Алгебраические уравнения

Определение 1. Алгебраическим называется уравнение вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{1}$$

где $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ – некоторые действительные числа.

При этом переменная величина x называется **неизвестным**, а числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – **коэффициентами** уравнения (1), n – **порядком** (или степенью) уравнения.

Определение 2. Число α называется **решением** (или **корнем**) уравнения (1), если при подстановке числа α в уравнение $P_n(x) = 0$ вместо x получается верное равенство $P_n(\alpha) = 0$.

В зависимости от коэффициентов уравнение (1) может иметь единственный действительный корень, несколько корней, или не иметь действительных корней.

Решить уравнение – значит найти все его корни (в школьном курсе рассматриваются только действительные решения) или доказать, что уравнение не имеет решений.

Будем рассматривать уравнение (1) при $n \geq 3$. Для $n = 3$ (кубическое уравнение) и $n = 4$ имеются формулы корней уравнения $P_n(x) = 0$ в радикалах, известные под именем формул Кордано. При $n \geq 5$ уравнение (1) неразрешимо в радикалах, т.е. решение уравнения $P_n(x) = 0$ при $n \geq 5$ нельзя выразить через его коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ с помощью конечного числа арифметических операций (операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения арифметического корня). Доказательство этого утверждения впервые было получено норвежским математиком Абелем в 1826 году.

В отдельных случаях решение алгебраических уравнений высших степеней, в том числе третьей и четвертой, удается найти достаточно просто. Такая возможность полностью определяется коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$ многочлена $P_n(x)$.

Следствие из теоремы Безу. Если $x = \alpha$ является корнем многочлена $P_n(x)$ ($P_n(\alpha) = 0$), то многочлен $P_n(x)$ делится на двучлен $(x - \alpha)$ без остатка, т.е. существует многочлен $F_{n-1}(x)$ такой, что $P_n(x) = (x - \alpha)F_{n-1}(x)$.

Уравнение (1) в этом случае равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x=\alpha, \\ F_{n-1}(x)=0. \end{array}\right.$$

Деление одного многочлена $P_n(x)$ на другой $Q_m(x)$, $m \le n$, можно производить «уголком».

Уравнение $P_n(x)=0$ степени n может иметь не более n действительных корней с учетом кратности. При этом уравнение нечетной степени всегда имеет хотя бы один действительный корень.

Если действительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ является корнями уравнения $P_n(x)=0$, то имеет место тождество $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

Для уравнений высших степеней ($n \ge 3$) справедлива теорема Виета, которую сформулируем в случае $n=3$ и $n=4$.

Если действительные числа x_1, x_2 и x_3 являются корнями кубического уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$, $a \ne 0$, то они удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}. \end{cases}$$

Если действительные числа x_1, x_2, x_3 и x_4 являются корнями уравнения четвертой степени $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, $a \ne 0$, то они удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{e}{a}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + +x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a}. \end{cases}$$

Если рациональное число $x_0 = \dfrac{p}{q}$, где $\dfrac{p}{q}$ – несократимая дробь, является корнем уравнения с целыми коэффициентами, то p должно быть делителем свободного члена

a_n, а q – делителем коэффициента a_0 при старшей степени x^n. В частности, целые корни $x_0 = p$ приведенного уравнения $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена a_n. Это утверждение следует из последнего равенства в (1.27)

Если сумма всех коэффициентов уравнения $P_n(x) = 0$ равна нулю, то уравнение имеет корень $x = 1$.

Например, сумма коэффициентов уравнения $3x^5 + 7x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 7 = 0$ равна нулю, поэтому оно имеет корень $x = 1$.

Если в уравнении сумма коэффициентов при нечетных степенях равна сумме свободного члена и коэффициентов при четных степенях, то уравнение имеет корень $x = -1$.

Например, в уравнении $5x^4 + 3x^3 - x^2 + 7x + 6 = 0$ имеем $5 - 1 + 6 = 3 + 7$, поэтому $x = -1$ – корень данного уравнения.

Рассмотрим отдельные классы алгебраических уравнений высших степеней и изучим методы их решения.

Биквадратные уравнения.

Определение. Биквадратным называется уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \qquad (2)$$

где $a \neq 0$.

Для решения этого уравнения используется замена переменных $y = x^2$, где $y \geq 0$. При этом получается квадратное уравнение $ay^2 + by + c = 0$.

Так как уравнение (2) является уравнением четвертой степени, то оно имеет не более четырех действительных корней. Если y_1 и y_2 - его решения, то исходное биквадратное уравнение будет равносильно совокупности: $\left[\begin{array}{l} x^2 = y_1 \\ x^2 = y_2 \end{array}\right.$.

Метод подбора корня (корней).

Если приведенное алгебраическое уравнение (1) $a_0 \equiv 1$ с целыми коэффициентами имеет целые корни, то их нужно искать среди делителей свободного члена a_n

уравнения (1). Рациональные корни $x_0 = \dfrac{p}{q}$ уравнения (1) с целыми коэффициентами следует искать среди чисел $\dfrac{p}{q}$ таких, что p является делителем свободного члена a_n, а q - делителем коэффициента a_0 при старшей степени x в уравнении (1). Эти свойства лежат в основе метода подбора корней алгебраического уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $x^4 - x^3 - 13x - 15 = 0$.

Решение. Данное уравнение является приведенным и имеет целые коэффициенты. Поэтому целые корни данного уравнения (если они есть) содержатся среди делителей свободного члена $a_4 = -15$: $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$. Легко убедиться, что $x = -1$ является корнем уравнения. Чтобы найти остальные корни разделим многочлен $x^4 - x^3 - 13x - 15$ на двучлен $(x+1)$ «уголком»:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - x^3 - 13x - 15 & x+1 \\ \hline
-\underline{x^4 + x^3} & x^3 - 2x^2 + 2x - 15 \\
\quad -2x^3 - 13x - 15 & \\
\quad -\underline{-2x^3 - 2x^2} & \\
\qquad 2x^2 - 13x - 15 & \\
\qquad -\underline{2x^2 + 2x} & \\
\qquad\quad -15x - 15 & \\
\qquad\quad -\underline{-15x - 15} & \\
\qquad\qquad 0. &
\end{array}
,
$$

Для уравнения $x^3 - 2x^2 + 2x - 15 = 0$ вновь подбором найдем корень $x = 3$, а затем разделим многочлен $x^3 - 2x^2 + 2x - 15$ на двучлен $x - 3$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 2x^2 + 2x - 15 & x-3 \\ \hline
-\underline{x^3 - 3x^2} & x^2 + x + 5 \\
\quad x^2 + 2x - 15 & \\
\quad -\underline{-x^2 - 3x} & \\
\qquad 5x - 15 & \\
\qquad -\underline{5x - 15} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Уравнение $x^2 + x + 5 = 0$ действительных корней не имеет. Таким образом исходное уравнение 4-й степени имеет два действительных корня.

Ответ. $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Метод замены переменных.

Если при замене переменных исходное уравнение упрощается (например, понижается его степень), то смело вводим новую переменную.

Пример 2. Решить уравнение $(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 2) = 4$.

Решение. Если раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то получится уравнение $x^4 + 2x^3 - x - 6 = 0$, которое решать весьма сложно. Хотя оно и является уравнением с целыми коэффициентами, но целых корней как увидим ниже, оно не имеет. Поэтому воспользуемся другим способом: введем новую переменную $y = x^2 + x$ и решим квадратное уравнение $(y+1)(y-2) = 4$. Его корни: $y_1 = 3$ и $y_2 = -2$. Соответственно исходное уравнение будет равносильно совокупности двух уравнений $\left[\begin{array}{l} x^2 + x = 3, \\ x^2 + x = -2. \end{array}\right.$. Решим полученные квадратные уравнения.

$$\begin{aligned} &x^2 + x - 3 = 0, \\ &D = 1 + 12 = 13 > 0, \\ &x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} &x^2 + x + 2 = 0, \\ &D = 1 - 8 = -7 < 0, \\ &\textit{решений нет.} \end{aligned}$$

Таким образом, исходное уравнение 4-й степени имеет два корня $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$. **Ответ.** $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$.

Пример 3. Найти наибольший отрицательный корень уравнения

$$3x^3 + 4\sqrt{3}x^2 + x - 2\sqrt{3} = 0.$$

Решение. Подобрать корни данного уравнения весьма сложно, поэтому воспользуемся следующим приемом: домножим (или разделим) данное уравнение на некоторое число так, чтобы старший член уравнения стал кубом некоторого выражения.

$$3x^3 + 4\sqrt{3}x^2 + x - 2\sqrt{3} = 0 \quad |\times\sqrt{3}$$

$$3\sqrt{3}x^3 + 12x^2 + \sqrt{3}x - 6 = 0$$

Заметим, что $3\sqrt{3}x^3 = \left(\sqrt{3}x\right)^3$, и введем новую переменную $y = \sqrt{3}x$. В результате получим уравнение $y^3 + 4y^2 + y - 6 = 0$, равносильное исходному.

Подбором найдем его корни $y_1 = 1$, $y_2 = -2$ и $y_3 = -3$, которым будут соответствовать корни исходного уравнения $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \dfrac{-2}{\sqrt{3}} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$ и $x_3 = \dfrac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$.

Наибольшим отрицательным корнем является $x_2 = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$.

Ответ. Наибольший отрицательный корень – $x = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$.

Можно ввести еще одну переменную и рассмотреть квадратное уравнение относительно одной из полученных («старой» или «новой») переменных.

Пример 4. Найти наименьший корень уравнения $\left(x^2 + 6x - 5\right)^2 + x^3 - 5x = 0$.

Решение. Преобразуем исходное уравнение следующим образом:

$$\left(x^2 + 6x - 5\right)^2 + x^3 - 5x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2 + 6x - 5\right)^2 + x\left(x^2 - 5\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\left(x^2 + 6x - 5\right)^2 + x\left(x^2 + 6x - 5\right) - 6x^2 = 0$$

Введем новую переменную $y = x^2 + 6x - 5$ и получим уравнение

$$y^2 + xy - 6x^2 = 0.$$

Решим полученное уравнение как квадратное относительно y.

$$y^2 + xy - 6x^2 = 0,$$
$$D = x^2 + 24x^2 = 25x^2 = (5x)^2,$$
$$y = \frac{-x \pm 5x}{2},$$

$y_1 = -3x$ или $y_2 = 2x$.

Вернемся к переменной x, получим два квадратных уравнения.

$$x^2+6x-5=-3x,$$
$$x^2+9x-5=0,$$
$$D=81+20=101,$$
$$x=\frac{-9\pm\sqrt{101}}{2},$$
$$x_1=\frac{-9+\sqrt{101}}{2},\ x_2=\frac{-9-\sqrt{101}}{2}$$

$$x^2+6x-5=2x,$$
$$x^2+4x-5=0,$$
$$\frac{D}{4}=4+5=9,$$
$$x=-2\pm 3,$$
$$x_3=-5,\ x_4=1.$$

Получили 4 решения исходного уравнения. Выберем наименьшее из них. Так как $\sqrt{101}>10$, то $x_2=\dfrac{-9-\sqrt{101}}{2}<\dfrac{-9-10}{2}=-9.5$, поэтому x_2 – наименьшее решение.

Ответ. Наименьшее решение $x_2=\dfrac{-9-\sqrt{101}}{2}$.

Возвратные уравнения

Определение. Возвратным или симметричным называются уравнения вида

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

для которых равны коэффициенты, стоящие на симметричных позициях, то есть $a_k=a_{n-k}$ при $k=0,1,\ldots,n$.

Например, $x^5-9x^4+16x^3+16x^2-9x+1$ является возвратным, так как $a_0=5=a_5$, $a_1=-9=a_4$, $a_2=16=a_3$.

Для возвратных уравнений верны следующие утверждения.

Возвратное уравнение нечетной степени всегда имеет корень $x=-1$ и после деления на двучлен $x+1$ приводится к возвратному уравнению четной степени.

Возвратное уравнение четной степени может быть сведено к уравнению вдвое меньшей степени с помощью введения переменной $y=x+\dfrac{1}{x}$.

Проиллюстрируем данные утверждения на примерах.

Пример 5. Решить уравнение $x^5-9x^4+16x^3+16x^2-9x+1=0$.

Решение. Нетрудно заметить, что данное уравнение является возвратным нечетной степени и, следовательно, имеет корень $x=-1$. Разделим многочлен $x^5-9x^4+16x^3+16x^2-9x+1$ на двучлен $x+1$:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5-9x^4+16x^3+16x^2-9x+1 & \;x+1 \\ \cline{2-2}
 & x^4-10x^3+26x^2-10x+1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
-\underline{x^5+x^4} \\
\quad -10x^4+16x^3+16x^2-9x+1 \\
\quad -\underline{-10x^4-10x^3\qquad\quad} \\
\qquad 26x^3+16x^2-9x+1 \\
\qquad -\underline{26x^3+26x^2} \\
\qquad\qquad -10x^2-9x+1 \\
\qquad\qquad -\underline{-10x^2-10x} \\
\qquad\qquad\qquad\quad x+1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad -\underline{x+1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Остается решить возвратное уравнение 4-й степени $x^4-10x^3 26x^2-10x+1=0$.

Так как $x=0$ не является корнем данного уравнения, то можно разделить обе части данного уравнения на x^2. Получим

$$x^2-10x+26-\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0.$$

Сделаем замену переменных $y=x+\dfrac{1}{x}$. Тогда

$$y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2,$$

т.е. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$.

Получим уравнение $y^2-2-10y+26=0$

(степень уравнения понизилась вдвое!).

Решим квадратное уравнение $y^2-10y+24=0$. По теореме Виета числа $y_1=4$ и $y_2=6$ – являются его корнями. Имеем далее

$$x+\frac{1}{x}=4 \quad \big| \times x \neq 0,$$
$$x^2-4x+1=0,$$
$$D_1=4-1=3,$$
$$x=2\pm\sqrt{3},$$

$$x+\frac{1}{x}=6 \quad \big| \times x \neq 0,$$
$$x^2-6x+1=0,$$
$$D_1=9-1=8,$$
$$x=3\pm 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, исходное уравнение 5-й степени имеет 5 корней: $x_1=-1$, $x_2=2-\sqrt{3}$, $x_3=2+\sqrt{3}$, $x_4=3-2\sqrt{2}$ и $x_5=3+2\sqrt{2}$.

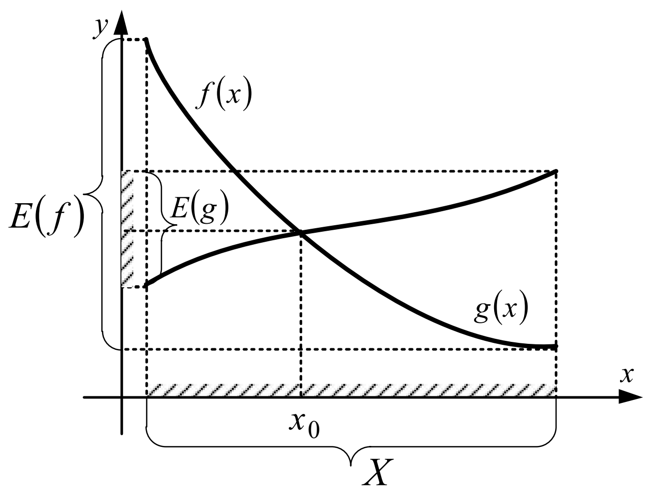
Ответ. $x_1=-1$, $x_2=2-\sqrt{3}$, $x_3=2+\sqrt{3}$, $x_4=3-2\sqrt{2}$ и $x_5=3+2\sqrt{2}$.

Использование монотонности функций и других специальных приемов

Для решения нестандартных алгебраических уравнений приходится привлекать различные приемы – преобразование уравнения к равносильной форме, введение новых переменных, исследование функции $f(x)$ в составе уравнения $f(x)=0$ и т.д.

Решение уравнений вида $f(x)=g(x)$ иногда удобно строить на использовании свойства монотонности функций. В основе этого приема лежит следующая теорема.

Теорема. Пусть уравнение $f(x)=g(x)$ определено на множестве $X\subseteq\mathbf{R}$; функция $f(x)$ является монотонно возрастающей (убывающей) на X, а $g(x)$ – монотонно убывающей (возрастающей). Если $E(f)$, $E(g)$ – области значений $f(x)$ и $g(x)$ на множестве X и $E(f)\cap E(g)\neq\varnothing$, то существует единственная точка $x_0\in X$ такая, что $f(x_0)=g(x_0)$, т.е. уравнение $f(x)=g(x)$ имеет единственное решение.



Данная теорема справедлива для любых уравнений вида $f(x)=g(x)$, а не только для алгебраических.

Пример 6. Решить уравнение $32(x-2)^5+(x+1)^3=96$.

Решение. Степенная функция $y=x^{2n-1}$, $n\in\mathbf{N}$, определена на всей числовой прямой и является строго возрастающей функцией на $\mathbf{R}$. Поэтому левая часть данного уравнения $f(x)=32(x-2)^5+(x+1)^3$ является строго возрастающей функцией на **R** как сумма двух строго возрастающих функций. Правая часть $g(x)=96$ является тождественно постоянной. Поэтому в соответствии с теоремой 1.6 уравнение имеет единственное решение. Нетрудно видеть, что им является $x=3$.

Ответ. $x=3$.

Пример 7. Решить уравнение $(1+x)^8+(1+x^2)^4=2x^4$.

Решение.

$$(1+x)^8+(1+x^2)^4=2x^4 \Leftrightarrow (1+x)^8+1+4x^2+6x^4+4x^6+x^8-2x^4=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Y(x)=(1+x)^8+x^8+4x^6+4x^4+1=0.$$

Но $Y(x)\geq 2$ для любого $x\in R$ и потому уравнение $Y(x)=0$, а значит и исходное (1.41), не имеет решения. **Ответ.** $\varnothing$