из двух блоков, соединенных последовательно и характеризующихся соответственно интенсивностями отказов $\lambda_1 = 120.54 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{ч}}$ *и* $\lambda_2 = 185.66 \times \times 10^{-6} \frac{1}{\text{ч}}$. *Выполнено пассивное общее резервирование с неизменной нагрузкой всей системы (блока 1 и 2) (см. рис. 3.7). Требуется определить вероятность безотказной работы* $P_s(t)$ *вычислителя, среднее время безотказной работы* m_s, *плотность отказов* $q_s(t)$ *и интенсивность отказов* $\lambda_s(t)$ *вычислителя. Определить* $P_s(t)$ *при* $t = 20$ *ч.*

ПЗ 4. Резервирование замещением в режимах облегченного и ненагруженного резервов

В этом случае резервные элементы находятся в облегченном режиме до момента их включения в работу. Надежность резервного элемента в этом случае выше надежности основного элемента, так как резервные элементы находятся в режиме недогрузки до момента их включения в работу.

Вероятность отказа резервированной системы с облегченным резервированием определяется соотношением

$$Q_s(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t}\left(1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{i!}\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right)^i\right); a_i = \\ = \prod_{j=0}^{i-1}\left(j + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right). \tag{4.1}$$

Здесь λ_1 - интенсивность отказов резервного элемента в режиме недогрузки до момента включения его в работу; λ_0 - интенсивность отказов резервируемого элемента в состоянии работы; m - кратность резервирования или количество резервных элементов.

Вероятность безотказной работы системы с облегченным резервированием определяется формулой

$$P_s(t) = 1 - Q_s(t) = e^{-\lambda_0 t}\left(1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{i!}\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right)^i\right).$$

Определим среднее время безотказной работы системы с облегченным резервированием. Имеем

$$m_s = \int_0^{\infty} P_s(\tau)d\tau = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{1+ik}; k = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}. \qquad (4.2)$$

Определим плотность отказа $q_s(t)$ системы с облегченным резервированием. Имеем

$$q_s(t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}\left(\begin{array}{c} 1 + \sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{i!}\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right) - \\ -k\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{(i-1)!}\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right)^{i-1} \end{array}\right).$$

Определим интенсивность отказов $\lambda_s(t)$ системы с облегченным резервированием:

$$\lambda_s(t) = \frac{q_s(t)}{P_s(t)} = \lambda_0\left(1 - \frac{ke^{-\lambda_1 t}\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i\left(1-e^{-\lambda_1 t}\right)^{i-1}}{(i-1)!}}{1 + \sum_{i=1}^{m}\frac{a_i(1-e^{-\lambda_1 t})^{i-1}}{i!}}\right). \qquad (4.3)$$

При $\lambda_1 = 0$ $(k = 0)$ имеем режим ненагруженного (холодного) резерва. Вероятность отказа резервированной системы с ненагруженным резервированием определяется соотношением

$$Q_s(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t}\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}.$$

Вероятность безотказной работы системы с ненагруженным резервом определяется формулой

$$P_s(t) = 1 - Q_s(t) = e^{-\lambda_0 t}\sum_{i=0}^{m}\frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}.$$

Определим среднее время безотказной работы системы с ненагруженным резервом. Имеем

$$m_s = \int_0^{\infty} P_s(\tau)d\tau = \frac{m+1}{\lambda_0}.$$

Определим плотность отказа системы с ненагруженным резервом:

$$q_s(t) = -\frac{dP_s(t)}{dt} = \frac{\lambda_0^{m+1}}{m!} t^m e^{-\lambda_0 t}.$$

Определим интенсивность отказов $\lambda_s(t)$ системы с ненагруженным резервом:

$$\lambda_s(t) = \frac{q_s(t)}{P_s(t)} = \frac{\lambda_0^{m+1} t^m}{m! \sum_{i=0}^{m} \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!}}. \quad (4.4)$$

4.1. Решение типовых задач

Задача 4.1. Система состоит из 10 *равнонадёжных элементов, среднее время безотказной работы элемента* $m_\tau = 1000$ *ч. Предполагается, что справедлив экспоненциальный закон надежности для элементов системы и основная и резервная системы равнонадежны. Найти вероятность безотказной работы системы* $P_s(t)$*, среднее время безотказной работы системы* m_s*, а также плотность отказов* $q_s(t)$ *и интенсивность отказов* $\lambda_s(t)$ *в момент времени* $t = 50$ *ч в следующих случаях: а) нерезервированной системы; б) дублированной системы при включении резерва по способу замещения (ненагруженный резерв).*

Решение. Вариант «а». Воспользуемся выражениями (2.1):

$$\lambda_s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

где λ_s – интенсивность отказов системы; λ_i – интенсивность отказов i-го элемента; $n = 10$,

$$\lambda_i = \frac{1}{m_i} = \frac{1}{1000} = 0.001; i = \overline{1,n}; \lambda_i = \lambda;$$

$$\lambda_s = \lambda \cdot n = 0.001 \cdot 10 = 0.01 \frac{1}{\text{ч}};$$

$$m_s = \frac{1}{\lambda_s} = 100 \text{ ч};$$

$$P_s(t) = e^{-\lambda_s t};\ q_s(t) = \lambda_s \cdot P_s(t);$$

$$\lambda_s(50) = \lambda_s; q_s(50) = \lambda_s \cdot e^{-\lambda_s t} = 0.01 \cdot e^{-0.01 \cdot 50} \approx 6 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{ч}};$$

$$\lambda_s(50) = 0.01 \frac{1}{\text{ч}}.$$

Вариант «б». Воспользуемся выражениями (4.1) и (4.2):

$$m_s = \frac{m+1}{\lambda_s}; m = 1;\ m_s = \frac{2}{0.01} = 200 \text{ ч.}$$

Определяем $\mathrm{P}_s(t)$ по формуле

$$P_s(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^{m} \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!} = e^{-\lambda_0 t}(1 + \lambda_0 t).$$

Так как $\lambda_0 = \lambda_s$, то

$$P_s(t) = e^{-\lambda_s t}(1 + \lambda_s t).$$

Определяем $q_s(t)$. Имеем

$$q_s(t) = -\frac{dP_s(t)}{dt} = -\left(-\lambda_s e^{-\lambda_s t}(1 + \lambda_s t) + \lambda_s e^{-\lambda_s t}\right) = \lambda_s^2 t e^{-\lambda_s t}.$$

Определяем $\lambda_s(t)$. Получим

$$\lambda_s(t) = \frac{q_s(t)}{P_s(t)} = \frac{\lambda_s^2 t e^{-\lambda_s t}}{e^{-\lambda_s t}(1 + \lambda_s t)} = \frac{\lambda_s^2 t}{1 + \lambda_s t}.$$

0пределяем $P_s(50)$, $q_s(50)$, $\lambda_s(50)$. Имеем

$$P_s(50) = e^{-0.01\cdot 50}(1 + 0.01 \cdot 50) = e^{-0.5} \cdot 1.5 = 0.6065 \cdot 1.5 \approx \\ \approx 0.91;$$

$$q_s(50) = 0.01^2 \cdot 50 \cdot e^{-0.01\cdot 50} = 0.01 \cdot 0.5 \cdot e^{-0.5} \approx 3 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{ч}};$$

$$\lambda_s(50) = \frac{q_s(50)}{P_s(50)} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{0.91} \approx 3.3 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{ч}}.$$

Задача 4.2. Радиопередатчик имеет интенсивность отказов $\lambda_0 = 0.4 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{ч}}$. *Его дублирует такой же передатчик, находящийся до отказа основного передатчика в режиме ожидания (в режиме облегченного резерва). В этом режиме интенсивность отказов передатчика* $\lambda_1 = 0.06 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\text{ч}}$. *Вычислить вероятность безотказной работы передающей системы в течение времени* $t = 100$ *ч, а также среднее время безотказной работы* m_s, *плотность отказа* $q_s(t)$ *и интенсивность отказов* $\lambda_s(t)$.

Решение. В рассматриваемом случае кратность резервирования $m = 1$. Используя формулы (4.3) и (4.4), получаем

$$P_s(t) = e^{-\lambda_0 t} \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{1} \frac{a_i}{i!}\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right)^i\right) =$$
$$= e^{-\lambda_0 t} \cdot \left(1 + a_1\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right)\right).$$
$$a_i = \prod_{j=0}^{i-1}\left(j + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right);\ a_1 = \prod_{j=0}^{0}\left(j + \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}.$$

Тогда

$$P_s(t) = e^{-\lambda_0 t}\left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\lambda_0}{\lambda_1}e^{-\lambda_1 t}\right) =$$
$$= \frac{\lambda_0 + \lambda_1}{\lambda_1}e^{-\lambda_0 t}\left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1}e^{-\lambda_1 t}\right).$$

Из (4.3) имеем

$$P_s(100) = e^{-0.4\cdot 10^{-3}\cdot 100t}\left(1 + \frac{0.4\cdot 10^{-3}}{0.06\cdot 10^{-3}}\cdot\left(1 - e^{-0.06\cdot 10^{-3}\cdot 100}\right)\right) =$$
$$= e^{-0.04}\cdot\left(1 + \frac{40}{6}\cdot\left(1 - e^{-0.006}\right)\right) =$$
$$= 0.961\cdot\left(1 + 6.667\cdot(1 - 0.994)\right) \approx 0.999.$$

Определим m_s по формуле (4.4). Получим

$$m_s = \frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=0}^{1}\frac{1}{1 + i\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} = \frac{1}{\lambda_0}\left(1 + \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}}\right) = \frac{1}{\lambda_0}\left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1}\right) =$$
$$= \frac{1}{0.4\cdot 10^{-3}}\left(1 + \frac{0.4\cdot 10^{-3}}{0.4\cdot 10^{-3} + 0.06\cdot 10^{-3}}\right) =$$
$$= 4674 \text{ ч.}$$

Определим $q_s(t)$. Имеем

$$q_s(t) = -\frac{dP_s(t)}{dt} = \lambda_0\left(e^{e^{-\lambda_0 t}}\left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\lambda_0}{\lambda_1}e^{-\lambda_1 t}\right) - e^{-\lambda_0 t}e^{-\lambda_1 t}\right) =$$
$$= \lambda_0 e^{e^{-\lambda_0 t}}\left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \frac{\lambda_0}{\lambda_1}e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_1 t}\right) =$$
$$= \lambda_0 e^{e^{-\lambda_0 t}}\frac{\lambda_0 + \lambda_1}{\lambda_1}\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right).$$

Воспользуемся (4.4) и получим $\lambda_s(t)$:

$$\lambda_s(t) = \frac{q_s(t)}{P_s(t)} = \frac{\lambda_0\left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right)}{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_1} e^{-\lambda_1 t}}.$$

Задача 4.3. Вероятность безотказной работы преобразователя постоянного тока в переменный в течение времени $t = 1000$ *ч равна* 0.95, *т. е.* $P(1000) = 0.95$. *Для повышения надежности системы электроснабжения на объекте имеется такой же преобразователь, который включается в работу при отказе первого (режим ненагруженного резерва). Рассчитать вероятность безотказной работы и среднее время безотказной работы системы, состоящей из двух преобразователей, а также определить плотность отказа* $q_s(t)$ *и интенсивность отказов* $\lambda_s(t)$ *системы.*

Решение. В рассматриваемом случае кратность резервирования $m = 1$. Используя выражение (4.4), получаем

$$P_s(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{i=0}^{m} \frac{(\lambda_0 t)^i}{i!} = e^{-\lambda_0 t}(1 + \lambda_0 t).$$

Так как для отдельного преобразователя имеет место экспоненциальный закон надежности

$$P(t) = e^{-\lambda_0 t},$$

где $P(t)$ - вероятность безотказной работы преобразователя; λ_0 – интенсивность отказов преобразователя в состоянии работы. Тогда справедливо

$$P(1000) = e^{-\lambda_0 \cdot 1000} = 0.95.$$

Окончательно получим $\lambda_0 \cdot 1000 = 0.051$ или

$$\lambda_0 = \frac{0.051}{1000} \approx 0.5 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{ч}}.$$

Тогда из (4.1) имеем

$$P_s(1000) = 0.95(1 + 0.05) = 0.9975.$$

Определим m_s по формуле (4.2). Получим

$$m_s = \frac{m+1}{\lambda_0} = \frac{2}{\lambda_0} = \frac{2}{0.5 \cdot 10^{-4}} = 40000 \text{ ч}.$$

Отметим, что среднее время безотказной работы нерезервированного преобразователя равно

$$m_s = \frac{1}{\lambda_0} = 20000 \text{ ч.}$$

Определим плотность отказов $q_s(t)$ выражением

$$q_s(t) = \frac{\lambda_0^2}{1!} t e^{-\lambda_0 t} = \lambda_0^2 t e^{-\lambda_0 t}.$$

Теперь интенсивность отказов системы $\lambda_s(t)$ равна

$$\lambda_s(t) = \frac{q_s(t)}{P_s(t)} = \frac{\lambda_0^2 t e^{-\lambda_0 t}}{(1+\lambda_0 t)e^{-\lambda_0 t}} = \frac{\lambda_0^2 t}{1+\lambda_0 t}.$$

4.2. Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.4. Система состоит из двух одинаковых элементов. Для повышения ее надежности конструктор предложил дублирование системы по способу замещения с ненагруженным состоянием резерва (рис. 4.1). Интенсивность отказов элемента равна λ. Требуется определить вероятность безотказной работы системы $P_s(t)$, среднее время безотказной работы m_s, плотность отказов $q_s(t)$, интенсивность отказов $\lambda_s(t)$.

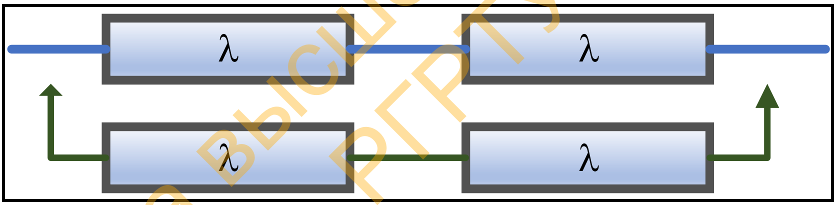


Рис. 4.1. Соединение элементов задачи 4.4

Задача 4.5. Схема расчета надежности изделия приведена на рис. 4.2. Необходимо определить вероятность безотказной работы $P_s(t)$, плотность отказов $q_s(t)$, интенсивность отказов $\lambda_s(t)$ изделия. Найти $\lambda_s(t)$ при $t = 0$ ч.

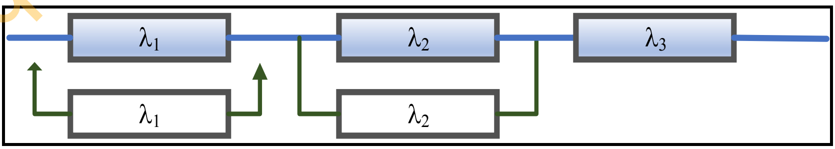


Рис. 4.2. Соединение элементов задачи 4.5

Задача 4.6. Схема расчета надежности системы приведена на рис. 4.3, где А, Б, В, Г *– блоки системы. Определить вероятность безотказной работы $P_s(t)$ системы.*

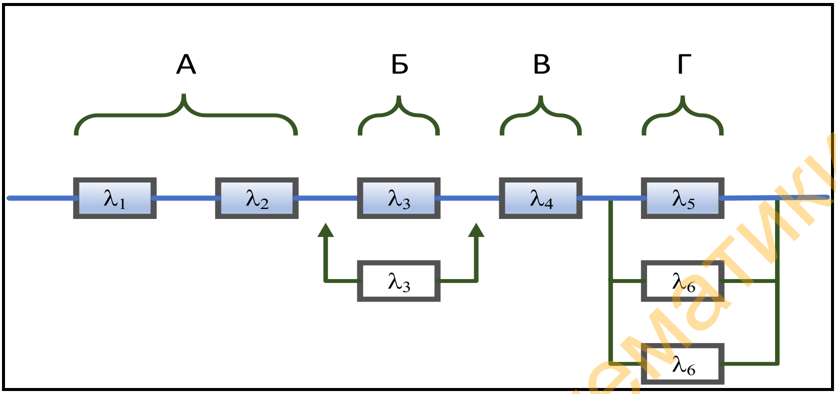


Рис. 4.3. Соединение элементов задачи 4.6

Задача 4.7. Логическая схема надежности системы приведена на рис. 4.4. Найти вероятность безотказной работы $P_s(t)$ *системы.*

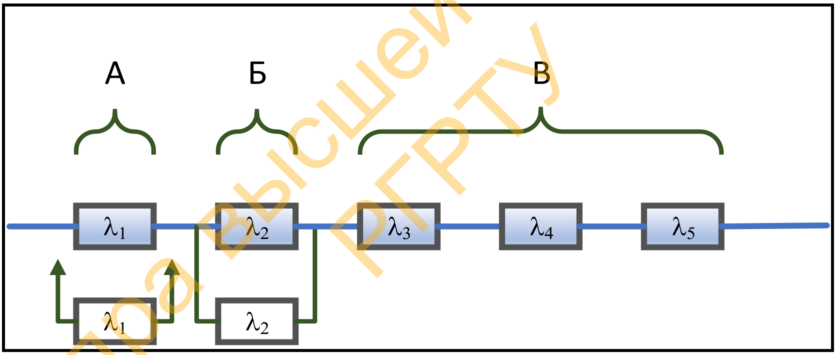


Рис. 4.4. Соединение элементов задачи 4.7

Задача 4.8. Передающее устройство состоит из одного работающего передатчика $\left(\lambda = 8 \cdot 10^{-3} \frac{1}{ч}\right)$ *и одного передатчика в облегченном резерве* $\left(\lambda = 8 \cdot 10^{-4} \frac{1}{ч}\right)$*. Определить вероятность безотказной работы устройства* $P_s(t)$*, среднее время безотказной работы устройства* m_s*. Вычислить* $P_s(t)$ *при* $t = 20$ *ч.*

Задача 4.9. В радиопередающем канале связной системы используются основной передатчик П1, два передатчика П2 *и* П3*, находящиеся в ненагруженном резерве. Интенсивность отказов* *основного работающего передатчика равна* $\lambda_0 = 10^{-3}\frac{1}{ч}$*. С момента отказа передатчика* П1 *в работу включается* П2*, после отказа передатчика* П2 *включается* П3*. При включении резервного передатчика в работу его интенсивность отказов становится равной* λ_0*. Считая переключатель абсолютно надежным, определить вероятность безотказной работы* $P_s(t)$ *радиопередающего канала, среднее время безотказной работы* m_s *канала. Вычислить также* $P_s(t)$ *при* $t = 100$ *ч.*

Задача 4.10. Устройство автоматического поиска неисправностей состоит из двух блоков. Среднее время безотказной работы блоков одинаково и для каждого из них $m = 200$ *ч. Найти среднее время безотказной работы устройства* m_s *для двух случаев: а) имеется ненагруженный резерв всего устройства; б) имеется ненагруженный резерв каждого блока.*

Библиографический список

1. Ильин М.Е. Основы теории надёжности: учеб. пособие / М.Е. Ильин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2020. – 112 с.

2. Половко А. М., Гуров С. В. Основы теории надежности. Практикум. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — 560 с.: ил. ISBN 5-94157-542-4.

3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для студентов втузов. В 2-х ч. Ч. 1. 4-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 304 с., ил.

Оглавление

Основы теории надежности
Составитель
И л ь и н Михаил Евгеньевич

Редактор М.Е. Цветкова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 20.06.22. Формат бумаги 60×84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,0.
Тираж 20 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ.