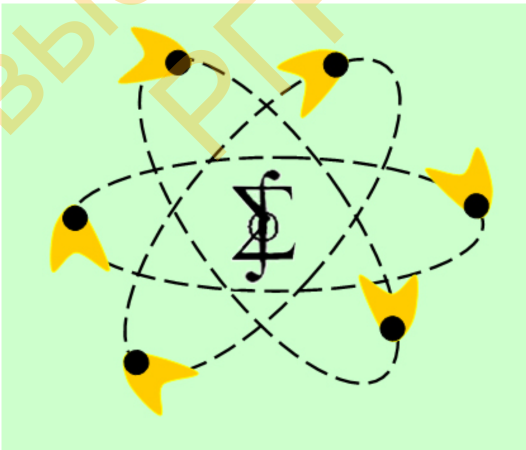
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. В.Ф. УТКИНА

А.И. НОВИКОВ,
С.А. НЕЛЮХИН

ОСНОВНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ



Рязань 2021

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Рязанский государственный радиотехнический университет
им. В.Ф. Уткина

А.И. НОВИКОВ,
С.А. НЕЛЮХИН

ОСНОВНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие

Рекомендовано
Научно-методическим советом РГРТУ
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений
по направлениям подготовки
02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»,
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
(квалификация «бакалавр»)

Рязань 2021

УДК 519.1

Основные алгебраические структуры. Численные методы линейной алгебры: учеб. пособие / А.И. Новиков, С.А. Нелюхин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2021. - 132 с.

ISBN: 978-5-7722-0333-0.

Содержит теоретические сведения об основных алгебраических структурах: группах, кольцах, полях. Рассмотрены численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений: метод квадратных корней, метод LU-разложения, метод прогонки. Разобрано решение большого количества задач по перечисленным темам. Приведены задачи для самостоятельного изучения и закрепления материала.

Предназначено студентам, обучающимся по направлениям подготовки 02.03.01 “Математика и компьютерные науки”, 02.03.03 “Математическое обеспечение и администрирование информационных систем”.

Библиогр.: 4 назв.

Множество, операции над множествами; теория отношений, бинарные отношения, отношение эквивалентности, мощность множества; алгебраическая структура, группа, гомоморфизм групп, кольцо, поле; метод наименьших квадратов, метод квадратных корней, метод LU-разложения, метод прогонки

Печатается по решению научно-методического совета Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина.

Рецензенты: кафедра высшей математики Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. К.В. Бухенский), кафедра математики и методики преподавания математических дисциплин ФГБОУ «Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина» (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. Е.Ю. Лискина)

ISBN: 978-5-7722-0333-0

Предисловие

Учебное пособие предназначено для студентов направлений подготовки “Математическое обеспечение и администрирование информационных систем”, “Математика и компьютерные науки”, “Прикладная математика и информатика” в объеме материала первого семестра дисциплины “Дополнительные главы высшей математики”.

В учебных планах нового поколения предусмотрено увеличение числа часов на самостоятельную работу студентов при одновременном сокращении числа аудиторных часов. В этих условиях возрастает роль учебных пособий, которые помогли бы студенту самостоятельно разобраться в некоторых разделах курса. В данном пособии изложен базовый теоретический материал по трем основным темам: “Элементы алгебры логики, теории множеств и отношений”, “Основные алгебраические структуры: группы, кольца, поля”, “Численные методы линейной алгебры”. Приведены доказательства основных утверждений, некоторые утверждения предложено доказать студентам в качестве упражнений. Приведены решения практических задач, даны задачи для самостоятельного решения.

Глава 1. Введение в дисциплину. Элементы алгебры логики. Элементы теории множеств и отношений

1.1. Понятие высказывания, операции над высказываниями

Математическая логика представляет собой формальный математический аппарат, изучающий различные способы логических рассуждений. Простейшую из формальных логических теорий называют алгеброй высказываний. Из высказываний состоит любое логическое рассуждение.

Определение 1.1. *Высказывание* – утверждение, относительно истинности (справедливости) которого можно сказать, истинно оно или ложно. *Истина* и *ложь* есть *логические значения* высказывания (в теории логики истину отождествляют с единицей, ложь – с нулем).

Если высказывание истинно (ложно) в любой логической ситуации, то оно называется *тождественно истинным (тождественно ложным)* или логической константой, обозначаемой соответственно И(Л) [или 1(0)]. Высказывания, истинные в одних логических ситуациях и ложные в других, называются *переменными высказываниями*.

Высказывания обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \ldots, P, Q, R, \ldots$. Логическое значение высказывания зависит от значений некоторого набора составляющих простых высказываний. Малыми буквами $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$ будем обозначать простые (атомарные) высказывания – *логические переменные.* Из них составляются более сложные высказывания. Очевидно, что логические переменные принимают возможные значения на множестве {истина; ложь}$=\{1;0\}$.

Определение 1.2. Пусть A – высказывание. Логическое значение высказывания A будем обозначать через $\mu(A)$ ($\mu(A) \in \{1;0\}$). Число $\mu(A)$ называют также *степенью истинности* высказывания A.

Пример 1.1. Пусть высказывание $a =$ ”идет дождь”, высказывание $b =$ ”сейчас пасмурно”. Высказывания a, b будем считать атомарными, логическими переменными ($a, b \in \{1;0\}$). Составим следующие, более сложные высказывания:

$A =$ ”идет дождь, следовательно, сейчас пасмурно”,
$B =$ ”дождь не идет, следовательно, сейчас не пасмурно”,
$C =$ ”сейчас не пасмурно, следовательно, дождь не идет”,
$D =$ ”идет дождь, следовательно, сейчас не пасмурно”.

Очевидно, что $\mu(A) = 1$, $\mu(C) = 1$, $\mu(D) = 0$.

Определение 1.3. Высказывания A, B называются *равными,* если при всех возможных значениях логических переменных, образующих эти высказывания, равны их логические значения. Обозначают: $A = B$.

Пусть x_1, x_2 – логические переменные ($x_1, x_2 \in \{1;0\}$), образующие некоторое сложное высказывание A. *Таблицей истинности* высказывания A назовем следующую табл. 1. В первых двух столбцах таблицы стоят возможные наборы значений логических переменных $x_1, x_2 \in \{1;0\}$, то есть 00, 01, 10, 11 (в упорядоченном двоичном виде), а в третьем столбце находятся логические значения высказывания A (в дальнейшем будет показано, как по таблице истинности высказывания восстановить его общий вид).

Таблица 1. *Таблица истинности* A

$x_1, \mu(x_1)$	$x_2, \mu(x_2)$	A, $\mu(A)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Над высказываниями можно производить различные *логические операции*: *отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация (следование), эквиваленция (двойная импликация).*

Определение 1.4. Высказывание $\overline{A}$ (читается “не A”) называется *отрицанием* высказывания A. Высказывание $\overline{A}$ истинно (ложно) только в том случае, когда высказывание A ложно (истинно).

Таблица истинности высказывания $\overline{A}$ – табл. 2.

Таблица 2. *Таблица истинности* $\overline{A}$.

A, $\mu(A)$	$\overline{A}$, $\mu(\overline{A})$
0	1
1	0

Определение 1.5. *Конъюнкцией* $A \wedge B$ двух высказываний A, B (читается “A и B”) называется высказывание, логическое только в том случае,

когда оба высказывания A и B истинны. В остальных случаях конъюнкция $A \wedge B$ ложна.

Нередко можно встретить и такое обозначение конъюнкции: $A \& B$, $A \cdot B$. Конъюнкцию называют также *логическим умножением.*

Определение 1.6. *Дизъюнкцией* $A \vee B$ двух высказываний A, B (читается "A или B") называется высказывание, ложное только в том случае, когда оба высказывания A и B ложные. В остальных случаях дизъюнкция $A \vee B$ истинна.

Определение 1.7. Высказывание $A \to B$ называется *импликацией (следованием)* двух высказываний A, B (читается "из A следует B"). При этом высказывание A называется *посылкой,* а высказывание B – *заключением.* Высказывание $A \to B$ ложное только в том случае, когда посылка A истинна, а заключение B ложно. В остальных случаях импликация $A \to B$ истинна.

Определение 1.8. Высказывание $A \leftrightarrow B$ называется *эквиваленцией (двойной импликацией)* двух высказываний A, B (читается "A эквивалентно B", "A тогда и только тогда, когда B"). Высказывание $A \leftrightarrow B$ истинно только в том случае, когда оба высказывания A, B принимают одни и те же логические значения ($\mu(A) = \mu(B)$). В остальных случаях эквиваленция $A \leftrightarrow B$ ложна.

Таблица истинности высказываний $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$ представлена табл. 3.

Таблица 3. *Таблица истинности* $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$

A, $\mu(A)$	B, $\mu(B)$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Приоритет выполнения логических операций следующий: скобки, а если их нет, то отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция. Логические операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции являются базовыми операциями. Через них импликация и эквиваленция выражаются следующим образом:

$$A \to B = \overline{A} \vee B, \tag{1.1}$$

$$A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A) = (\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee A). \tag{1.2}$$

В справедливости этих двух формул можно убедиться, построив таблицы истинности и сравнив правые и левые части формул (табл. 4, 5, выделены равные по значению столбцы).

Таблица 4. *Таблица истинности* $\overline{A}\vee B$, $A\to B$

A, $\mu(A)$	B, $\mu(B)$	$\overline{A}$, $\mu(\overline{A})$	$\overline{A}\vee B$	$A\to B$
0	0	1	**1**	**1**
0	1	1	**1**	**1**
1	0	0	**0**	**0**
1	1	0	**1**	**1**

Таблица 5. *Таблица истинности* $A\leftrightarrow B$, $(\overline{A}\vee B)\wedge(\overline{B}\vee A)$

A, $\mu(A)$	B, $\mu(B)$	$\overline{A}$, $\mu(\overline{A})$	$\overline{B}$, $\mu(\overline{B})$	$\overline{A}\vee B$	$\overline{B}\vee A$	$(\overline{A}\vee B)\wedge(\overline{B}\vee A)$	$A\leftrightarrow B$
0	0	1	1	1	1	**1**	**1**
0	1	1	0	1	0	**0**	**0**
1	0	0	1	0	1	**0**	**0**
1	1	0	0	1	1	**1**	**1**

Пример 1.2. Пусть x_1, x_2 – логические переменные ($x_1, x_2\in\{1;0\}$). Построить таблицу истинности составного высказывания

$$A=\overline{(x_1\to x_2)\to x_1}\vee\overline{x_1}\wedge x_2$$

и записать его через базовые операции.

Решение. Для составления таблицы истинности нам понадобятся (в соответствии с приоритетом) столбцы истинностных значений следующих высказываний: $x_1, x_2, \overline{x_1}$, $x_1\to x_2$, $(x_1\to x_2)\to x_1$, $\overline{(x_1\to x_2)\to x_1}$, $\overline{x_1}\wedge x_2$, $A=\overline{(x_1\to x_2)\to x_1}\vee\overline{x_1}\wedge x_2$.

Обозначим для краткости $A_1=(x_1\to x_2)\to x_1$. Тогда $A=\overline{A_1}\vee\overline{x_1}\wedge x_2$, и составляем таблицу истинности (табл. 6).

Таблица 6. *Таблица истинности высказывания* A

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$x_1\to x_2$	$A_1=(x_1\to x_2)\to x_1$	$\overline{A_1}$	$\overline{x_1}\wedge x_2$	$A=\overline{A_1}\vee\overline{x_1}\wedge x_2$
0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0

Имеем далее

$A=\overline{(x_1\to x_2)\to x_1}\vee\overline{x_1}\wedge x_2=\overline{(\overline{x_1}\vee x_2)\to x_1}\vee\overline{x_1}\wedge x_2=\overline{\overline{(\overline{x_1}\vee x_2)}\vee x_1}\vee\overline{x_1}\wedge x_2$ – выражение высказывания A через базовые операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции.

1.2. Законы алгебры логики, упрощение высказываний

Пусть x_1, x_2, x_3 – логические переменные ($x_1, x_2, x_3 \in \{1;0\}$).

Свойства (законы) логических операций над высказываниями.

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{L1}:\ x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1,\\ &\boldsymbol{L2}:\ x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1 \end{aligned}\right\}\ \text{(коммутативность)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{L3}:\ x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3,\\ &\boldsymbol{L4}:\ x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 \end{aligned}\right\}\ \text{(ассоциативность)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{L5}:\ x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3),\\ &\boldsymbol{L6}:\ x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \end{aligned}\right\}\ \text{(дистрибутивность)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{L7}:\ x_1 \vee x_1 = x_1,\\ &\boldsymbol{L8}:\ x_1 \wedge x_1 = x_1 \end{aligned}\right\}\ \text{(идемпотентность)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{L9}:\ \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2},\\ &\boldsymbol{L10}:\ \overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \end{aligned}\right\}\ \text{(законы де Моргана)}$$

$\boldsymbol{L11}$: $\overline{\overline{x_1}} = x_1$ (закон инволюции, или двойного отрицания высказывания)

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{L12}:\ x_1 \vee 0 = x_1,\\ &\boldsymbol{L13}:\ x_1 \vee 1 = 1,\\ &\boldsymbol{L14}:\ x_1 \wedge 0 = 0,\\ &\boldsymbol{L15}:\ x_1 \wedge 1 = x_1 \end{aligned}\right\}\ \text{(свойства нейтральности и подавления высказываний)}$$

$\boldsymbol{L16}$: $x_1 \wedge \overline{x_1} = 0$ (закон противоречия)

$\boldsymbol{L17}$: $x_1 \vee \overline{x_1} = 1$ (закон исключения третьего высказывания)

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{L18}:\ x_1 \vee (x_1 \wedge x_2) = x_1,\\ &\boldsymbol{L19}:\ x_1 \wedge (x_1 \vee x_2) = x_1 \end{aligned}\right\}\ \text{(законы поглощения второго высказывания)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{L20}:\ (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) = x_1,\\ &\boldsymbol{L21}:\ (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}) = x_1 \end{aligned}\right\}\ \text{(свойства склеивания высказываний)}$$

$\boldsymbol{L22}$: $x_1 \to x_2 = \overline{x_2} \to \overline{x_1}$ (закон контрпозиции).

Доказательство этих законов основано на построении таблиц истинности для составных высказываний, стоящих в левой и правой частях формул. Покажем, например, свойство дистрибутивности $\boldsymbol{L5}$:
$x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$.

Для построения таблицы истинности введем в обозначение высказывания $A = x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)$, $B = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$ и покажем, что высказывания A, B равны при всех возможных наборах значений логических переменных $x_1, x_2, x_3 \in \{1;0\}$, образующих их. В результате получим табл. 7. Замечаем, что действительно, столбцы 5 и 8 равны по значениям на всех возможных наборах значений логических переменных $x_1, x_2, x_3 \in \{1;0\}$, что и доказывает свойство (аналогично доказывается ***L6***).

Таблица 7. *Таблица истинности высказываний* A, B

x_1	x_2	x_3	$x_2 \wedge x_3$	$A = x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \vee x_3$	$B = (x_1 \vee x_2) \wedge$ $\wedge (x_1 \vee x_3)$
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	0	1	0	**0**	0	1	**0**
0	1	0	0	**0**	1	0	**0**
0	1	1	1	**1**	1	1	**1**
1	0	0	0	**1**	1	1	**1**
1	0	1	0	**1**	1	1	**1**
1	1	0	0	**1**	1	1	**1**
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**

Доказательство свойства де Моргана ***L9***: $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$ основано на построении таблицы истинности (табл. 8).

Таблица 8. *Таблица истинности высказываний* $\overline{x_1 \vee x_2}$, $\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$x_1 \vee x_2$	$\overline{x_1 \vee x_2}$	$\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$
0	0	1	1	0	**1**	**1**
0	1	1	0	1	**0**	**0**
1	0	0	1	1	**0**	**0**
1	1	0	0	1	**0**	**0**

Поясним справедливость свойств нейтральности и подавления высказываний. Обратимся, например, к законам ***L12***: $x_1 \vee 0 = x_1$, ***L13***: $x_1 \vee 1 = 1$. Дизъюнкция двух высказываний истинна, когда хотя бы одно из высказываний истинно, то есть $x_1 \vee 1 = 1$ (второе высказывание истинно). Для дизъюнкции $x_1 \vee 0$ логическое значение будет зависеть, очевидно, от логического значения высказывания x_1.

Обратимся к законам ***L14***: $x_1 \wedge 0 = 0$, ***L15***: $x_1 \wedge 1 = x_1$. Конъюнкция двух высказываний ложна, когда хотя бы одно из высказываний ложно, то есть $x_1 \wedge 0 = 0$ (второе высказывание ложно). Для конъюнкции $x_1 \wedge 1$ логическое значение будет зависеть от логического значения высказывания x_1.

Законы ***L16*** – ***L21*** легко доказываются путем построения таблиц истинности (табл. 9, табл. 10).

Таблица 9. *Таблица истинности для доказательства свойств* ***L16***, ***L17***

x_1	$\overline{x_1}$	$x_1 \wedge \overline{x_1} = 0$	$x_1 \vee \overline{x_1} = 1$
0	1	**0**	**1**
1	0	**0**	**1**

Таблица 10. *Таблица истинности для доказательства свойств* ***L18***, ***L19***

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee (x_1 \wedge x_2)$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \wedge (x_1 \vee x_2)$
0	0	0	**0**	0	**0**
0	1	0	**0**	1	**0**
1	0	0	**1**	1	**1**
1	1	1	**1**	1	**1**

Свойство ***L22***: $x_1 \to x_2 = \overline{x_2} \to \overline{x_1}$ (закон контрпозиции) используется часто при доказательстве некоторого утверждения методом от противного. Так, для доказательства утверждения $A \to B$ (из A следует B) можно доказать справедливость утверждения $\overline{B} \to \overline{A}$.

Пример 1.3. Упростить высказывание

$$A = \overline{(x_1 \to x_2) \to x_1} \vee \overline{x_1} \wedge x_2 \ \ (x_1, x_2 \in \{1;0\}),$$

проверить результат по таблице истинности.

Решение. Сначала упрощаем высказывание $(x_1 \to x_2) \to x_1$, пользуясь дважды формулой (1.1):

$$(x_1 \to x_2) \to x_1 = (\overline{x_1} \vee x_2) \to x_1 = \overline{\overline{x_1} \vee x_2} \vee x_1.$$

Далее имеем последовательно по закону де Моргана ***L9***, двойного отрицания ***L11***, коммутативности ***L1*** и закону поглощения второго высказывания $\overline{x_2}$:

$$\overline{\overline{x_1} \vee x_2} \vee x_1 = (\overline{\overline{x_1}} \wedge \overline{x_2}) \vee x_1 = (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee x_1 = x_1 \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) = x_1.$$

Итак, окончательно по закону поглощения второго высказывания x_2 имеем $A = \overline{x_1} \vee (\overline{x_1} \wedge x_2) = \overline{x_1}$.

Таблица истинности для исходного высказывания $A = \overline{(x_1 \to x_2) \to x_1} \vee \overline{x_1} \wedge x_2$ и полученного (упрощенного) $A = \overline{x_1}$ имеет следующий вид:

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$x_1 \to x_2$	$A_1 = (x_1 \to x_2) \to x_1$	$\overline{A_1}$	$\overline{x_1} \wedge x_2$	$A = \overline{A_1} \vee \overline{x_1} \wedge x_2$
0	0	**1**	1	0	1	0	**1**
0	1	**1**	1	0	1	1	**1**
1	0	**0**	0	1	0	0	**0**
1	1	**0**	1	1	0	0	**0**

Замечаем, что столбцы 3 и 8 совпадают по логическим значениям на всех возможных наборах значений логических переменных $x_1, x_2 \in \{1;0\}$.

1.3. Примеры решения задач

Пример 1.4. Пусть x_1, x_2, x_3 – логические переменные ($x_1, x_2, x_3 \in \{1;0\}$). Построить таблицу истинности высказывания $A = \overline{x_1 \wedge x_2} \vee x_3 \wedge \overline{x_2} \to x_3$.

Решение. Для составления таблицы истинности нам понадобятся (в соответствии с приоритетом) столбцы истинностных значений следующих высказываний: x_1, x_2, x_3 , $\overline{x_2}$, $x_1 \wedge x_2$, $\overline{x_1 \wedge x_2}$, $x_3 \wedge \overline{x_2}$,
$A_1 = \overline{x_1 \wedge x_2} \vee x_3 \wedge \overline{x_2}$, $A = A_1 \to x_3$.

Составляем таблицу истинности высказывания (табл. 11).

Таблица 11. *Таблица истинности высказывания* A

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_2}$	$x_1 \wedge x_2$	$\overline{x_1 \wedge x_2}$	$x_3 \wedge \overline{x_2}$	A_1	$A = A_1 \to x_3$
0	0	0	1	0	1	0	1	**0**
0	0	1	1	0	1	1	1	**1**
0	1	0	0	0	1	0	1	**0**
0	1	1	0	0	1	0	1	**1**
1	0	0	1	0	1	0	1	**0**
1	0	1	1	0	1	1	1	**1**
1	1	0	0	1	0	0	0	**1**
1	1	1	0	1	0	0	0	**1**

Из табл. 11 видно, что высказывание A принимает логическое значение 1 (истина) на следующих наборах логических переменных x_1, x_2, x_3 :

$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1;$ $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1;$

$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1;$ $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0;$

$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1.$

Пример 1.5. Имеются два составных высказывания S_1 , S_2 , S_3 :
S_1=”Первый студент неверно сделал расчет или если второй студент верно сделал расчет, то тогда и третий студент также верно сделал расчет”,
S_2=”Если первый студент верно сделал расчет, то второй студент либо неверно сделал расчет, либо третий студент верно сделал расчет”,

Выделить элементарные высказывания, записать через них высказывания S_1, S_2, построить таблицы истинности высказываний S_1, S_2.

Решение. Элементарными высказываниями в задаче будут высказывания:

A=”первый студент верно сделал расчет”,
B=”второй студент верно сделал расчет”,
C=”третий студент верно сделал расчет”.

Тогда записываем составные высказывания следующим образом:

$$S_1 = \overline{A} \vee (B \to C),\ S_2 = A \to \overline{B} \vee C .$$

Построим таблицы истинности для высказываний S_1, S_2 (табл. 12).

Таблица 12. *Таблица истинности сложных высказываний* S_1, S_2

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$B\to C$	$S_1=\overline{A}\vee(B\to C)$	$\overline{B}\vee C$	$S_2=A\to\overline{B}\vee C$
0	0	0	1	1	1	**1**	1	**1**
0	0	1	1	1	1	**1**	1	**1**
0	1	0	1	0	0	**1**	0	**1**
0	1	1	1	0	1	**1**	1	**1**
1	0	0	0	1	1	**1**	1	**1**
1	0	1	0	1	1	**1**	1	**1**
1	1	0	0	0	0	**0**	0	**0**
1	1	1	0	0	1	**1**	1	**1**

Как видно из табл. 12 совпадают логические значения для высказываний S_1, S_2 при всех наборах значений элементарных высказываний A,B,C, то есть высказывания S_1, S_2 равны ($S_1=S_2$). Это не случайно. Докажем это. Воспользуемся равенством для импликации $E\to F=\overline{E}\vee F$. Имеем

$$S_2=A\to\overline{B}\vee C=\overline{A}\vee\left(\overline{B}\vee C\right)=\overline{A}\vee(B\to C)=S_1.$$

Пример 1.6. Упростить высказывание

$$D=\overline{x_1}\wedge\left(x_2\vee\overline{x_1\wedge x_3\to x_2\wedge x_3}\right)\ (x_1,x_2,x_3\in\{1;0\}),$$

проверить результат по таблице истинности.

Решение. В данной задаче воспользуемся таким обозначением конъюнкции: $x\wedge y=x\cdot y$, что рекомендуется делать при упрощении сложных высказываний. Итак, исходное высказывание D можно записать в виде

$D=\overline{x_1}\cdot\left(x_2\vee\overline{x_1\cdot x_3\to x_2\cdot x_3}\right)$.

Упрощаем высказывание D:

$$D=\overline{x_1}\cdot\left(x_2\vee\overline{x_1\cdot x_3\to x_2\cdot x_3}\right)=\overline{x_1}\cdot\left(x_2\vee\overline{\overline{x_1\cdot x_3}\vee x_2\cdot x_3}\right)=$$

$$=\overline{x_1}\cdot\left(x_2\vee\overline{\overline{x_1\cdot x_3}}\cdot\overline{x_2\cdot x_3}\right)=\overline{x_1}\cdot\left(x_2\vee x_1\cdot x_3\cdot\left(\overline{x_2}\vee\overline{x_3}\right)\right)=$$

$$=\overline{x_1}\cdot\left(x_2\vee x_1\cdot x_3\cdot\overline{x_2}\vee\underbrace{x_1\cdot x_3\cdot\overline{x_3}}_{=0}\right)=\overline{x_1}\cdot\left(x_2\vee x_1\cdot x_3\cdot\overline{x_2}\vee 0\right)=$$

$$=\overline{x_1}\cdot\left(x_2\vee x_1\cdot x_3\cdot\overline{x_2}\right)=\overline{x_1}\cdot x_2\vee\underbrace{\overline{x_1}\cdot x_1\cdot x_3\cdot\overline{x_2}}_{=0}=\overline{x_1}\cdot x_2\vee 0=\overline{x_1}\cdot x_2.$$

Итак, в упрощенном виде высказывание имеет вид $D=\overline{x_1}\wedge x_2$.

Построим таблицу истинности для исходного и полученного высказываний [см. табл. 13, обозначим для краткости высказывание $C=x_1\cdot x_3\to x_2\cdot x_3$, тогда $D=\overline{x_1}\cdot\left(x_2\vee\overline{C}\right)$].

Таблица 13. *Таблица истинности для исходного* D *и упрощенного* $D=\overline{x_1}\wedge x_2$

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_1}$	$x_1\cdot x_3$	$x_2\cdot x_3$	C	$\overline{C}$	$x_2\vee\overline{C}$	$D=\overline{x_1}\cdot\left(x_2\vee\overline{C}\right)$	$D=\overline{x_1}\cdot x_2$
0	0	0	1	0	0	1	0	0	**0**	**0**
0	0	1	1	0	0	1	0	0	**0**	**0**
0	1	0	1	0	0	1	0	1	**1**	**1**
0	1	1	1	0	1	1	0	1	**1**	**1**
1	0	0	0	0	0	1	0	0	**0**	**0**
1	0	1	0	1	0	0	1	1	**0**	**0**
1	1	0	0	0	0	1	0	1	**0**	**0**
1	1	1	0	1	1	1	0	1	**0**	**0**

Из построенной табл. 13 видно, что в последних двух ее столбцах совпадают логические значения на всех наборах значений логических переменных, что и говорит о том, что проведенные упрощения правильные.

Пример 1.7. Даны следующие составные высказывания:
$A=$"студент сдал зачеты по математике, информатике и экономике",
$B=$"если студент не сдал зачет по математике, то он либо сдал зачет по информатике, либо не сдал зачет по экономике",
$C=$"если студент сдал зачет по экономике, то неверно, что он сдал хотя бы один зачет по математике или информатике".

1. Выделить элементарные высказывания, записать через них данные высказывания.

2. Оценить степень истинности всех трех высказываний (то есть найти высказывание $S_1=A\wedge B\wedge C$).

Решение.

1. В данной задаче элементарными (простыми) будут высказывания:
$x_1=$"студент сдал зачет по математике",
$x_2=$"студент сдал зачет по информатике",
$x_3=$"студент сдал зачет по экономике".

В соответствии с этим составные высказывания A, B, C запишутся как $A=x_1\wedge x_2\wedge x_3$, $B=\overline{x_1}\to x_2\vee\overline{x_3}$, $C=x_3\to\overline{x_1\vee x_2}$.

2. Упростим высказывание $S_1=A\wedge B\wedge C=A\cdot B\cdot C$:

$$S_1=A\cdot B\cdot C=\left(x_1\cdot x_2\cdot x_3\right)\cdot\left(\overline{x_1}\to x_2\vee\overline{x_3}\right)\cdot\left(x_3\to\overline{x_1\vee x_2}\right).$$

Раскроем импликацию по формуле (1.1) для 2 и 3 скобок, воспользуемся законом ***L11*** (двойного отрицания) и законом де Моргана ***L9***:

$$S_1=\left(x_1\cdot x_2\cdot x_3\right)\cdot\left(\overline{\overline{x_1}}\vee x_2\vee\overline{x_3}\right)\cdot\left(\overline{x_3}\vee\overline{x_1\vee x_2}\right)=$$
$$=\left(x_1\cdot x_2\cdot x_3\right)\cdot\left(x_1\vee x_2\vee\overline{x_3}\right)\cdot\left(\overline{x_3}\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\right).$$

Теперь перемножим первую скобку на вторую, пользуясь законом дистрибутивности ***L6***:

$$S_1=\left(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_1\vee x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_2\vee x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_3}\right)\cdot\left(\overline{x_3}\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\right).$$

Далее пользуемся законом коммутативности ***L2***, законом идемпотентности ***L8***, законом противоречия ***L16***, свойствами нейтральности и подавления:

$$S_1 = \left(\underbrace{x_1 \cdot x_1}_{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \underbrace{x_2 \cdot x_2}_{x_2} \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \underbrace{x_3 \cdot \overline{x_3}}_{0} \right) \cdot \left(\overline{x_3} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \right) =$$

$$= \left(\underbrace{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}_{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \vee \underbrace{x_1 \cdot x_2 \cdot 0}_{0} \right) \cdot \left(\overline{x_3} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \right) =$$

$$= \left(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee 0 \right) \cdot \left(\overline{x_3} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \right) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \left(\overline{x_3} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \right).$$

Полученное высказывание $S_1 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \left(\overline{x_3} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \right)$ упрощаем, применяя закон дистрибутивности ***L6***, закон противоречия ***L16***, свойство подавления ***L14***:

$$S_1 = x_1 \cdot x_2 \cdot \underbrace{x_3 \cdot \overline{x_3}}_{0} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = x_1 \cdot x_2 \cdot 0 \vee \underbrace{x_1 \cdot \overline{x_1}}_{0} \cdot \underbrace{x_2 \cdot \overline{x_2}}_{0} \cdot x_3 = 0 \vee 0 = 0.$$

Итак, S_1 – тождественно ложное высказывание.

1.4. Задания для самостоятельной работы

Задание 1.1. Составить таблицу истинности для каждой из следующих формул логики высказываний. Какая из формул логики высказываний является тавтологией (тождественно истинным высказыванием)?

а) $\overline{p \wedge q} \to \overline{p} \vee q$ б) $\overline{p \to q} \leftrightarrow p \wedge \overline{q}$

в) $\overline{p} \wedge \overline{q} \to p \vee \overline{q}$ г) $(p \to q) \wedge (p \to \overline{q}) \to \overline{p}$

д) $p \to (p \to \overline{q})$ е) $p \to q \leftrightarrow \overline{p} \vee q$

ж) $(p \to \overline{q}) \to (q \to p)$ з) $p \vee q \vee \overline{r} \to p \wedge \overline{q}$

и) $(\overline{p} \wedge q) \to (r \wedge \overline{r} \to \overline{p} \vee r)$ к) $\overline{p} \vee (q \wedge r) \to (\overline{p} \vee q) \wedge r$

л) $(p \to q) \wedge (p \to r) \to (p \to q \wedge r)$ м) $(p \to q) \vee (p \to r) \to (p \to q \vee r)$

н) $(p \to q \vee r) \to (p \to q \vee p \to r)$ о) $(p \to q \vee r) \vee (\overline{p} \to q \vee r) \to p$

Задание 1.2. Дано высказывание A, построенное из логических переменных x_1, x_2, x_3 при помощи знаков логических операций $\overline{}, \wedge, \vee$. Построить высказывание $\overline{A}$ (отрицание высказывания A).

а) $A = (x_1 \wedge \overline{x_3}) \wedge x_2$ б) $A = \overline{x_1} \wedge (\overline{x_2} \vee x_3)$

в) $A = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \vee x_3$ г) $A = (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_3})$

д) $A = \overline{x_1 \wedge x_2} \vee x_3 \wedge \overline{x_2}$ е) $A = x_1 \wedge x_3 \vee \overline{x_2 \wedge x_3}$

Задание 1.3. Доказать, что следующие формулы логики высказываний являются тавтологиями (построив таблицу истинности и используя законы теории логики).

а) $\overline{p \wedge \overline{q}} \vee p$ б) $\overline{p \to \overline{q}} \to p \wedge q$

в) $\overline{p \to \overline{q}} \to p \vee \overline{p} \vee q$ г) $(p \to q) \wedge (p \to \overline{q}) \to \overline{p}$

д) $\overline{p} \to (p \to \overline{q})$ е) $(p \to q) \leftrightarrow (\overline{q} \to \overline{p})$

ж) $(p \to \overline{q}) \to (q \to p)$ з) $(p \to q) \vee (p \to r) \to (p \to q \vee r)$

и) $(p \wedge q) \to r \leftrightarrow p \to (q \to r)$ к) $(p \to q \vee r) \vee (\overline{p} \to q \vee r) \to p \vee \overline{p}$

Задание 1.4. Даны элементарные (атомарные) высказывания x_1, x_2. Построить таблицу истинности для высказывания D, упростить и проверить результат, построив таблицу истинности для упрощенного высказывания D.

а) $D = \overline{x_1 \wedge x_2} \to x_1 \vee x_2$ б) $D = \overline{\overline{x_1} \vee x_2} \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_1})$

в) $D = \overline{x_1 \wedge x_2} \leftrightarrow \overline{x_1} \vee x_2$ г) $D = x_1 \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \to \overline{x_1} \vee \overline{x_2})$

д) $D = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2)$ е) $D = (x_1 \wedge \overline{x_2} \to x_1) \vee \overline{x_2} \to x_1 \wedge \overline{x_2}$

Задание 1.5. Даны элементарные (атомарные) высказывания x_1, x_2, x_3. Построить таблицу истинности для высказывания D, упростить и проверить результат, построив таблицу истинности для упрощенного высказывания D.

Высказывание D	Высказывание D
а) $D = x_1 \vee x_2 \to x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$	б) $D = (x_1 \wedge \overline{x_3}) \to x_2 \vee \overline{x_1} \wedge x_3$
в) $D = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3} \to x_2 \wedge x_1$	г) $D = (x_1 \wedge x_2) \to x_3 \to (x_1 \to x_2)$
д) $D = (x_1 \to x_3) \to ((x_1 \to x_2) \to x_3)$	е) $D = (x_1 \to x_2) \to (x_1 \wedge x_3 \to x_2 \wedge x_3)$
ж) $D = ((x_1 \to x_2) \wedge (x_1 \to x_3)) \to x_1$	з) $D = (x_1 \to \overline{x_2}) \wedge \overline{x_1 \to x_3} \vee x_2$

Задание 1.6. Учитывая исходные данные примера 1.7, оценить степень истинности высказывания $S_3 = A \vee (B \wedge C)$. (Ответ $S_3 = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \vee \overline{x_3}$.)

1.5. Предикаты и кванторы

1.5.1. Предикаты

Рассмотрим предложение $A = \{x + y = 4\}$, содержащее натуральные переменные x, y. Оно не является высказыванием, так как о нем нельзя сказать, истинно оно или ложно. Оно называется *предикатом* (*предложением с переменными*), зависящим от свободных натуральных переменных x, y. Примерами предикатов являются: B={x+y есть простое число}, C={x есть четное число}; D={z есть наибольший общий делитель целых чисел

x, y}. Если в приведенных выше предложениях заменить переменные их допустимыми значениями, то получатся высказывания, которые могут быть как истинными, так и ложными. Например, при $x=1, y=3$ предикат $A=\{x+y=4\}$ становится истинным высказыванием (равенство $1+3=4$ верно), а предикат B – ложным высказыванием ($1+3$ не является простым числом). Таким образом, приходим к определению.

Определение 1.9. Предложение с переменными, дающее высказывание в результате замены свободных переменных их допустимыми значениями, называется *предикатом*.

По числу входящих свободных переменных различают предикаты одноместные, двухместные, трехместные и т.д. Например, предикат $C(x)$={x есть четное число}— одноместный предикат, зависящий от одной свободной переменной x; предикат $A(x,y)=\{x+y=4\}$ - двухместный предикат, зависящий от двух свободных переменных x, y. При $x=1, y=3$ предикат $A(x,y)=\{x+y=4\}$ принимает вид истинного высказывания $A(1,3)=\{1+3=4\}$.

Предикаты, как и высказывания, принимают логические значения истина и ложь, поэтому над ними можно производить логические операции, аналогичные операциям логики высказываний. Например, образуем из двух одноместных предикатов $P(x), Q(y)$ новый предикат $P(x) \vee Q(y)$. Это предикат уже от двух свободных переменных x, y, и истинностное значение его на любом наборе допустимых значений переменных $x=a, y=b$ определяется как истинностное значение высказывания $P(a) \vee Q(b)$. Аналогично определяются предикаты $P(x) \wedge Q(y)$, $P(x) \rightarrow Q(y)$ и т.д.

Аналогично определяются операции над многоместными предикатами. Например, $R(x,y,z)=P(x) \vee \overline{Q(y,z)} \rightarrow \overline{P(y)}$ есть трехместный предикат, зависящий от трех свободных переменных x, y, z.

Определение 1.10. Предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *тождественно ложным* (*тождественно истинным*), если его логическим значением является ложь (истина) для любого набора допустимых значений входящих в него свободных переменных.

Например, предикат $P(x_1, x_2)=\{x^2+y^2 \geq 0\}$ - тождественно истинный предикат, $Q(x,y)=\left\{\sqrt{2x^2+y^2}<0\right\}$ - тождественно ложный предикат.

1.5.2. Кванторы

Рассмотрим новые операции, которые применяются к предикатам или высказываниям и дают в результате их применения предикаты или высказывания. Эти операции выражают утверждения общности или существования.

Пусть $P(x)$ – одноместный предикат от свободной переменной x. Под выражением $\forall x: P(x)$ подразумевается высказывание, истинное, если $P(x)$ принимает значение истина для всех допустимых значений переменной x, т. е. если предикат $P(x)$ тождественно истинен. Высказывание $\forall x: P(x)$ уже не зависит от х. Символ $\forall x$ (читается как “при всех x”, “для каждого x”), приписываемый слева к предикату $P(x)$, называется квантором общности по переменной x.

Рассмотрим теперь предикат $P(x,y,z)$ от трех свободных переменных x,y,z. Этот предикат при замене свободных переменных y,z их значениями b,c представляет собой одноместный предикат $P(x,b,c)$, зависящий только от свободной переменной x, а выражение $\forall x$: $P(x,b,c)$ есть высказывание. Предикат $\forall x$: $P(x,y,z)$ становится высказыванием в результате задания значений всех входящих в него свободных переменных, кроме x, значит, это есть двухместный предикат от y и z. Этот предикат на данном наборе значений свободных переменных $y=b$, $z=c$ принимает значение истина тогда и только тогда, когда предикат $\forall x$: $P(x,b,c)$, зависящий только от одной свободной переменной x, является тождественно истинным. Переменная x, от которой предикат $\forall x$: $P(x,y,z)$ не зависит, называется *связанной переменной* (в отличие от переменных y,z, которые являются свободными).

Для квантора существования употребляется символ $\exists x$ (читается “существует x такой, что”, “найдется x такой, что”). Пусть $P(x)$ — одноместный предикат, зависящий от одной свободной переменной x. Под выражением $\exists x: P(x)$ понимается высказывание, истинное, если $P(x)$ принимает значение истина хотя бы для одного из допустимых значений переменной x, и ложное в противном случае.

Пусть $P(x,y,z)$ есть трехместный предикат. Если в нем заменить все свободные переменные, кроме x, их допустимыми значениями b,c, то получится предикат $P(x,b,c)$, зависящий только от одной свободной переменной x, а выражение $\exists x: P(x,b,c)$ будет высказыванием. Выражение $\exists x: P(x,y,z)$ есть предикат, зависящий только от y и z, значит, применение квантора к трехместному предикату привело к двухместному предикату. Переменная x, от которой предикат $\exists x: P(x,y,z)$ не зависит, называется связанной переменной. Предикат $\exists x: P(x,y,z)$ принимает значение истина на данном наборе b,c допустимых значений тогда и только тогда, когда одноместный предикат $P(x,b,c)$ выполним.

Для квантора единственности употребляется символ $\exists! x$ (читается “существует единственный x такой, что”, “найдется единственный x такой, что”). Пусть $P(x)$ — одноместный предикат, зависящий от свободной переменной *x*. Под выражением $\exists! x : P(x)$ понимается высказывание, истинное, если $P(x)$ принимает значение истина только при одном допустимом значении переменной *x*, и ложное в противном случае.

1.6. Понятие множества. Операции над множествами

Одним из фундаментальных понятий математики является понятие “множество”. *Множество* – совокупность (набор) объектов одной природы, обладающих некоторым общим свойством. Объекты, объединенные этим общим свойством, называют *элементами* множества и обозначают малыми буквами латинского алфавита: $a, b, c, ..., x, y, z, ..., a_1, a_2, ...$ Множества обозначают заглавными буквами: $A, B, C, ..., X, Y, Z, ...$

Запись $a \in A$ означает, что элемент a принадлежит множеству A, $b \notin A$ означает, что элемент b не принадлежит множеству A. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$. Множество всех элементов, которые могут встретиться в конкретно рассматриваемой задаче, называется *универсальным* и обозначается символом Ω.

Укажем наиболее часто встречающиеся способы задания множеств:

1) непосредственное перечисление элементов: $A_1 = \{a_1, a_2, ..., a_{10}\}$, $A_2 = \{2;3;4;5;-2;-3\}$;
2) указание свойств, которыми обладают все элементы данного множества: $X = \{x \in \Omega : p(x)\}$, где $p(x)$ – свойство элементов $x \in \Omega$. Например, $X_1 = \{x \in R : x > 2\} = (2; +\infty)$, $X_2 = \{(x, y) : x, y \in R, x^2 + y^2 \le 25\}$;
3) при помощи диаграмм Эйлера Венна. Множества представляются как диаграммы (круги), расположенные внутри квадрата (сам квадрат представляет собой множество Ω) (см. рис. 1);

Множество, число элементов которого конечно (например, приведенные выше множества A_1, A_2), называют *конечным.* В противном случае множество называется *бесконечным* (множества X_1, X_2). Если элементы бесконечного множества можно пронумеровать с помощью натурального ряда чисел, то оно называется *счетным.* В противном случае – *несчетным*. Так, множество четных ($A = \{-2;2;4;-4;6;-6;...\}$), натуральных ($\mathbf{N} = \{1,2,3,4,...\}$) чисел – счетное, множество действительных чисел ($\mathbf{R}$) – несчетное. Конечные и счетные множества называются *дискретными множествами*. С этими множествами и работает дискретная математика.

Определение 1.11. Если каждый элемент множества A является также элементом множества B, то множество A называется *подмножеством* множества B и обозначается как $A \subset B$ (или $B \supset A$, множество B содержит в себе множество A).

Определение 1.12. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества А и В называются *равными* и обозначаются как $A = B$. Итак, $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$.

Таким образом, равные множества состоят из одних и тех же элементов (по сути это одно и то же множество, но по-разному обозначенное). Если $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{a_1, a_3, a_4, a_2\}$, $C = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, то $A = B$, $A, B \subset C$.

Любое множество есть подмножество самого себя: $A \subseteq A$. Такое подмножество, как и пустое, называют *несобственными* подмножествами в отличие от всех других подмножеств, которые называют *собственными*. По определению считают, что $\varnothing \subset \Omega$, $\varnothing \subseteq A$.

Определение 1.13. *Объединением* (*суммой*) множеств A, B называется множество $C = A \cup B$, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A или B. Итак,

$$C = A \cup B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пусть $\Omega = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7\}$ $A = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_6\}$, $B = \{x_2; x_4; x_5; x_6; x_7\}$. Тогда

$C = A \cup B = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_6\} \cup \{x_2; x_4; x_5; x_6; x_7\} = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7\}$.

Определение 1.14. *Пересечением* (*произведением*) множеств A, B называется множество $C = A \cap B$, элементы которого принадлежат каждому из множеств A и B. Итак,

$$C = A \cap B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Если $\Omega = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7\}$, $A = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_6\}$, $B = \{x_2; x_4; x_5; x_6; x_7\}$, то

$C = A \cap B = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_6\} \cap \{x_2; x_4; x_5; x_6; x_7\} = \{x_2; x_4; x_6\}$.

Чтобы найти объединение двух множеств, достаточно найти все элементы этих множеств, а чтобы найти пересечение двух множеств, достаточно найти элементы, встречающиеся в каждом из двух множеств.

Определение 1.15. *Дополнением* $\overline{A}$ множества A называется множество, элементы которого принадлежат универсальному множеству Ω и не принадлежат самому множеству A. Итак,

$$\overline{A} = \{x \in \Omega : x \notin A\}.$$

Определение 1.16. *Разностью* множеств A, B называется множество $C = A \setminus B$, состоящее из тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B. Итак,

$$C = A \setminus B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ и } x \notin B\} = A \cap \overline{B}.$$

Таким образом, чтобы найти разность двух множеств, достаточно из первого множества исключить те элементы, которые принадлежат второму множеству. Если $\Omega = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6; x_7\}$, $A = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_6\}$, $B = \{x_2; x_4; x_5; x_6; x_7\}$, то

$C = A \setminus B = \{x_1; x_2; x_3; x_4; x_6\} \setminus \{x_2; x_4; x_5; x_6; x_7\} = \{x_1; x_3\}$.

Определение 1.17. *Симметрической разностью множеств* A, B *называется множество*

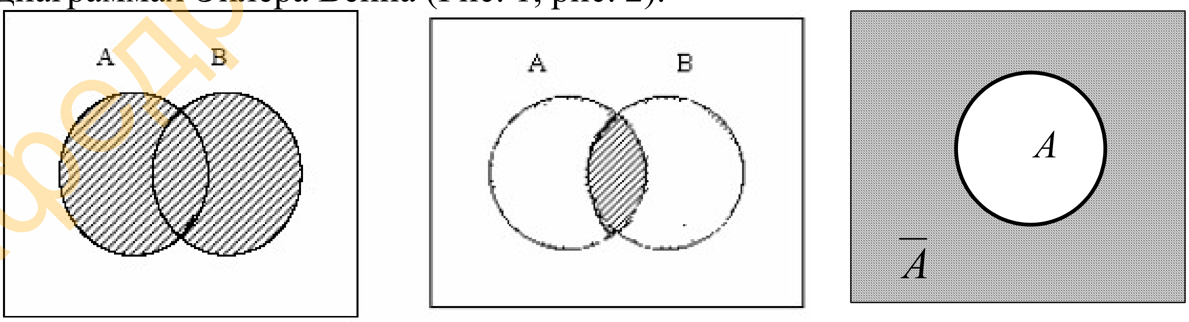
$$C = A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Приведенные выше примеры на нахождение пересечения, объединения, дополнения, разности множеств можно представить в виде табл. 14.

Таблица 14. *Элементы множеств* Ω, $A, B, A \cup B, A \cap B, \overline{A}, \overline{B}, A \setminus B, B \setminus A, A\Delta B$.

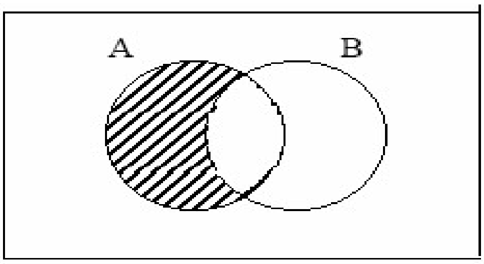
Ω	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Элементы множества Ω
A	x_1	x_2	x_3	x_4		x_6		Элементы множества A
B		x_2		x_4	x_5	x_6	x_7	Элементы множества B
$A \cup B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Выписываем всевозможные элементы множеств A, B
$A \cap B$		x_2		x_4		x_6		Выписываем элементы Ω, встречающиеся в каждом из множеств A, B
$\overline{A}$					x_5		x_7	Выписываем элементы из Ω, которые не встречаются в множестве A
$\overline{B}$	x_1		x_3					Выписываем элементы из Ω, которые не встречаются в множестве B
$A \setminus B$	x_1		x_3					Из множества A удаляем элементы, которые встречаются в множестве B
$B \setminus A$					x_5		x_7	Из множества B удаляем элементы, которые встречаются в множестве A
$A\Delta B$	x_1		x_3		x_5		x_7	$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, выписываем всевозможные элементы множеств $A \setminus B$, $B \setminus A$

Введенные операции над множествами можно проиллюстрировать на диаграммах Эйлера Венна (Рис. 1, рис. 2).

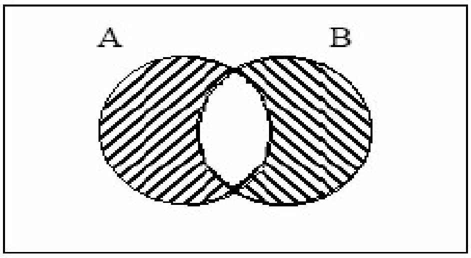


$A \cup B$ $\qquad$ $A \cap B$ $\qquad$ $\overline{A}$

Рис. 1. *Диаграммы Эйлера Венна для множеств* $A \cup B, A \cap B, \overline{A}$



A \ B



A Δ B

Рис. 2. *Диаграммы Эйлера Венна для множеств* $A \setminus B$, $A\Delta B$

Пример 1.8. Пусть $\Omega = \{1;3;4;7;9;10\}$, $A = \{1;7\}$, $B = \{3;4;9;10\}$, $C = \{1;3;4;7\}$. Найти множество $D = (A \cup (B \setminus C)) \cap \overline{A}$.

Решение. Множество $D = (A \cup (B \setminus C)) \cap \overline{A}$ находим по шагам.

1. Находим множество $\overline{A} = \Omega \setminus A = \{1;3;4;7;9;10\} \setminus \{1;7\} = \{3;4;9;10\}$.
2. Затем имеем $B \setminus C = \{3;4;9;10\} \setminus \{1;3;4;7\} = \{9;10\}$.
3. Множество $A \cup (B \setminus C)$: $\{1;7\} \cup \{9;10\} = \{1;7;9;10\}$.
4. Окончательно $D = (A \cup (B \setminus C)) \cap \overline{A} = \{1;7;9;10\} \cap \{3;4;9;10\} = \{9;10\}$.

1.7. Свойства операций над множествами

Для операций над множествами существует приоритет их выполнения (при отсутствии ограничительных скобок): дополнение, пересечение, объединение, разность, симметрическая разность. Также существует ряд свойств (законов теории множеств), позволяющих упрощать теоретико-множественные выражения. Приведем эти свойства и покажем их справедливость.

$$\left.\begin{aligned} &\textbf{S1}:\ A \cup B = B \cup A, \\ &\textbf{S2}:\ A \cap B = B \cap A \end{aligned}\right\} \text{(коммутативность)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\textbf{S3}:\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \\ &\textbf{S4}:\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{aligned}\right\} \text{(ассоциативность)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\textbf{S5}:\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ &\textbf{S6}:\ A \cap (B \cup C) = A \cdot (B \cup C) = A \cdot B \cup A \cdot C \end{aligned}\right\} \text{(дистрибутивность)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\textbf{S7}:\ A \cup A = A, \\ &\textbf{S8}:\ A \cap A = A \end{aligned}\right\} \text{(идемпотентность)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\textbf{S9}:\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \\ &\textbf{S10}:\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}\right\} \text{(законы де Моргана)}$$

$\textbf{S11}$: $\overline{\overline{A}} = A$ (закон инволюции, или двойного дополнения)

$$\left.\begin{aligned} &\textbf{\textit{S12}}: A\cup\varnothing=A,\\ &\textbf{\textit{S13}}: A\cup\Omega=\Omega,\\ &\textbf{\textit{S14}}: A\cap\varnothing=\varnothing,\\ &\textbf{\textit{S15}}: A\cap\Omega=A \end{aligned}\right\}\text{ (свойства нейтральности и подавления)}$$

$\textbf{\textit{S16}}: A\cap\overline{A}=\varnothing$ (закон противоречия)

$\textbf{\textit{S17}}: A\cup\overline{A}=\Omega$ (закон исключения третьего множества)

$$\left.\begin{aligned} &\textbf{\textit{S18}}: A\cup(A\cap B)=A,\\ &\textbf{\textit{S19}}: A\cap(A\cup B)=A \end{aligned}\right\}\text{ (свойства поглощения)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\textbf{\textit{S20}}: (A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A,\\ &\textbf{\textit{S21}}: (A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})=A \end{aligned}\right\}\text{ (свойства склеивания)}$$

Докажем законы де Моргана, например формулу ***S9***: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$. Обозначим множества $E=\overline{A\cup B},\ F=\overline{A}\cap\overline{B}$. Требуется доказать, что $E=F$.

Докажем, во-первых, включение $E\subset F$. Пусть элемент $x\in E$. Это означает, что элемент $x\in\overline{A\cup B}$, а значит, $x\notin(A\cup B)$. Так как $x\notin(A\cup B)$, то $x\notin A, x\notin B$, а значит, $x\in\overline{A}, x\in\overline{B}$. В итоге, так как $x\in\overline{A}, x\in\overline{B}$, то элемент $x\in\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$, то есть элемент $x\in F$. Итак, получили, что если $x\in E$, то $x\in F$, откуда следует включение $E\subset F$.

Докажем включение $F\subset E$. Пусть элемент $x\in F$, то есть $x\in\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$. Это означает, что $x\notin A, x\notin B$, откуда $x\notin(A\cup B)$, то есть $x\in\overline{A\cup B}=E$. Итак, получили, что если $x\in F$, то $x\in E$, откуда следует включение $F\subset E$.

Из включений $E\subset F$, $F\subset E$ следует равенство $E=F$.

Доказываем свойство ***S18***:

$$A\cup(A\cap B)=\left|\textbf{\textit{S15}}: A=A\cap\Omega\right|=(A\cap\Omega)\cup(A\cap B)=$$

$$=A\cap(\Omega\cup B)=\left|\textbf{\textit{S13}}: \Omega\cup B=\Omega\right|=A\cap\Omega=A.$$

Рассмотрим на примерах, как применяются законы теории множеств.

Пример 1.9. Упростить множество $S=\overline{\overline{A}\cup\overline{B}\setminus A\cap\overline{\overline{B}}}$.

Решение. Напомним, что $S_1\setminus S_2=S_1\cap\overline{S_2}$. Тогда, учитывая приоритет операций, имеем

$$S=\overline{\overline{A}\cup\overline{B}\setminus A\cap\overline{\overline{B}}}=\overline{\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\cap\overline{A\cap\overline{\overline{B}}}}.$$

Далее, применяя последовательно свойства ***S10***, ***S11***, получаем:

$$\overline{A\cap\overline{\overline{B}}}=\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}=\overline{A}\cup B,$$

$$S=\overline{\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\cap\left(\overline{A}\cup B\right)}=\overline{\overline{A}\cap\left(B\cup\overline{B}\right)}=\overline{\overline{A}\cap\Omega}=\overline{\overline{A}}=A.$$

Итак, окончательно $S = A$.

Пример 1.10. Показать, что

$$\left(A \cup \overline{B}\right) \setminus \left(\overline{A} \cup \left(B \cap \overline{C}\right)\right) = A \cap \left(\overline{B} \cup C\right),$$

используя свойства операций над множествами.

Решение. Обозначим $D = \left(A \cup \overline{B}\right) \setminus \left(\overline{A} \cup \left(B \cap \overline{C}\right)\right)$, $E = A \cap \left(\overline{B} \cup C\right)$ и покажем, что $D = E$ при помощи свойств операций над множествами. Имеем согласно формуле $S_1 \setminus S_2 = S_1 \cap \overline{S_2}$ и свойству ***S10*** следующее:

$$D = \left(A \cup \overline{B}\right) \setminus \left(\overline{A} \cup \left(B \cap \overline{C}\right)\right) = \left(A \cup \overline{B}\right) \cap \overline{\overline{A} \cup \left(B \cap \overline{C}\right)} = \left(A \cup \overline{B}\right) \cap \overline{\overline{A}} \cap \overline{B \cap \overline{C}} =$$

$$= \underbrace{\left(A \cup \overline{B}\right) \cap A}_{A} \cap \left(\overline{B} \cup C\right) = A \cap \left(\overline{B} \cup C\right) = E.$$

1.8. Примеры решения задач

Пример 1.11. Используя определения операций над множествами, докажите следующие включения:

1) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$,
2) $\left(A \subseteq B\right) \to \left(\forall C : A \cap C \subseteq B \cap C\right)$,
3) $\left(A \cup B = \Omega \wedge A \cap B = \varnothing\right) \to \left(A = \overline{B}\right)$.

Решение

1. Во-первых, по определению пересечения двух множеств, если $x \in \left(A \cap B\right)$, то $x \in A, x \in B$, откуда следует, что $x \in A$, то есть $A \cap B \subseteq A$ (доказана первая часть включения). Во-вторых, если $x \in A$, то по определению объединения двух множеств получаем $x \in \left(A \cup B\right)$, откуда следует второе включение $A \subseteq A \cup B$.

2. По условию имеем включение $A \subseteq B$, что по определению включения означает: если элемент $x \in A$, то элемент $x \in B$. Докажем утверждение $\forall C : A \cap C \subseteq B \cap C$. Возьмем произвольный элемент $x \in \left(A \cap C\right)$. Тогда по определению пересечения $x \in A,\ x \in C$. Но так как $x \in A$, то и $x \in B$ (так как у нас по условию $A \subseteq B$). В результате имеем $x \in B,\ x \in C$, а значит, и $x \in \left(B \cap C\right)$. Утверждение доказано.

3. По условию имеем $A \cup B = \Omega \wedge A \cap B = \varnothing$. Докажем равенство $A = \overline{B}$ двойным включением: $A \subset \overline{B},\ \overline{B} \subset A$.

Во-первых, докажем включение $A \subset \overline{B}$, то есть если $x \in A$, то $x \in \overline{B}$. Так как по условию $A \cap B = \varnothing$, и у нас по условию $x \in A$, то $x \notin B$, что равносильно тому, что $x \in \overline{B}$.

Во-вторых, докажем включение $\overline{B} \subset A$, то есть если $x \in \overline{B}$, то $x \in A$. Если $x \in \overline{B}$, то $x \notin B$. Так как $A \cup B = \Omega$, то $x \in A$.

Пример 1.12. Симметрической разностью множеств A, B называется множество $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. Доказать теоретико-множественные равенства, используя свойства операций над множествами:

1) $A\Delta A=\varnothing$, 2) $A\Delta B=\overline{A}\Delta\overline{B}$,

3) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

Решение. 1. Учитывая определение симметрической разности и очевидное равенство $A\setminus A=\varnothing$, получаем $A\Delta A=(A\setminus A)\cup(A\setminus A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$.

2. Рассмотрим левую часть проверяемого равенства:

$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Правая часть имеет вид $\overline{A}\Delta\overline{B}=(\overline{A}\setminus\overline{B})\cup(\overline{B}\setminus\overline{A})$. Учитывая равенства

$$\begin{cases}\overline{A}\setminus\overline{B}=\overline{A}\cap\overline{\overline{B}}=\overline{A}\cap B=B\cap\overline{A}=B\setminus A,\\ \overline{B}\setminus\overline{A}=\overline{B}\cap\overline{\overline{A}}=\overline{B}\cap A=A\cap\overline{B}=A\setminus B,\end{cases}$$

получим $\overline{A}\Delta\overline{B}=(B\setminus A)\cup(A\setminus B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\Delta B$.

3. Упростим левую часть равенства, использовав закон дистрибутивности:

$$A\cap(B\Delta C)=A\cap((B\setminus C)\cup(C\setminus B))=A\cap\left((B\cap\overline{C})\cup(C\cap\overline{B})\right)=$$

$$=A\cap B\cap\overline{C}\cup A\cap C\cap\overline{B}=A\cdot B\cdot\overline{C}\cup A\cdot C\cdot\overline{B}.$$

В конце упрощения заменили операцию пересечения на операцию произведения (для наглядного представления операции). Упростим правую часть равенства:

$$(A\cap B)\Delta(A\cap C)=(A\cap B\setminus A\cap C)\cup(A\cap C\setminus A\cap B)=$$

$$=\left(A\cap B\cap\overline{A\cap C}\right)\cup\left(A\cap C\cap\overline{A\cap B}\right)=\left(A\cdot B\cdot\overline{A\cap C}\right)\cup\left(A\cdot C\cdot\overline{A\cap B}\right).$$

Используя закон де Моргана $\overline{S_1\cap S_2}=\overline{S_1}\cup\overline{S_2}$ для множеств, закон дистрибутивности (раскрытия скобок), получаем

$$\left(A\cdot B\cdot\overline{A\cap C}\right)\cup\left(A\cdot C\cdot\overline{A\cap B}\right)=\left(A\cdot B\cdot(\overline{A}\cup\overline{C})\right)\cup\left(A\cdot C\cdot(\overline{A}\cup\overline{B})\right)=$$

$$=A\cdot B\cdot\overline{A}\cup A\cdot B\cdot\overline{C}\cup A\cdot C\cdot\overline{A}\cup A\cdot C\cdot\overline{B}.$$

Далее, используя закон коммутативности для множеств $S_1\cdot S_2=S_2\cdot S_1$ и закон исключения третьего множества ($S\cdot\overline{S}=\varnothing$), получаем

$$\underbrace{A\cdot\overline{A}\cdot B}_{=\varnothing}\cup A\cdot B\cdot\overline{C}\cup\underbrace{A\cdot\overline{A}\cdot C}_{=\varnothing}\cup A\cdot C\cdot\overline{B}=A\cdot B\cdot\overline{C}\cup A\cdot C\cdot\overline{B}.$$

Полученная упрощенная правая часть совпадает с упрощенной левой частью, что и доказывает справедливость равенства.

Пример 1.13. Используя основные законы (свойства) теории множеств, докажите следующие равенства:

1) $(A\setminus B)\cup(A\cap B)=A$,

2) $(A\setminus B)\cup(\overline{A}\setminus\overline{B})=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

Решение

1. Упрощаем левую часть данного равенства:

$$\left(A\setminus B\right)\cup\left(A\cap B\right)=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(A\cap B\right)=\left(A\cdot\overline{B}\right)\cup\left(A\cdot B\right).$$

Далее используем закон дистрибутивности, вынося множество А (как множитель) слева за скобки, используя закон исключения третьего множества, получаем:

$$\left(A\cdot\overline{B}\right)\cup\left(A\cdot B\right)=A\cdot\left(\overline{B}\cup B\right)=A\cdot\Omega=A.$$

2. Упрощаем левую часть:

$$\left(A\setminus B\right)\cup\left(\overline{A}\setminus\overline{B}\right)=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{\overline{B}}\right)=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right).$$

Раскрываем скобки по закону дистрибутивности:

$$\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right)=\left(A\cup\overline{A}\right)\cap\left(A\cup B\right)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{A}\right)\cap\left(\overline{B}\cup B\right)=$$

$$=\Omega\cap\left(A\cup B\right)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{A}\right)\cap\Omega=\left(A\cup B\right)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{A}\right)=\left(A\cup B\right)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right).$$

Упростим теперь правую часть равенства:

$$\left(A\cup B\right)\setminus\left(A\cap B\right)=\left(A\cup B\right)\cap\overline{A\cap B}=\left(A\cup B\right)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=$$

$$=\left(A\cup B\right)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right).$$

Упрощенная правая часть совпала с левой частью, что и доказывает справедливость равенства.

Пример 1.14. Используя основные законы (свойства) теории множеств, упростить множество:

1) $E=A\cap B\cap C\setminus\overline{A\cap\overline{B}\cap\overline{C}}$,

2) $E=\overline{\left(A\setminus B\right)\cup C}\cap\left(A\cup\overline{B\cup C}\right)$,

3) $E=\left(A\cup C\right)\setminus\left(A\cup\overline{B}\cup C\right)$.

Решение

1. Сначала используем формулу разности двух множеств ($S_1\setminus S_2=S_1\cdot\overline{S_2}$):

$$E=A\cap B\cap C\setminus\overline{A\cap\overline{B}\cap\overline{C}}=A\cap B\cap C\cap\overline{\overline{A\cap\overline{B}\cap\overline{C}}}.$$

Затем используем закон двойного дополнения для множества, закон коммутативности и закон противоречия ($B\cap\overline{B}=\varnothing$):

$$E=A\cap B\cap C\setminus\overline{A\cap\overline{B}\cap\overline{C}}=A\cap B\cap C\cap\overline{\overline{A\cap\overline{B}\cap\overline{C}}}=$$

$$=A\cap B\cap C\cap A\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\left(\underbrace{A\cap A}_{=A}\right)\cap\left(\underbrace{B\cap\overline{B}}_{=\varnothing}\right)\cap\left(\underbrace{C\cap\overline{C}}_{=\varnothing}\right)=A\cap\varnothing=\varnothing.$$

Итак, окончательно имеем $E=\varnothing$.

2. Упрощаем множество, используя свойства операций над множествами:

$$E=\overline{(A\setminus B)\cup C}\cap\left(A\cup\overline{B\cup C}\right)=\overline{A\setminus B}\cap\overline{C}\cap\left(A\cup\overline{B\cup C}\right)=$$

$$=\overline{A\cap\overline{B}}\cap\overline{C}\cap\left(A\cup\overline{B\cup C}\right)=\left(\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}\right)\cap\overline{C}\cap\left(A\cup\overline{B}\cap\overline{C}\right)=$$

$$=\left(\overline{A}\cup B\right)\cap\overline{C}\cap\left(A\cup\overline{B}\cap\overline{C}\right)=\left(\overline{A}+B\right)\cdot\overline{C}\cdot\left(A+\overline{B}\cdot\overline{C}\right)=$$

$$=\left(\overline{A}\cdot\overline{C}+B\cdot\overline{C}\right)\cdot\left(A+\overline{B}\cdot\overline{C}\right)=\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot A+\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+B\cdot\overline{C}\cdot A+B\cdot\overline{C}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}=$$

$$=\underbrace{\overline{A}\cdot A}_{=\varnothing}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot\underbrace{\overline{C}\cdot\overline{C}}_{=\overline{C}}\cdot\overline{B}+A\cdot B\cdot\overline{C}+\underbrace{B\cdot\overline{B}}_{=\varnothing}\cdot\overline{C}\cdot\overline{C}=\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot\overline{B}+A\cdot B\cdot\overline{C}=$$

$$=\overline{C}\cdot\left(\overline{A}\cdot\overline{B}+A\cdot B\right).$$

Итак, окончательно имеем $E=\overline{C}\cdot\left(\overline{A}\cdot\overline{B}+A\cdot B\right)$.

3. Упрощаем множество, используя свойства операций над множествами:

$$E=(A\cup C)\setminus\left(A\cup\overline{B}\cup C\right)=(A\cup C)\cap\overline{A\cup\overline{B}\cup C}=(A\cup C)\cap\overline{A}\cap\overline{\overline{B}}\cap\overline{C}=$$

$$=\underbrace{A\cdot\overline{A}}_{=\varnothing}\cdot B\cdot\overline{C}+\underbrace{C\cdot\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}}_{=\varnothing}=\varnothing+\varnothing=\varnothing.$$

1.9. Задания для самостоятельной работы

Задание 1.7. Выяснить, какие из следующих множеств конечны, а какие бесконечны. Для конечного множества перечислить все его элементы.

а) $B=\left\{x\in\mathbf{R}:\ x^2-3x+2\geq 0\right\}$;

б) $C=\left\{x\in\mathbf{N}:\ x^2-3|x|+2=0\right\}$;

в) $E=\{$множество всех последовательностей, содержащих все числа 1,2,3,4 и только эти числа, в которых четные и нечетные числа чередуются$\}$;

г) $F=\left\{x\in\mathbf{N}:\ x \text{ делится на } 6\right\}$;

д) $G=\left\{x\in\mathbf{N}:\ \exists y\in\mathbf{N}\wedge 2x+y=8\right\}$;

е) $H=\left\{x\in\mathbf{N}:\ \exists y\in\mathbf{Z}\wedge 2x+y=8\right\}$;

ж) $I=\left\{x\in\mathbf{N}:\ \exists y\in\mathbf{N}\wedge 2x+4y=11\right\}$.

Задание 1.8. Выяснить, равны ли множества:

а) $A=\{-2,0,2,3,2\}$, $B=\{2,0,-2,3\}$;

б) $A=\{\{-2\},\{0,2\},\{3,2\}\}$, $B=\{\{2,0\},\{-2\},\{2,3\}\}$;

в) $A=\{\{-2\},\{0,2\},\{3,2\}\}$, $B=\{\{2,0\},\{-2\},\{2,-2\}\}$;

г) $A=\{\{-2\},\{2\},\{3,2\}\}$, $B=\{\{2,3\},\{-2\},\{2,2\}\}$;

д) $A=\left\{x\in\mathbf{R}:\ |x-2|\leq 3\right\}$, $B=[-1,5]$;

е) $A=\left\{x\in\mathbf{Z}:\ x\,\vdots\,5\wedge x\,\vdots\,4\right\}$, $B=\left\{x\in\mathbf{Z}:\ x\,\vdots\,20\right\}$;

ж) $A=\left\{(x,y):\ x,y\in\mathbf{N}\wedge x+2y=15\right\}$, $B=\left\{(x,y):\ x,y\in\mathbf{Z}\wedge x+2y=15\right\}$;

з) $A=\left\{x\in\mathbf{R}:\ \dfrac{1}{x-2}<1\right\}$, $B=\left\{x\in\mathbf{R}:\ x>3\right\}$.

Задание 1.9. Даны множества A, B, C и универсальное множество Ω. Найти $D_1=A\cup B\cap C$, $D_2=A\cap B\cup\overline{C}$, $D_3=A\cap\left(B\cup\overline{C}\right)$, $D_4=(A\setminus B)\cap C$.

а) $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$, $A=\{1;3;5\}$, $B=\{2;4;6\}$, $C=\{3;6\}$;

б) $\Omega=\{a;b;c;d;e;f;i;j;k;m\}$, $A=\{a;b;e;f;m\}$, $B=\{a;d;e;i;j;k;m\}$, $C=\{c;e;f;m\}$;

в) $\Omega=\{n:n=3+2(k-1)\}$, где $k\in\{-3;\ -2;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$; $A=\{n\in\Omega:|n|\le 2\}$; $B=\{n\in\Omega:|n|>3\}$; C – числа из множества Ω, кратные 3.

Задание 1.10. Пусть универсальное множество Ω есть множество точек плоскости, на которой задана декартова система координат, и $A=\{(x,y):\ 0\le x\le 1\}$, $B=\{(x,y):\ 0\le y\le 1\}$. Изобразить на плоскости множества $A\cap B$, $A\cup B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $\overline{A\cap B}$.

Задание 1.11. Симметрической разностью множеств A, B называется множество $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. Выяснить, какие из равенств верные.

а) $A\Delta A=A$;

б) $A\Delta\overline{A}=A$;

в) $A\Delta B=\overline{B}\Delta\overline{A}$;

г) $A\Delta\varnothing=A$;

д) $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$;

е) $A\cup(B\Delta C)=(A\cup B)\Delta(A\cup C)$.

Задание 1.12. Используя определения операций над множествами, докажите следующие включения:

а) $(A\subseteq B)\to(\forall C:\ A\cup C\subseteq B\cup C)$;

б) $(A\subseteq B)\leftrightarrow(A\cup B=B)$;

в) $(A\subseteq B\wedge A\subseteq C)\to(A\subseteq B\cap C)$.

Задание 1.13. Используя основные законы (свойства) теории множеств, проверьте следующие равенства:

а) $A\cap B=A\cap\left(\overline{A}\cup B\right)$;

б) $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=A\Delta B$;

в) $\overline{A\setminus B}=\overline{A}\bigcup B$;

г) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$;

д) $\left(\overline{A}\setminus\overline{B}\right)\cup\left(\overline{B}\setminus\overline{A}\right)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$;

е) $A\cup(B\setminus A)=A\cup B$.

Задание 1.14. Используя основные законы (свойства) теории множеств, докажите следующие равенства:

а) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;

б) $\overline{A}\setminus(B\cap C)=\left(\overline{A}\setminus B\right)\cup\left(\overline{A}\setminus C\right)$.

Задание 1.15. Докажите, что для произвольных множеств:

а) $A\setminus B=A\leftrightarrow A\cap B=\varnothing$;

б) $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=\varnothing\leftrightarrow A=B$;

в) $(A\subseteq B)\leftrightarrow A\cup B=B$;

г) $A\cap B=\varnothing\to(A\cup B)\setminus B=A$;

д) $(A\setminus B=A)\leftrightarrow(B\setminus A=B)$;

е) $(A\cup B)\setminus B=A\leftrightarrow A\cap B=\varnothing$.

Задание 1.16. Используя основные законы (свойства) теории множеств, упростить множество:

а) $E = A \cap \overline{B} \setminus A$; б) $E = \overline{A \cap B} \setminus \overline{A \cup B}$;

в) $E = (A \setminus B) \setminus \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$; г) $E = \left(B \setminus \overline{A}\right) \setminus \left(A \setminus \overline{B}\right)$;

д) $E = \overline{\overline{A} \Delta B} \setminus \overline{A \cup \overline{B}}$; е) $E = \left(\overline{A} \Delta \overline{B}\right) \cap \overline{A}$;

ж) $E = \left(A \setminus \left(B \setminus \overline{A}\right)\right) \cup \left(\overline{B} \setminus (A \cup B)\right)$; з) $E = \left(A \cap \left(B \cup \overline{A}\right)\right) \setminus \left(\overline{B} \cap (A \cup B)\right)$.

Задание 1.17. Используя основные законы (свойства) теории множеств, упростить множество:

а) $E = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \setminus C)$; б) $E = \overline{A \setminus B \cup \overline{C}} \setminus \overline{A \cup B \setminus C}$;

в) $E = \left(A \cap \overline{C} \cap B\right) \setminus \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right)$; г) $E = (A \setminus B \setminus C) \cap \overline{B \setminus \overline{A} \setminus C}$;

д) $E = A \cap \left((B \cap C) \cup \left(\overline{A} \cap C\right)\right) \cup \overline{C}$.

1.10. Понятие бинарного отношения

Определение 1.18. Пусть даны два непустых множества A, B. Прямым произведением $A \times B$ называется множество всевозможных упорядоченных пар вида (a,b), где $a \in A$, $b \in B$: $A \times B = \{(a,b):\ a \in A,\ b \in B\}$.

Например, если $A = \{1,\ 2\}$, $B = \{a,\ b\}$, то $A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$, $B \times A = \{(a,1),(b,1),(a,2),(b,2)\}$, $A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$.

Определение 1.19. Бинарным отношением называется любое множество упорядоченных пар. Если R – бинарное отношение и пара $(x,y) \in R$ [пара (x,y) является элементом отношения R], то говорят, что элемент x находится в отношении R с элементом y, и записывают: xRy.

Например, на множестве $\mathbf{Z}$ целых чисел отношение R - отношение “меньше”, для которого используют обозначение – знак $<$ и вместо записи $(1,2) \in R$ $(R<)$ записывают $1 < 2$.

Из определения 1.19 следует, что бинарное отношение (как множество) является подмножеством прямого произведения двух множеств, то есть $R \subset A \times B$.

Определение 1.20. Пусть R – бинарное отношение. Областью определения $Dom(R)$ отношения R называется множество всех элементов x таких, что найдется элемент y такой, что x находится в отношении R с y:

$$Dom(R) = \{x \mid (\exists y)\ xRy\}.$$

Областью значений $\operatorname{Im}(R)$ отношения R называется множество всех элементов y таких, что найдется элемент x такой, что x находится в отношении R с y:

$$\operatorname{Im}(R) = \{y \mid (\exists x)\ xRy\}.$$

Если $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ и $R=\{(1,5),(2,6),(2,8),(4,7),(4,5)\}$, то $Dom(R)=\{1,\ 2,\ 4\}$, $\operatorname{Im}(R)=\{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$.

Так как бинарное отношение является множеством, то можно говорить о равенстве двух бинарных отношений как о равенстве двух множеств. Два бинарных отношения R, S равны ($R=S$), если для любых элементов x,y, таких что xRy, следует, что xSy, и наоборот, если xSy, то xRy.

Определение 1.21. Пусть R,S – два бинарных отношения. Множество всех пар (x,y) таких, что существует элемент z такой, что $xSz,\ zRy$, называется композицией отношений R и S: $R\circ S=\{(x,y)|\ xSz,\ zRy\}$.

Например, если $S=\{(1,2),(2,3),(4,6)\}$, $R=\{(2,3),(3,4),(6,8)\}$, то $R\circ S=\{(1,3),(2,4),(4,8)\}$, $S\circ R=\{(3,6)\}$, $R\circ R=\{(2,4)\}$, $S\circ S=\{(1,3)\}$.

Определение 1.22. Инверсией R^{-1} бинарного отношения R называется множество всех пар (x,y) таких, что $(y,x)\in R$. Таким образом, $(x,y)\in R^{-1}$, если $(y,x)\in R$.

Например, если $R=\{(2,3),(3,4),(6,8)\}$, то $R^{-1}=\{(3,2),(4,3),(8,6)\}$.

Из определения инверсии следует, что

$$Dom\left(R^{-1}\right)=\operatorname{Im}(R),\ \operatorname{Im}\left(R^{-1}\right)=Dom(R),\ \left(R^{-1}\right)^{-1}=R.$$

Свойства композиций бинарных отношений:

1) $(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$ (ассоциативность композиции),

2) $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$.

1.11. Понятие отображения

Определение 1.23. Пусть даны множества X, Y. Бинарное отношение f называется *отображением* (*функцией*), если для любых элементов $x\in X$, $y,z\in Y$ таких, что $(x,y)\in f$, $(x,z)\in f$, следует, что $y=z$.

При этом запись $(x,y)\in f$ заменяют привычной из школьной программы алгебры записью $y=f(x)$. Для отображения используют также обозначение $f:X\to Y$.

Из определения отображения следует, что для каждого элемента $x\in Dom(f)$ <u>существует только один элемент</u> $y\in\operatorname{Im}(f)$ такой, что $(x,y)\in f$. При этом элемент y называется образом элемента x (а сам x – прообразом элемента y). Множество $Dom(f)$ называется областью определения функции f [обозначается кратко в виде $D(f)$], множество

$\operatorname{Im}(f)$ называется областью значений функции f [обозначается кратко в виде $R(f)$].

Пусть $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$. Тогда отношение $f=\{(1,2),(2,3),(3,5),(4,7),(5,2)\}$ является отображением [при этом $D(f)=X,\ R(f)=Y$], а отношение $g=\{(1,2),(2,3),(3,5),(4,7),(4,3)\}$ не является отображением, так как в нем имеются две пары $(4,7),(4,3)$, для которых элементу $4\in X$ соответствуют два разных элемента $7,3\in Y$.

Определение 1.24. Отображения f,g называются равными ($f=g$), если:

1) их области определения равны $D(f)=D(g)$,

2) для каждого $x\in D(f)$: $f(x)=g(x)$.

Определение 1.25. Пусть даны прямое произведение $X\times Y$ и отображение $f\subset X\times Y$. Отображение $f:X\to Y$ с областью определения $D(f)$ и областью значений $R(f)$ называется отображением из X в Y, если $D(f)=X,\ R(f)\subset Y$.

Определение 1.26. Отображение $f:X\to Y$ с областью определения $D(f)$ и областью значений $R(f)$ называется отображением из X на Y (или сюръективным отображением), если $D(f)=X,\ R(f)=Y$.

То есть в этом случае для каждого элемента $y\in Y$ найдется элемент (возможно, не один) $x\in X=D(f)$ такой, что $y=f(x)$.

Пусть $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5{,}6\}$, $Y=\{0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 8\}$. Тогда отображение $f=\{(1,1),(2,0),(3,3),(4,8),(5,0),(6,3)\}$ такое, что

$$1=f(1),\ 0=f(2),\ 3=f(3),\ 8=f(4),\ 0=f(5),\ 3=f(6),$$

является отображением из X в Y, так как $D(f)=X,\ R(f)\subset Y$, а отображение $g=\{(1,1),(2,0),(3,3),(4,8),(5,4),(6,3)\}$ такое, что

$$1=f(1),\ 0=f(2),\ 3=f(3),\ 8=f(4),\ 4=f(5),\ 3=f(6),$$

является отображением из X на Y, так как $D(f)=X,\ R(f)=Y$.

Пример 1.15. Пусть $X=\mathbf{Z},\ Y=\mathbf{N}=\{1,2,3,4,...\}$ и отображение $f:X\to Y$ задается правилом (аналитической формулой) $y=f(x)=x^2+1$, $x\in X=\mathbf{Z}, y\in Y=\mathbf{N}$. Согласно этому отображению каждому целому числу $x\in\mathbf{Z}$ соответствует только одно единственное натуральное число $y=x^2+1$. При этом отображение $f:X\to Y$ не является отображением из X на Y, так как, например, для числа $y=4\in\mathbf{N}$ не существует целого числа $x\in\mathbf{Z}$ такого, что $y=x^2+1$. Уравнение $4=x^2+1$ не имеет решения в области целых чисел.

Пример 1.16. Пусть $X=\mathbf{R}$, $Y=[-1,1]$, $f:X\to Y$, $y=f(x)=\sin x$. Тогда $f:X\to Y$ есть отображение из X на Y, то есть сюръективное отображение. Если же заменить множество $Y=[-1,1]$ на $Y=\mathbf{R}$, то отображение $f:X\to Y$ будет отображением из X в Y.

Пример 1.17. Пусть $X=\mathbf{R}$, $Y=\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$, $f:X\to Y$, $y=f(x)=2^x$. Тогда $f:X\to Y$ есть отображение из X на Y, то есть сюръективное отображение X на Y. Действительно, для каждого числа $x\in\mathbf{R}$ существует только одно число $y=2^x\in\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$. При этом для любого числа $y\in\mathbf{R}^+$ существует число (притом только одно) $x=\log_2 y$ такое, что $y=f(x)=2^x$.

1.12. Композиция отображений. Инъективные функции

Определение 1.27. Пусть f,g – некоторые функции. *Композицией* функций f,g называется функция $f\circ g$, удовлетворяющая условиям:

1) область определения $D(f\circ g)=\{x\in D(g) \mid g(x)\in D(f)\}$,

2) для любого элемента $x\in D(f\circ g)$: $(f\circ g)(x)=f(g(x))$.

Из определения композиции двух функций следует, что $D(f\circ g)\subset D(g)$, $R(f\circ g)\subset R(f)$.

Отметим следующие важные факты.

Теорема 1.1. Если $g:A\to B$ есть отображение множества A на (в) множество B, $f:B\to C$ есть отображение множества B на (в) множество C, то композиция $f\circ g:A\to C$ есть отображение множества A на (в) множество C.

Определение 1.28. Отображение $i_A:A\to A$ множества A на A, заданное по правилу $i_A(x)=x,\ x\in A$, называется *единичным* (*тождественным*) отображением.

Теорема 1.2. Если $f:A\to B$ есть отображение множества A на множество B, то композиция $f\circ f^{-1}=i_B$ есть тождественное отображение B на B.

Доказательство. Пусть $f=\{(x,y) \mid x\in A, y=f(x)\in B\}$. Инверсия f^{-1} функции $f:A\to B$ есть бинарное отношение вида $f^{-1}=\{(y,x) \mid (x,y)\in f, x\in A, y\in B\}$. Рассмотрим композицию $f\circ f^{-1}$. По определению композиции имеем

$$f\circ f^{-1}=\{(y,z) \mid (\exists x):(y,x)\in f^{-1},(x,z)\in f\}.$$

Так как $(x,y)\in f$ и $(x,z)\in f$, а $f:A\to B$ есть отображение, то $y=z$ (для каждого прообраза существует только один единственный образ). Тогда

$$f \circ f^{-1} = \{(y,y) \mid (\exists x):(x,y) \in f\}.$$

Так как $y \in B$ и $f: A \to B$ есть отображение множества A на множество B, то $f \circ f^{-1} = i_B$.

Определение 1.29. Отображение f называется *инъективным*, если для любых $x_1, x_2 \in D(f)$ из того, что $f(x_1) = f(x_2)$, следует $x_1 = x_2$.

По-другому, следуя закону контрпозиции, f является инъективным отображением, если для любых $x_1, x_2 \in D(f)$ таких, что $x_1 \neq x_2$, следует $f(x_1) \neq f(x_2)$ (двум разным прообразам соответствуют два разных образа).

Пример 1.18. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{0, 1, 3, 4, 8, 2\}$. Тогда отображение $f = \{(1,1),(2,0),(3,3),(4,8),(5,2),(6,4)\}$ ($D(f) = X$, $R(f) = Y$):

$$f(1) = 1, f(2) = 0, f(3) = 3, f(4) = 8, f(5) = 0, f(6) = 4$$

является инъективным отображением X на Y, так как любым двум разным прообразам $x_1, x_2 \in D(f)$ соответствуют два разных образа $f(x_1), f(x_2) \in R(f)$.

Пример 1.19. Пусть отображение $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ задается формулой $y = f(x) = x^3$, $x \in \mathbf{R}$. Эта функция является инъективной, так как для любых $x_1, x_2 \in D(f) = \mathbf{R}$ если $x_1 \neq x_2$, то $x_1^3 \neq x_2^3$.

Напротив, отображение $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, задаваемое формулой $y = f(x) = x^2$ ($x \in \mathbf{R}$), не является инъективным отображением, так как $f(-1) = f(1) = 1$.

Теорема 1.3. Композиция двух инъективных функций есть также инъективная функция.

Доказательство. Пусть $f, g -$ инъективные функции. Рассмотрим композицию $f \circ g$. Так как $f -$инъективное отображение, то из того, что $f(g(x)) = f(g(y))$, следует, что $g(x) = g(y)$. А так как $g -$инъективное отображение, то из $g(x) = g(y)$ следует, что $x = y$. Таким образом, из равенства $f(g(x)) = f(g(y))$ следует равенство $x = y$, что и доказывает инъективность композиции $f \circ g$.

1.13. Понятие обратного отображения. Обратные тригонометрические функции

Пусть задана функция $f: X \to Y$, $f = \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$. Как известно инверсией f^{-1} отображения $f: X \to Y$ называется бинарное отношение вида $f^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in f,\ x \in X\}$. Заметим, что не всякая инверсия f^{-1}

отображения f является отображением. Например, для функции f, заданной по правилу $f=\{(x,y)|\ y=x^2, x\in\mathbf{Z}\}$, инверсия $f^{-1}=\{(y,x)|\ y=x^2, x\in\mathbf{Z}\}$ не является функцией, так как в этом отношении имеются две пары $(1,1),(1,-1)$, у которых равны первые компоненты, но разные вторые компоненты. Справедлива теорема.

Теорема 1.4. Инверсия f^{-1} функции f является функцией тогда и только тогда, когда f есть инъективная функция.

Доказательство. Пусть заданы функция $f=\{(x,y)|\ x\in D(f)\}$ и ее инверсия $f^{-1}=\{(y,x)|\ (x,y)\in f, x\in D(f)\}$. По определению инверсия f^{-1} будет являться функцией, если из того, что $(z,x),(z,y)\in f^{-1}$, следует $x=y$. Данное условие равносильно условию инъективности функции f, то есть если $(x,z),(y,z)\in f$, то $x=y$. Значит, инверсия f^{-1} функции f является функцией тогда и только тогда, когда f есть инъективная функция.

Определение 1.30. Пусть задано отображение $f: X\to Y$, $f=\{(x,y)|\ x\in D(f), y\in R(f)\}$. Если для каждого элемента $y\in R(f)$ существует только один единственный элемент $x\in D(f)$ такой, что $y=f(x)$, то инверсия $f^{-1}=\{(y,x)|\ (x,y)\in f, x\in D(f)\}$ называется обратным отображением (обратной функцией) к отображению $f: X\to Y$. При этом используют запись $x=f^{-1}(y)$, $D(f^{-1})=R(f)$, $R(f^{-1})=D(f)$.

Пример 1.20. Рассмотрим функцию $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$, $y=f(x)=2^x$ ($x\in D(f)=\mathbf{R}$). Эта функция является инъективной, так как для любых $x_1,x_2\in D(f)=\mathbf{R}$, если $x_1\neq x_2$, то $2^{x_1}\neq 2^{x_2}$. Значит, она имеет обратную функцию $f^{-1}:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, $x=f^{-1}(y)$. Для ее нахождения достаточно выразить из равенства $y=2^x$ переменную x: $x=f^{-1}(y)=\log_2 y$.

Заметим, что если рассмотреть две функции $f_1:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$, $y=f_1(x)=2^x$ и $f_2:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, $y=\log_2 x$, то графики этих функций (в одной системе координат) симметричны относительно прямой $y=x$.

Отдельно рассмотрим функции, обратные к тригонометрическим функциям. Рассмотрим функцию синуса, $f=\sin:\ \mathbf{R}\to[-1,\ 1]$, $y=f(x)=\sin x$ ($x\in\mathbf{R}$). На своей области определения $D(f)=\mathbf{R}$ эта функция не является инъективной (для каждого значения $y\in[-1,\ 1]$ существует бесконечно много значений x таких, что $y=\sin x$), значит, она не имеет обратной функции. Однако если рассмотреть ее сужение на промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то есть $f=\sin:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\to[-1, 1]$, $y=f(x)=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то на нем она является инъективной, поэтому она имеет обратную функцию – функцию арксинуса $f^{-1}=\arcsin: [-1, 1]\to\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x=f^{-1}(y)=\arcsin y$. Итак, можно считать по определению, что

$$y=\arcsin x \ \left(x\in[-1, 1]\right)\Leftrightarrow x=\sin y \ \left(y\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right).$$

При этом выполняются свойства:

$D(\arcsin)=[-1, 1]$, $R(\arcsin)=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(-x)=-\arcsin x$,

$\sin(\arcsin x)=x$, если $x\in[-1, 1]$.

Рассмотрим функцию косинуса, $f=\cos: \mathbf{R}\to[-1, 1]$, $y=f(x)=\cos x$, $x\in\mathbf{R}$. На своей области определения $D(f)=\mathbf{R}$ эта функция не является инъективной (для каждого значения $y\in[-1, 1]$ существует бесконечно много значений $x\in\mathbf{R}$ таких, что $y=\cos x$), значит, она не имеет обратной функции. Однако если рассмотреть ее сужение на промежуток $[0, \pi]$, то есть $f=\cos: [0, \pi]\to[-1, 1]$, $y=f(x)=\cos x$, $x\in[0, \pi]$, то на нем она является инъективной, поэтому она имеет обратную функцию – функцию арккосинуса $f^{-1}=\arccos: [-1, 1]\to[0, \pi]$, $x=f^{-1}(y)=\arccos y$. Итак, можно считать по определению что

$$y=\arccos x \ \left(x\in[-1, 1]\right)\Leftrightarrow x=\cos y \ \left(y\in[0, \pi]\right).$$

При этом выполняются свойства:

$D(\arccos)=[-1, 1]$, $R(\arccos)=[0, \pi]$, $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$,

$\cos(\arccos x)=x$, если $x\in[-1, 1]$,

$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$, $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$,

$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ $\left(x\in[-1, 1]\right)$.

Функция тангенса $f=tg: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}$, $y=f(x)=tgx$ ($x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$) является инъективной на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Обратная к ней функция называется арктангенс, то есть по определению считаем

$$y=arctgx \ \left(x\in\mathbf{R}\right)\Leftrightarrow x=tgy \ \left(y\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

При этом выполняются свойства:

$$D(arctg)=\mathbf{R},\ R(arctg)=\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),\ arctg(-x)=-arctgx,$$

$$tg(arctgx)=x\ \ (x\in\mathbf{R}),\ \sin(arctgx)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ \cos(arctgx)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Функция котангенса $f=ctg:\ (0,\ \pi)\to\mathbf{R}$, $y=f(x)=ctgx\ \ (x\in(0,\ \pi))$ является инъективной на интервале $(0,\ \pi)$. Обратная к ней функция называется арккотангенс, то есть по определению считаем

$$y=arcctgx\ \ (x\in\mathbf{R})\Leftrightarrow x=ctgy\ \ (y\in(0,\ \pi)).$$

При этом выполняются свойства:

$$D(arcctg)=\mathbf{R},\ R(arcctg)=(0,\ \pi),\ arcctg(-x)=\pi-arctgx,$$

$$ctg(arcctgx)=x\ \ (x\in\mathbf{R}),\ \sin(arcctgx)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ \cos(arcctgx)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ниже (см. рис. 3) представлены графики функций $y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ \ y=arctgx,\ y=arcctgx.$

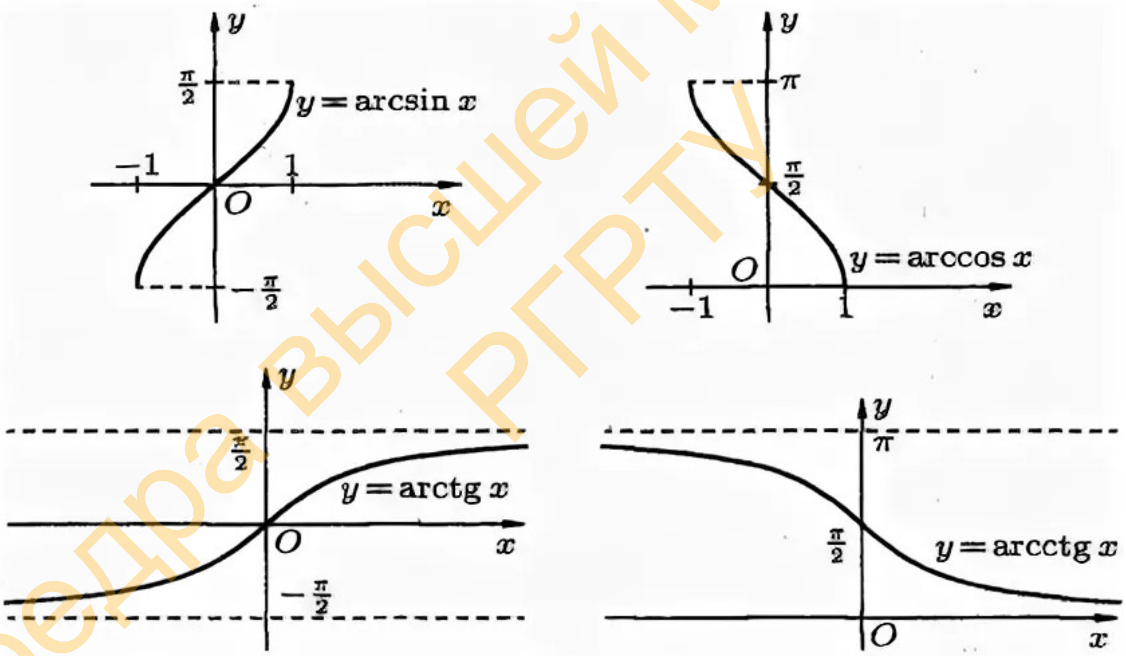


Рис. 3. *Графики обратных тригонометрических функций*

1.14. Отношение эквивалентности

Определение 1.31. Бинарное отношение R, заданное на множестве X, называется рефлексивным, если для любого элемента $x \in X$: xRx [то есть элемент $x \in X$ находится в отношении с самим собой, то есть $(x,x) \in R$].

Пример 1.21. 1. Бинарное отношение R_1 – отношение параллельности, заданное на множестве X всех прямых на плоскости. Из школьного курса геометрии известно, что любая прямая l на плоскости параллельна самой себе, то есть $l \parallel l$. Значит, отношение параллельности является рефлексивным ($(l,l) \in R_1$).

2. Бинарное отношение R_2– равенство двух чисел, заданное на множестве $\mathbf{Z}$ всех целых чисел. Очевидно, что любое целое число $x \in \mathbf{Z}$ равно самому себе. Значит, отношение R_2 является рефлексивным ($(x,x) \in R_2$).

3. Бинарное отношение R_3– отношение делимости, заданное на множестве $\mathbf{Z}$ всех целых чисел. Говорят, что целое число $x \in \mathbf{Z}$ делит целое число $y \in \mathbf{Z}$, если существует целое число $t \in \mathbf{Z}$: $y = tx$. Отношение R_3 является рефлексивным, так как число $x \in \mathbf{Z}$ делит само себя, так как $x = 1 \cdot x$ ($(x,x) \in R_3$).

Определение 1.32. Бинарное отношение R, заданное на множестве X, называется антирефлексивным, если для любого элемента $x \in X$: $(x,x) \notin R$ (то есть любой элемент $x \in X$ не находится в отношении R с самим собой).

Пример 1.22. 1. Бинарное отношение R_4 –отношение строгого неравенства, заданное на множестве $\mathbf{Z}$ всех целых чисел, является антирефлексивным.

2. Бинарное отношение R_5 –отношение перпендикулярности, заданное на множестве всех прямых на плоскости, является антирефлексивным.

Определение 1.33. Бинарное отношение R, заданное на множестве X, называется транзитивным, если для любых элементов $x, y, z \in X$: если $(x,y) \in R$, $(y,z) \in R$, то $(x,z) \in R$ (то есть если $x \in X$ находится в отношении R с $y \in X$, а $y \in X$ находится в отношении R с $z \in X$, то и $x \in X$ находится в отношении R с $z \in X$).

Пример 1.23. 1. Бинарное отношение R_1 –отношение параллельности, заданное на множестве X всех прямых на плоскости, является транзитивным. Если прямая l_1 параллельна прямой l_2 ($l_1 \parallel l_2$), прямая l_2 параллельна прямой l_3 ($l_2 \parallel l_3$), то и прямая l_1 параллельна прямой l_3 ($l_1 \parallel l_3$).

2. Бинарное отношение R_2– равенство двух чисел, заданное на множестве $\mathbf{Z}$ всех целых чисел, является транзитивным. Действительно, из того, что $x = y$, $y = z$, следует, что $x = z$.

3. Бинарное отношение R_3–отношение делимости, заданное на множестве $\mathbf{Z}$ всех целых чисел, является транзитивным. Если число $x \in \mathbf{Z}$ делит число $y \in \mathbf{Z}$, а число $y \in \mathbf{Z}$ делит число $z \in \mathbf{Z}$, то и число x делит чис-

ло z. Действительно, если $x \in \mathbf{Z}$ делит число $y \in \mathbf{Z}$, то найдется целое число $t_1 \in \mathbf{Z}$ такое, что $y = t_1 x$. Если число $y \in \mathbf{Z}$ делит число $z \in \mathbf{Z}$, то найдется целое число $t_2 \in \mathbf{Z}$ такое, что $z = t_2 y$. Тогда $z = t_2 y = t_2 \left(t_1 x\right) = \left(t_2 t_1\right) x$. Так как число $t_2 t_1$ – целое, то x делит z.

Определение 1.34. Бинарное отношение R, заданное на множестве X, называется симметричным, если для любых элементов $x, y \in X$: если $(x, y) \in R$, то $(y, x) \in R$ (то есть если $x \in X$ находится в отношении R с $y \in X$, то и $y \in X$ находится в отношении R с $x \in X$).

Из этого определения следует, что отношение R является симметричным, если отношение R совпадает с инверсией R^{-1}.

Пример 1.24. 1. Бинарное отношение R_1 – отношение параллельности, заданное на множестве X всех прямых на плоскости, является симметричным. Если прямая l_1 параллельна прямой l_2 ($l_1 \parallel l_2$), то и прямая l_2 параллельна прямой l_1 ($l_2 \parallel l_1$).

2. Бинарное отношение R_2 – равенство двух чисел, заданное на множестве $\mathbf{Z}$ всех целых чисел, является симметричным. Действительно, из того, что $x = y$, следует, что $y = x$.

Напротив, отношение R_3 делимости, заданное на множестве $\mathbf{Z}$ всех целых чисел, не является симметричным, так как из того, что $x \in \mathbf{Z}$ делит $y \in \mathbf{Z}$, не следует, что $y \in \mathbf{Z}$ делит $x \in \mathbf{Z}$.

Определение 1.35. Бинарное отношение R, заданное на множестве X, называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Для отношения эквивалентности используют специальное обозначение $\sim$. Таким образом, отношение $\sim$ есть отношение эквивалентности, если оно:

1) рефлексивно, при всех $x \in X$: $x \sim x$,

2) симметрично, при всех $x, y \in X$: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$,

3) транзитивно, при всех $x, y, z \in X$: $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Пример 1.25. 1. Бинарное отношение R_1 параллельности, заданное на множестве X прямых на плоскости, является отношением эквивалентности.

2. Бинарное отношение R_2 – равенство двух чисел, заданное на множестве $\mathbf{Z}$ всех целых чисел, является отношением эквивалентности.

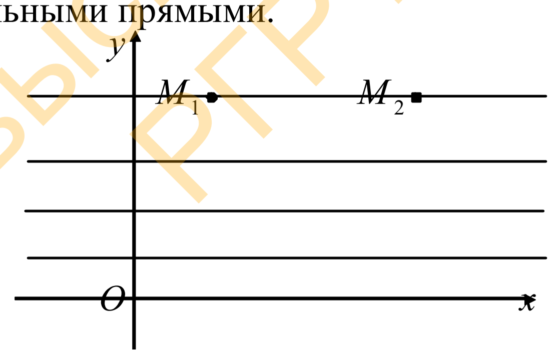
3. Рассмотрим отношение $R^{(m)} = \left\{(x, y) \,\middle|\, (x - y) \vdots m,\ x, y \in \mathbf{Z}\right\}$ ($m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ – фиксированное целое число). Это отношение является рефлексивным, так как $(x, x) \in R^{(m)}$ (число $x - x = 0$ всегда делится на m). Оно является симметричным, так как из того, что $(x, y) \in R^{(m)}$, следует $(y, x) \in R^{(m)}$ (если разность $x - y$ делится на m, то и $y - x$ также делится на m). Докажем транзитивность этого отношения. Пусть

$(x,y)\in R^{(m)}$, $(y,z)\in R^{(m)}$, то есть числа $x-y$, $y-z$ делятся на m. Тогда число $x-z=(x-y)+(y-z)$ также делится на m (так как каждое из слагаемых делится на m). Таким образом, отношение $R^{(m)}$ есть отношение эквивалентности.

Определение 1.36. Подмножество $\overline{x}=\{x'\in X : x'\sim x\}$ всех элементов, эквивалентных данному $x\in X$, называется классом эквивалентности, содержащим x. Любой элемент $x\in\overline{x}$ называется представителем класса $\overline{x}$.

Множество классов эквивалентности по отношению $\sim$ является разбиением множества X в том смысле, что X является объединением непересекающихся подмножеств. Так как $x\in\overline{x}$, то $X=\bigcup\limits_{x\in X}\overline{x}$. Если предположить, что $\overline{x}'\cap\overline{x}''\neq\varnothing$ и $x\in\overline{x}'\cap\overline{x}''$ (то есть два различных класса $\overline{x}'\cap\overline{x}''$ пересекаются), то $x\in\overline{x}'$, $x\in\overline{x}''$, откуда $x\sim x'$, $x\sim x''$. В силу транзитивности имеем $x'\sim x''$, то есть два элемента $x',x''\in X$ находятся в одном и том же классе эквивалентности, $\overline{x}'=\overline{x}''$. Отсюда следует, что различные классы не пересекаются.

Например, пусть $\mathbf{R}^2$ – вещественная плоскость прямоугольной системы координат. Взяв за отношение $\sim$ принадлежность точек $M_1,M_2\in\mathbf{R}^2$ одной горизонтальной прямой, мы получим отношение эквивалентности с классами – горизонтальными прямыми.



1.15. Примеры решения задач

Пример 1.26. Пусть $S=\{(1,2),(2,3),(4,6)\}$, $R=\{(2,3),(3,4),(6,8)\}$. Найти композиции $R\circ S$, $S\circ R$, $R\circ R$, $S\circ S$.

Решение. Найдем композицию $R\circ S$. В отношении S имеется пара $(1,2)$, а в отношении R - пара $(2,3)$, то есть $1S2$, $2R3$, откуда в композиции $R\circ S$ получаем пару $(1,3)$. Аналогично в S имеется пара $(2,3)$, а в отношении R - пара $(3,4)$, то есть $2S3$, $3R4$, откуда в композиции $R\circ S$ получаем пару $(2,4)$. В S имеется пара $(4,6)$, а в отношении R - пара $(6,8)$, то есть $4S6$, $6R8$, откуда в композиции $R\circ S$ получаем пару $(4,8)$. Окончательно имеем

$$R \circ S = \{(1,3),(2,4),(4,8)\}.$$

Найдем композицию $S \circ R$. В отношении R имеется пара $(3,4)$, а в отношении S - пара $(4,6)$, то есть $3R4$, $4S6$, откуда в композиции $S \circ R$ получаем пару $(3,6)$. Далее замечаем, что в отношении R нет больше ни одной пары, у которой бы вторая компонента совпала с первой компонентой пары в отношении S. Значит, окончательно $S \circ R = \{(3,6)\}$.

Рассуждая аналогично, имеем $R \circ R = \{(2,4)\}$, $S \circ S = \{(1,3)\}$.

Пример 1.27. Выяснить, какие из отношений являются функциями:

1) $f_1 = \{(x,y):\ x,y \in \mathbf{N},\ y = x^2\}$,

2) $f_2 = \{(x,y):\ x,y \in \mathbf{N},\ x < y \le x+2\}$,

3) $f_3 = \{(x,y):\ x,y \in \mathbf{N},\ x\ \textit{делит}\ y\}$,

4) $f_4 = \{(x,y):\ x,y \in \mathbf{Z},\ x = y^2\}$,

5) $f_5 = \{(x,y):\ x,y \in \mathbf{R},\ \sin x = \sin y\}$.

Решение

1. Отношение $f_1 = \{(x,y):\ x,y \in \mathbf{N},\ y = x^2\}$ является функцией, так как для каждого натурального числа $x \in \mathbf{N}$ соответствует одно единственное натуральное число $y \in \mathbf{N}$, $y = x^2 = f_1(x)$.

2. Отношение $f_2 = \{(x,y):\ x,y \in \mathbf{N},\ x < y \le x+2\}$ не является функцией, так как в этом отношении, например, имеются две пары $(1,2),(1,3)$, для которых элементу $1 \in X$ соответствуют два разных элемента $2,3 \in Y$.

3. Отношение $f_3 = \{(x,y):\ x,y \in \mathbf{N},\ x\ \textit{делит}\ y\}$ не является функцией, так как в этом отношении имеются пары $(1,2),(1,3)$ (единица делит любое целое число).

4. Отношение $f_4 = \{(x,y):\ x,y \in \mathbf{Z},\ x = y^2\}$ не является функцией, так как в нем имеются две пары $(1,-1),(1,1)$.

5. Отношение $f_5 = \{(x,y):\ x,y \in \mathbf{R},\ \sin x = \sin y\}$ не является функцией, так как уравнение $\sin x = \sin y$ равносильно равенству $y = x + 2\pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$, а значит, в этом отношении имеются бесконечно много пар вида $(x,x),(x,x+2\pi),(x,x+4\pi),\ldots$ (у всех из них первая компонента одна и та же, а вторые компоненты - разные).

Пример 1.28. Рассмотрим отношение $R_2 = \{(x,y):\ x,y \in \mathbf{R},\ x^2 = y^2\}$, заданное на множестве всех вещественных чисел. Проверить, является ли оно отношением эквивалентности.

Решение. 1. Отношение R_2 рефлексивно, то есть $(x,x)\in R_2$, так как для каждого числа $x\in\mathbf{R}$: $x^2=x^2$.

2. Отношение R_2 симметрично, так как если $(x,y)\in R_2 \Leftrightarrow x^2=y^2$, то и $(y,x)\in R_2 \Leftrightarrow y^2=x^2$.

3. Отношение R_2 транзитивно, то есть если $(x,y)\in R_2$, $(y,z)\in R_2$, то и $(x,z)\in R_2$. Действительно,

$$\begin{cases}(x,y)\in R_2 \Leftrightarrow x^2=y^2,\\ (y,z)\in R_2 \Leftrightarrow y^2=z^2,\end{cases} \Rightarrow x^2=y^2=z^2 \Rightarrow x^2=z^2 \Leftrightarrow (x,z)\in R_2.$$

Исходя из пунктов 1, 2, 3, получаем, что отношение R_2 является отношением эквивалентности.

Пример 1.29. Рассмотрим отношение $R_3=\{(x,y):\ x,y\in\mathbf{Z},\ x\ \textit{делит}\ y\}$, заданное на множестве целых чисел. Проверить, является ли оно рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Решение. Напомним, что число $x\in\mathbf{Z}$ делит целое число $y\in\mathbf{Z}$, если $y\in\mathbf{Z}$ делится на $x\in\mathbf{Z}$, то есть существует $t\in\mathbf{Z}$: $y=tx$

1. Данное отношение является рефлексивным ($(x,x)\in R_3$), так как любое целое $x\in\mathbf{Z}$ делит себя (если $x=0$ то равенство $0=t\cdot 0$ выполняется при любом целом t).

2. Отношение R_3 не является отношением симметричности, то есть если $x\in\mathbf{Z}$ делит $y\in\mathbf{Z}$, то $y\in\mathbf{Z}$ не обязано делить $x\in\mathbf{Z}$. Для этого достаточно привести пример $x=2, y=4$.

3. Отношение R_3 является отношением транзитивности. Пусть $(x,y)\in R_3$, $(y,z)\in R_3$. Покажем, что $(x,z)\in R_3$:

$$\begin{cases}(x,y)\in R_3 \Leftrightarrow \exists t_1\in\mathbf{Z}: y=t_1x,\\ (y,z)\in R_3 \Leftrightarrow \exists t_2\in\mathbf{Z}: z=t_2y;\end{cases} \Rightarrow\quad z=t_2y=t_2(t_1x)=(t_1t_2)x \Leftrightarrow (x,z)\in R_3.$$

В результате получаем, что отношение R_3 является отношением рефлексивности и транзитивности, но не является отношением симметричности.

Пример 1.30. Рассмотрим отношение $R_4=\{(x,y):\ x,y\in\mathbf{Z},\ (2x+y)\vdots 3\}$, заданное на множестве целых чисел. Проверить, является ли оно отношением эквивалентности.

Решение. 1. Данное отношение является рефлексивным ($(x,x)\in R_4$), так как для любого числа $x\in\mathbf{Z}$ число вида $2x+x=3x$ делится на 3.

2. Отношение R_4 является отношением симметричности, так как из того факта, что число $2x+y$ делится на 3, следует, что число $2y+x$ также делится на 3. Покажем это. Пусть $2x+y$ делится на 3, то есть существует целое число $t\in\mathbf{Z}: 2x+y=3t$. Из данного равенства выразим $y=3t-2x$.

Рассмотрим теперь число $2y + x = 2(3t - 2x) + x = 6t - 3x = 3(2t - x)$. Очевидно, что оно делится на 3.

3. Проверим, является ли отношение R_4 отношением транзитивности.

Пусть $(x, y) \in R_4$, $(y, z) \in R_4$. Необходимо показать, что пара $(x, z) \in R_4$, то есть число $2x + z$ делится на 3. Имеем

$$\begin{cases} (x, y) \in R_5 \Leftrightarrow 2x + y = 3t_1 \ (t_1 \in \mathbf{Z}), \\ (y, z) \in R_5 \Leftrightarrow 2y + z = 3t_2 \ (t_2 \in \mathbf{Z}). \end{cases}$$

Выразим из первого равенства $2x$, из второго равенства z: $2x = 3t_1 - y$, $z = 3t_2 - 2y$. Рассмотрим число

$$2x + z = 3t_1 - y + 3t_2 - 2y = 3t_1 - 3y + 3t_2.$$

Оно очевидно делится на 3. Итак, мы показали, что если $(x, y) \in R_4$, $(y, z) \in R_4$, то и $(x, z) \in R_4$. Значит, отношение R_5 является отношением транзитивности.

Отношение R_5 является отношением эквивалентности.

Пример 1.31. Рассмотрим множество $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Отношение ρ задано на множестве пар: (3; 4), (4; 1), (3; 3), (4; 4), (1; 3), (1; 4), (1; 1), (2; 2), (3; 1), (4; 3). Проверить, является ли оно отношением эквивалентности.

Решение. 1. Отношение ρ рефлексивно, так как в нем имеются пары (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), то есть $\forall x \in X$: $(x, x) \in \rho$.

2. Отношение ρ является отношением симметричности, так как в нем если пара $(x, y) \in \rho$, то и пара $(y, x) \in \rho$ (проверьте самостоятельно).

3. Отношение ρ является отношением транзитивности, так как в нем если пары $(x, y) \in \rho$, $(y, z) \in \rho$, то и пара $(x, z) \in \rho$. Например, пары (3; 4), (4; 1) находятся в отношении ρ и соответственно пара (3; 1) также находится в этом отношении.

Пример 1.32. Рассмотрим универсальное множество Ω и на нем отношение $R_5 = \{(X, Y) : X, Y \in \Omega,\ X \cap Y = \varnothing\}$ (это отношение состоит из всех таких пар множеств $X, Y \in \Omega$, которые в пересечении дают пустое множество). Проверить это отношение на свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Решение

1. Для того чтобы отношение обладало свойством рефлексивности, необходимо, чтобы $\forall X \in \Omega$: $(X, X) \in R_5$, то есть $\forall X \in \Omega$: $X \cap X = \varnothing$. Однако последнее равенство возможно только в том одном случае, когда $X = \varnothing$. Значит, отношение R_5 не рефлексивно.

2. Отношение R_5 является отношением симметричности, так как по свойству коммутативности операции пересечения $X \cap Y = \varnothing \Leftrightarrow Y \cap X = \varnothing$, то есть вместе с парой $(X,Y) \in R_5$ в отношении находится и пара $(Y,X) \in R_5$.

3. Проверим, является ли отношение R_5 отношением транзитивности. Пусть две пары $(X,Y) \in R_5, (Y,Z) \in R_5$, то есть $X \cap Y = \varnothing$, $Y \cap Z = \varnothing$. Необходимо доказать, что при этом $(X,Z) \in R_5$, то есть $X \cap Z = \varnothing$. Однако из того факта, что $X \cap Y = \varnothing$, $Y \cap Z = \varnothing$, не всегда следует, что $X \cap Z = \varnothing$. Значит, отношение не является отношением транзитивности.

1.16. Задания для самостоятельного изучения

Задание 1.18. На примере множеств $A = \{1,\ 2\}$, $B = \{2,\ 3\}$, $C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ показать справедливость следующих равенств:

а) $A \times B = (A \times C) \cap (C \times B)$; б) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

в) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$; г) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Задание 1.19. Найти композиции бинарных отношений $R \circ S$, $S \circ R$, $R \circ R$, $S \circ S$, если $S = \{(1,3),(2,3),(3,6),(4,5)\}$, $R = \{(2,1),(3,5),(4,2),(1,1)\}$.

Задание 1.20. Выяснить, какие из отношений являются функциями. Если отношение является функцией, то выяснить, является ли оно инъективной, имеет ли оно обратную функцию. Изобразить график отношения:

1) $f_1 = \{(x,y):\ x,y \in \mathbf{N},\ y = x^2\}$,

2) $f_2 = \{(x,y):\ x,y \in \mathbf{N},\ x < y \le x+2\}$,

3) $f_3 = \{(x,y):\ x,y \in \mathbf{N},\ x \textit{ делит } y\}$,

4) $f_4 = \{(x,y):\ x,y \in \mathbf{Z},\ x = y^2\}$,

5) $f_5 = \{(x,y):\ x,y \in \mathbf{R},\ \sin x = \sin y\}$,

6) $f_6 = \{(x,y):\ x,y \in \mathbf{R},\ y = 2x+3\}$.

7) $f_7 = \{(x,y):\ x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}^+, y = 2^x\}$.

Задание 1.21. Перечислить элементы бинарного отношения R, заданного на множестве A, нарисовать график отношения:

а) $A = \{-1,1,-4,6,7\}$, $xRy \leftrightarrow |x| \le |y|$;

б) $A = \{-4,-1,0,1,2,3,-3,9\}$, $xRy \leftrightarrow x = \sqrt{y} \vee x = -\sqrt{y}$;

в) $A = P(M)$ - множество всех собственных подмножеств множества $M = \{2,4,3,5\}$, $XRY \leftrightarrow X \subset Y \wedge X \ne Y$.

Задание 1.22. Найти область определения $Dom(\rho)$ и область значений $\mathrm{Im}(\rho)$ бинарных отношений ρ, заданных на множествах A, B:

а) $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{\{1,2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{2,5\}\}$, $a\rho X \leftrightarrow a\in X$ (элемент $a\in A$ также принадлежит какому-то из множеств множества B);

б) $A=\{-2,0,2,4\}$, $B=\{6,\ 9,\ 12\}$, $a\rho b \leftrightarrow b$ *делится на* b;

в) $A=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*$, $B=Q^+$, $(a1,a2)\rho b \leftrightarrow b=\sqrt{a1/a2}$;

г) $A=\mathbf{N}$, $B=Q\setminus\{0\}$, $a\rho b \leftrightarrow a\cdot b\in\mathbf{Z}$;

д) $A=B=\{1,\ 2,\ 3\}$, $\rho=\{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3)\}$.

Задание 1.23. Какими свойствами (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, транзитивность, эквивалентность) обладает данное бинарное отношение ρ на множестве X:

а) $X=\mathbf{R}$, $x\rho y \leftrightarrow |x|=|y|$;

б) $X=\mathbf{R}$, $x\rho y \leftrightarrow x^2-x=y^2-y$;

в) $X=\mathbf{R}$, $x\rho y \leftrightarrow (x+y)$ - четное;

г) $X=\mathbf{Z}$, $x\rho y \leftrightarrow (x+5y)\vdots 6$;

д) $X=\mathbf{Z}^+$, $x\rho y \leftrightarrow \dfrac{12}{x+y}\in\mathbf{Z}$;

е) $X=\mathbf{R}$, $x\rho y \leftrightarrow x=y\vee x=4y$;

ж) $X=2\mathbf{Z}^*$, $x\rho y \leftrightarrow \dfrac{2x}{y}$ - четное;

з) $X=\mathbf{Z}$, $x\rho y \leftrightarrow 2^x=4^y$;

и) $R_5=\{(x,y):\ x,y\in\mathbf{Z},\ (2x+y)\vdots 3\}$.

Задание 1.24. Какими свойствами (рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, транзитивность, эквивалентность) обладает данное бинарное отношение ρ на множестве X:

а) $X=P(\Omega)$, $x\rho y \leftrightarrow x\cap y\neq\varnothing$;

б) $X=P(\Omega)$, $x\rho y \leftrightarrow x\subseteq y$;

в) $X=P(\Omega)$, $x\rho y \leftrightarrow x\cap y=x$;

г) $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $\rho=\{(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(3,1)\}$;

д) $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $\rho=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(3,2)\}$;

е) $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $\rho=\{(1,1),(2,2),(4,4),(2,3),(3,2),(1,2),(2,1),(3,4),(4,2)\}$;

ж) X – множество всех треугольников на плоскости, $\rho-$ отношение подобия на множестве X.

Задание 1.25. Даны два бинарных отношения $\rho_1=\{(1,2),(2,3),(3,5),(2,1)\}$, $\rho_2=\{(2,4),(3,5),(2,1),(2,2)\}$. Проверить на примере данных отношений выполнимость следующих равенств:

а) $(\rho_1\cup\rho_2)^{-1}=\rho_1^{-1}\cup\rho_2^{-1}$;

б) $(\rho_1\cap\rho_2)^{-1}=\rho_1^{-1}\cap\rho_2^{-1}$;

в) $(\rho_1\setminus\rho_2)^{-1}=\rho_1^{-1}\setminus\rho_2^{-1}$.

1.17. Биективные (взаимно-однозначные) отношения

Пусть даны два непустых множества X, Y. Для произвольного бинарного отношения $f \subset X \times Y$ область определения $D(f)$ и область значений $E(f)$ не обязаны совпадать соответственно с X, Y. При этом для элемента $x \in D(f)$ может найтись несколько образов $y \in E(f)$ таких, что пара $(x, y) \in f$. В свою очередь для элемента $y \in E(f)$ может найтись несколько прообразов $x \in D(f)$, для которых пара $(x, y) \in f$.

Определение 1.37. Бинарное отношение $f \subset X \times Y$ называется биекцией (взаимно-однозначным соответствием) X на Y, если:

1) $D(f) = X$, $E(f) = Y$,
2) $(\forall x \in X)(\exists! y \in Y): y = f(x)$,
3) $(\forall y \in Y)(\exists! x \in X): x = f^{-1}(y)$.

Согласно определению, в биекции каждый элемент $x \in X$ имеет единственный образ $y = f(x) \in Y$ и каждому элементу $y \in Y$ соответствует единственный прообраз $x = f^{-1}(y) \in X$. Если между множествами X, Y существует биекция (взаимно-однозначное соответствие) f, то вместо включения $f \subset X \times Y$ используют запись $X \xleftrightarrow{f} Y$.

Пример 1.33. При $X = Y$ биекцию $X \xleftrightarrow{f} X$ называют еще биективным отображением (преобразованием) множества X на себя. Простейшим примером такого преобразования служит тождественное преобразование $X \xleftrightarrow{e} X$, то есть такое отношение, при котором $x = e(x)$ (образ элемента $x \in X$ есть сам же этот элемент).

Пример 1.34. Пусть $X = Y = \mathbf{R}$ и $f_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbf{R},\ y = kx + b\}$ ($k \neq 0$). Соответствие f_1 является биективным преобразованием X на себя, так как $D(f) = \mathbf{R}, E(f) = \mathbf{R}$, для каждого $x \in \mathbf{R}$ существует единственный образ $y = f_1(x) = kx + b$ и для каждого $y \in \mathbf{R}$ существует единственный прообраз $x = f_1^{-1}(y) = \dfrac{1}{k}(y - b)$.

Пример 1.35. Пусть $X = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{R}_0^+ = [0, +\infty)$ и $f_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_0^+ : x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}_0^+, y = x^2\}$. Соответствие f_2 не является биекцией между X и Y, так как для каждого ненулевого числа $y \in Y = \mathbf{R}_0^+$ существуют два разных прообраза $x = \sqrt{y},\ x = -\sqrt{y}$.

Однако отображение $f_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}_0^+ : x,\ y \in \mathbf{R}_0^+, y = x^2\}$ уже является биекцией.

Пример 1.36. Даны множества X, Y, элементы которых на рис. 4 символически обозначены точками. Для отношения какие элементы $x \in X$

с какими элементами $y \in Y$ образуют упорядоченные пары (x, y), указаны стрелками. Есть ли среди этих отношений биекции?

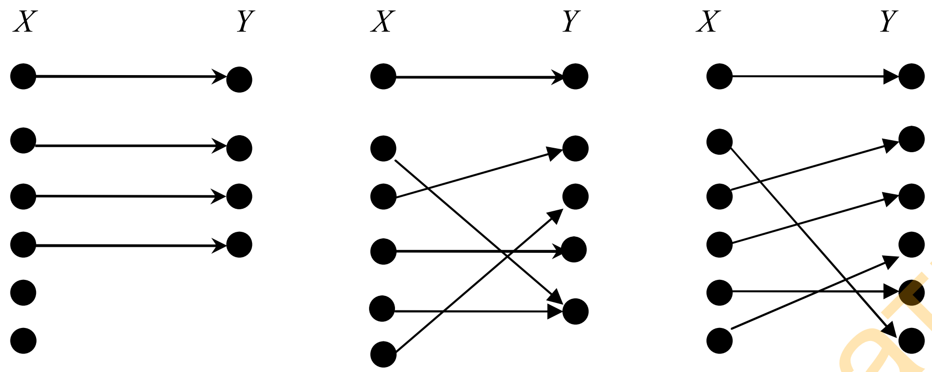


Рис. 4.а Рис. 4.б Рис. 4.в

На рис. 4,а $D(f) \neq X$, так как не для каждого элемента $x \in X$ существует соответствующий элемент (образ) $y \in Y$, следовательно, соответствие не является биекций. На рис. 4,б: $D(f) = X$, $E(f) = Y$ [для каждого $x \in X$ существует соответствующий элемент (образ) $y \in Y$], но есть два элемента $x_2, x_5 \in X$, каждому из которых соответствует один и тот же образ $y_5 \in Y$, следовательно, соответствие не является биекций. На рис. 4,в: $D(f) = X$, $E(f) = Y$, каждый элемент $x \in X$ имеет единственный образ $y = f(x) \in Y$ и каждому элементу $y \in Y$ соответствует единственный прообраз $x = f^{-1}(y) \in X$.

Из определения 1.37 биекции следует, что для обратного отношения f^{-1} выполняются свойства:

1) $D(f^{-1}) = Y$, $E(f^{-1}) = X$,

2) $(\forall y \in Y)(\exists! x \in X) : x = f^{-1}(y)$,

3) $(\forall x \in X)(\exists! y \in Y) : (f^{-1})^{-1}(x) = f(x) = y$.

Отсюда следует, что f^{-1} есть также биекция (взаимно-однозначное соответствие) Y на X.

Определение 1.38. Пусть даны две биекции $X \xleftrightarrow{f} Y$, $Y \xleftrightarrow{g} Z$. Композицией $g \circ f$ называется соответствие вида

$$g \circ f = \{(x, z) \in X \times Z : \ (\exists y \in Y : (x, y) \in f, (y, z) \in g)\}.$$

Для композиции $g \circ f$ образ каждого $x \in X$ имеет вид $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, а прообраз каждого $z \in Z$ $(g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z))$.

1.18. Мощность множества. Кардинальные числа

Определение 1.39. Два множества A, B называются эквивалентными (равномощными), что обозначается как $A \sim B$, если существует биекция f одного множества на другое, то есть $A \sim B \Leftrightarrow (\exists f) A \xleftrightarrow{f} B$.

На интуитивном уровне понятие равномощности (эквивалентности) естественно понимать как понятие “состоять из равного числа элементов”. Для конечных множеств равномощность означает в точности, что эти множества имеют равное количество элементов, а в остальном – произвольны.

Пример 1.37. 1. Множества $A = \{1,2,3\}, B = \{x_1, x_2, x_3\}$ эквивалентны, так как существует биекция $A \xleftrightarrow{f} B$ между этими множествами по правилу $f(1) = x_1,\ f(2) = x_2,\ f(3) = x_3$.

2. Множества $A = \{2,4,6,\ldots,2k,2(k+1),\ldots\}, B = \mathrm{N} = \{1,2,3,\ldots,k,k+1,\ldots\}$ эквивалентны, так как существует биекция $A \xleftrightarrow{f} B$ по правилу $f(2) = 1, f(4) = 2, f(6) = 3,\ldots, f(2k) = k,\ldots$.

3. Множества (отрезки числовой прямой) $A = [a,b], B = [c,d]$ $(a < b, c < d)$ эквивалентны, так как существует биекция $A \xleftrightarrow{f} B$ по правилу $f(x) = \dfrac{d-c}{b-a}(x-a) + c$, $x \in [a,b]$. Действительно, точка $x = a$ отрезка $[a,b]$ отображается в точку $y = f(a) = \dfrac{d-c}{b-a}(a-a) + c = 0 + c = c$ отрезка $[c,d]$, точка $x = b$ отрезка $[a,b]$ отображается в точку $y = f(b) = \dfrac{d-c}{b-a}(b-a) + c = d - c + c = d$ отрезка $[c,d]$. При этом любая внутренняя точка отрезка $[a,b]$ взаимно-однозначно отображается в соответствующую внутреннюю точку отрезка $[c,d]$.

Понятие равномощности задает в универсальном классе (универсальном множестве) Ω некоторое бинарное отношение ρ по правилу

$$\forall A, B \in \Omega : A \rho B \Leftrightarrow A \sim B.$$

Это отношение:

1) рефлексивно, то есть $\forall A \in \Omega : A \rho A$ $(A \sim A)$. В качестве биекции достаточно взять тождественное преобразование $A \xleftrightarrow{e} A$, $e(a) = a$ для каждого $a \in A$;

2) симметрично, то есть $\forall A, B \in \Omega : A \rho B \Rightarrow B \rho A$. Действительно, если $A \rho B$, то существует биекция $f : A \to B$ множества A на множество B. При этом обратное соответствие $f^{-1} : B \to A$ также является биекцией (B на A), то есть $B \rho A$;

3) транзитивно, то есть $\forall A,B,C \in \Omega : A\rho B,\ B\rho C \Rightarrow A\rho C$. Действительно, если $A\rho B,\ B\rho C \Rightarrow \exists f,g : A \xleftrightarrow{f} B, B \xleftrightarrow{g} C$. Тогда композиция $g \circ f$ также является биекцией A на C, что и означает эквивалентность множеств A и C, то есть $A\rho C$.

Таким образом, отношение ρ является отношением эквивалентности. Оно разбивает универсальный класс Ω на непустые, непересекающиеся подклассы эквивалентных между собой множеств. Два множества, попавшие в один класс, равномощны (эквивалентны), в разные – не равномощны (не эквивалентны). Значит, каждый класс является тем общим, что объединяет все множества, входящие в него (характерным для множеств именно этого класса).

Определение 1.40. Для любого множества $X \in \Omega$ класс эквивалентных множеств, в который вошло множество X, называется его *кардиналом*, *мощностью* или *кардинальным числом*, и обозначается как $card\ X$.

Следовательно, если множества $X,Y \in \Omega$ эквивалентны, $X \sim Y$, то $card\ X = card\ Y$ (то есть множества $X,Y \in \Omega$ вошли в один и тот же класс эквивалентности). Совокупность всех кардинальных чисел называется кардинальной осью, и обозначается как $card\ \Omega$.

Естественно, если множество конечно, то его мощность равна количеству элементов в данном множестве: $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $cardX = m$. Для пустого множества $\varnothing$ по умолчанию мощность равна 0: $card\ \varnothing = 0$.

1.19. Счетные и несчетные множества. Мощность множества действительных чисел

Определение 1.41. Множество A называется счетным, если оно равномощно множеству $\mathbf{N}$ натуральных чисел: $A \sim \mathbf{N}$, то есть существует биекция f множества A на $\mathbf{N}$: $A \sim \mathbf{N} \Leftrightarrow (\exists f) A \xleftrightarrow{f} \mathbf{N}$.

Из этого определения следует, что множество A счетно, если все его элементы можно пронумеровать, использовав при этом весь натуральный ряд $\mathbf{N}$. По-другому можно сказать, что множество A счетно, если его можно представить в виде числовой последовательности, то есть $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, где $a_n = f(n), n \in \mathbf{N}$, f – функция натурального аргумента $n \in \mathbf{N}$.

Обозначим далее $card\ \mathbf{N} = a$. Тогда, если A есть счетное множество, то $card\ A = a$.

Заметим, что всякое бесконечное множество X имеет счетное подмножество. Отсюда следует, что $card\ X \geq a$, то есть среди бесконечных множеств счетное есть “самое маленькое” по мощности (по “числу элементов”), а на кардинальной оси мощность счетного множества следует сразу за конечными мощностями (то есть за мощностями конечных множеств):

$$\boxed{0 < 1 < 2 < ... < n < ... < a < ...}$$

Отметим некоторые **свойства мощностей** множеств:

1. Объединение счетного и конечного множества есть вновь счетное множество, что символически можно обозначить как $\forall n \in \mathbf{N} \cup \{0\} : a + n = a$. Это означает, что добавление к счетному множеству конечного множества не меняет его счетность.

2. Разность счетного и конечного множества есть вновь счетное множество, то есть $\forall n \in \mathbf{N} \cup \{0\} : a - n = a$.

3. Объединение конечного числа счетных множеств есть счетное множество, то есть $a + a + ... + a = a$.

4. Объединение счетного числа счетных множеств есть счетное множество, то есть $a + a + ... + a + ... = a$.

5. Объединение счетного числа непустых, попарно не пересекающихся конечных множеств есть счетное множество, то есть $n_1 + n_2 + ... + n_k + ... = a$.

6. Множество $\mathbf{Z}$ целых чисел счетно ($card\ \mathbf{Z} = a$), так как оно является объединением множества натуральных чисел, отрицательных натуральных чисел и числа 0, $\mathbf{Z} = \{0\} \cup \mathbf{N} \cup \{-1, -2, -3, ...\}$.

7. Мощность множества Q рациональных чисел равна $card\ Q = a$, то есть множество Q счетно. Действительно, множество $\left\{ \frac{n}{q},\ n \in \mathbf{N} \right\}$ ($q \in \mathbf{N}$ – фиксированное число) счетно. Знаменатель дроби принимает счетное множество натуральных значений, значит, множество $Q^+ = \left\{ \frac{n}{q},\ n, q \in \mathbf{N} \right\}$ положительных рациональных чисел счетно (как объединение счетного числа счетных множеств). Удалив из него все сократимые дроби, получим опять счетное множество. В итоге $Q = Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$ счетно.

8. Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно.

9. Из всякого бесконечного множества можно выделить счетное подмножество.

Определение 1.42. Бесконечное множество X называется несчетным, если оно не равномощно множеству $\mathbf{N}$ натуральных чисел, то есть не существует биекции множества X на $\mathbf{N}$.

Но X как бесконечное несчетное множество содержит счетное подмножество $X^* \subset X$, $cardX^* = a$, $X^* \sim \mathbf{N}$. Тогда $card\ X \rangle card\ \mathbf{N} = a$. Следовательно, всякое несчетное множество должно иметь мощность, большую чем a. А есть ли такие множества, у которых в интуитивном смысле элементов “больше”, чем в множестве $\mathbf{N}$?

Пример 1.38. Пусть X – несчетное множество, $cardX = \alpha$. Через 2^X обозначим множество всех подмножеств множества X. Естественно обозначить тогда $card 2^X = 2^\alpha$. Тогда $card 2^X \rangle cardX$, то есть $2^\alpha \rangle \alpha$. В частности, отсюда следует, что кардинальная ось не ограничена сверху, то есть нет множества наибольшей мощности. Также отсюда следует, что существуют несчетные множества, мощность которых больше чем $card\ \mathbf{N} = a$.

Пример 1.39. Пусть X – несчетное множество, A - конечное или счетное множество. Тогда $X \cup A \sim X$, $X \setminus A \sim X$ (добавление к несчетному множеству, или удаление из него конечного или счетного множества не меняет его мощности).

Определение 1.43. Пусть $\{\Delta_n\}_n$ – последовательность отрезков (сегментов), где $\Delta_n = [a_n,\ b_n]$ ($n \in \mathbf{N}$). Последовательность $\{\Delta_n\}_n$ называется вложенной, если

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$$

При этом вложенная последовательность сегментов $\{\Delta_n\}_n$ имеет по крайней мере одну общую точку. Мерой (длиной) отрезка $\Delta_n = [a_n,\ b_n]$ будем называть число $m(\Delta_n) = b_n - a_n > 0$. Вложенная последовательность $\{\Delta_n\}_n$ сегментов называется стягивающейся, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется отрезок, длина которого меньше чем $\varepsilon > 0$, $m(\Delta_n) = b_n - a_n < \varepsilon$.

Справедливо утверждение, которое называется принципом Кантора: всякая стягивающаяся последовательность вложенных отрезков имеет только одну общую точку, то есть существует единственная точка $\xi \in \mathbf{R}$: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \{\xi\}$.

Множество $\Delta = [0,1]$ - несчетное множество. Докажем это утверждение при помощи принципа Кантора. Предположим противное, что отрезок $\Delta = [0,1]$ есть счетное множество. Тогда все его точки можно представить в виде последовательности $\Delta = [0,1] = \{x_n\}_n$, то есть любая точка $x = x_n \in [0,1]$. Разделим отрезок $[0,1]$ на три части: $[0,1] = [0,\ 1/3] \cup [1/3,\ 2/3] \cup [2/3,\ 1]$. Точка x_1 не может принадлежать сразу трем отрезкам, хотя бы один из них не содержит точку x_1. Обозначим этот отрезок через u_1. Разделим отрезок u_1 на три равные части и обозначим через u_2 тот, который не содержит точку x_2. Аналогично поступаем с отрезком u_2, и отрезок u_3 - тот, который не содержит точку x_3. И так далее. В результате получим бесконечную последовательность вложенных друг в друга сегментов $\Delta \supset u_1 \supset u_2 \supset u_3 \supset \ldots \supset u_n \supset \ldots$, причем при всяком $n \in \mathbf{N}$:

$$\boxed{x_n \notin u_n}.$$

По построению отрезков длина отрезка u_n равна величине $m(u_n) = \dfrac{1}{3^n}$, причем $m(u_n) = \dfrac{1}{3^n} \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, последовательность вложенных отрезков $\{u_n\}$ является стягивающейся и по принципу Кантора имеет только одну единственную общую точку $\boxed{\xi \in u_n}$ (при всех $n \in \mathbf{N}$). Так как $\xi \in [0,1]$, то $\xi \in \{x_n\}$. Но так как $\xi \in u_n$ (при всех $n \in \mathbf{N}$) и $x_n \notin u_n$, то $\xi \neq x_n$ при всех $n \in \mathbf{N}$, то есть $\xi \notin \{x_n\}$.

Определение 1.44. Если множество X эквивалентно $\Delta = [0,1]$, то говорят, что множество X имеет мощность континуума, или мощность c: $cardX = c$.

Отметим простейшие свойства множеств мощности континуума:

1. Пусть A есть конечное или счетное множество, $cardX = c$. Тогда $X \cup A \sim X$ $(c+n=c, c+a=c)$, $X \setminus A \sim X$ $(c-n=c,\ c-a=c)$.

2. Всякий отрезок $[a,b]$, интервал (a,b), полуинтервал $[a,b),(a,b]$ имеет мощность континуума.

3. Объединение конечного или счетного числа множеств мощности c имеет мощность c.

4. Мощность множества $\mathbf{R}$ вещественных чисел равна c.

5. Множество $\Delta = [0,1]$ как бесконечное имеет счетные подмножества. Следовательно, $card\Delta = c \geq card\mathbf{N} = a$, то есть $c \geq a$. Но $\Delta = [0,1]$ несчетно, значит, $c \rangle a$. Окончательно на кардинальной оси имеем

$$\boxed{0 \langle 1 \langle 2 \langle \ldots \langle n \langle \ldots \langle a \langle c \ldots}$$

Вопрос о существовании (или отсутствии) множеств мощности, большей чем a, но меньшей чем c, составляет так называемую “*проблему континуума*”. Решение этого вопроса выходит за рамки данного пособия.

Всякое число, не являющееся рациональным, называется иррациональным. Множество всех иррациональных чисел обозначается как $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$.

6. Мощность $card(\mathbf{R} - \mathbf{Q}) = c$, то есть “практически все” действительные числа являются иррациональными.

Глава 2. Основные алгебраические структуры: группы, кольца, поля

2.1. Бинарные операции, их виды

Определение 2.1. Пусть дано непустое множество A. Отображение $f: A^n = A \times A \times \ldots \times A \to A$ по правилу $b = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in A$, называется n*-местной алгебраической операцией* на A. При этом число n называется рангом операции.

Согласно определению 1, каждому упорядоченному набору элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ ставится в соответствие один единственный элемент $b \in A$ (то есть элемент того же множества).

При $n = 0$ операция называется нуль-местной (эта операция выделяет какой-то элемент из множества A, см. ниже). При $n = 1$ операция называется одноместной (*унарной*). Наиболее частый случай - двухместная (*бинарная алгебраическая*) операция ($n = 2$). В этом случае бинарную операцию на A обозначают каким-нибудь специальным символом: $*, \oplus, +, \ldots$, называя ее условно произведением, суммой и т.д.

Пример 2.1. Приведем примеры алгебраических операций.

1. На множестве $A = \mathbf{R}$ действительных чисел унарная операция – нахождение противоположного элемента $-a$ для числа $a \in \mathbf{R}$, бинарные операции: сложение (+), вычитание (-), умножение ($\cdot$), то есть при всех $a, b \in \mathbf{R}$: $a + b,\ a - b,\ a \cdot b \in \mathbf{R}$.

2. На множестве $A = \mathbf{N}$ натуральных чисел можно ввести бинарные операции сложения (+) и умножения ($\cdot$), так как результатом этих операций всегда является натуральное число: $a_1 + a_2,\ a_1 \cdot a_2 \in \mathbf{N}$. Примером n-местной операции на $\mathbf{N}$ может являться операция нахождения НОД чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{N}$: $b = \text{НОД}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. При этом операции вычитания и деления не являются бинарными операциями на множестве $\mathbf{N}$, так как разность и деление двух натуральных чисел не всегда являются натуральным числом.

3. На множестве $\mathbf{P}(M)$ всех подмножеств множества $M \neq \varnothing$ ($M \subset \Omega$) бинарными операциями являются операции пересечения $\cap$, объединения $\cup$ и разности $\setminus$ двух множеств, так как для любых $A_1, A_2 \subset P(M)$: $A_1 \cap A_2, A_1 \cup A_2, A_1 \setminus A_2 \subset P(M)$. При этом операция дополнения до универсального Ω не является одноместной операцией на $P(M)$, так как если $A_1 \subset P(M)$, то $\overline{A_1} \not\subset P(M)$ [дополнение $\overline{A_1}$ не является элементом множества $P(M)$].

4. На множестве $\mathbf{M}_n$ матриц n-го порядка бинарными операциями являются операции сложения и умножения матриц. Унарной операцией является операция транспонирования матрицы. В результате перечисленных операций получается матрица из множества $\mathbf{M}_n$.

Приведем виды бинарных операций. Пусть $\oplus, \otimes$ – две бинарные операции, определенные на множестве $A \neq \varnothing$.

Определение 2.2. Операция

1) $\oplus$ называется *коммутативной*, если $\forall a,b \in A: a \oplus b = b \oplus a$,

2) $\oplus$ называется *ассоциативной*, если $\forall a,b,c \in A$: $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$,

3) $\otimes$ называется *дистрибутивной* относительно операции $\oplus$, если $\forall a,b,c \in A: a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$.

Пример 2.2. 1. На множестве $A = \mathbf{R}$ бинарные операции сложения (+) и умножения ($\cdot$) являются коммутативными: $\forall a,b \in \mathbf{R}: a + b = b + a,\ a \cdot b = b \cdot a$, ассоциативными: $\forall a,b,c \in \mathbf{R}: a + (b + c) = (a + b) + c,\ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, операция умножения дистрибутивна относительно операции сложения: $\forall a,b,c \in \mathbf{R}: a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ [но не наоборот, так как $a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c)$]. Операция вычитания не является ни коммутативной, ни ассоциативной операцией на $A = \mathbf{R}$.

2. На множестве $\mathbf{P}(M)$ операции пересечения ($\cap$) и объединения ($\cup$) являются коммутативными и ассоциативными, так как по свойствам операций над множествами для любых $A_1, A_2, A_3 \subset P(M)$:

$$A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1,\ A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1,$$

$$A_1 \cap (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cap A_2) \cap A_3,\ A_1 \cup (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cup A_2) \cup A_3.$$

Каждая из этих операций является дистрибутивной относительно другой операции (на основании законов над множествами).

3. На множестве $\mathbf{M}_n$ операция сложения матриц является коммутативной и ассоциативной операцией. Операция умножения матриц не является коммутативной (так как в общем случае для квадратных матриц $A, B \in \mathbf{M}_2: A \cdot B \neq B \cdot A$), но является ассоциативной.

2.2. Нейтральные, регулярные и симметричные элементы

Определение 2.3. Элемент $e \in A$ называется *левым* (*правым*) *нейтральным* (или *единичным*) элементом относительно бинарной операции *, если $\forall a \in A$: $e * a = a$ (соответственно $\forall a \in A$: $a * e = a$).

Элемент $e \in A$ называется *нейтральным* элементом относительно бинарной операции *, если он является одновременно и левым, и правым нейтральным элементом, то есть $\forall a \in A$: $e * a = a = a * e$.

Заметим, что нейтральный элемент $e \in A$ относительно бинарной операции * единственный, так как если предположить, что существует нейтральный элемент $e' \neq e$, то $e * e' = e, e' * e = e'$, откуда получаем $e' = e$.

Определение 2.4. Множество A с заданной на нем бинарной ассоциативной операцией называется *полугруппой*.

Пример 2.3. Приведем примеры нейтральных элементов:

1. Число 0 (нуль) – нейтральный элемент относительно операции сложения на множестве вещественных чисел, так как $\forall a \in \mathbf{R}$: $0 + a = a = a + 0$.

2. Число 1 (единица) – нейтральный элемент относительно операции умножения на множестве целых чисел, так как $\forall a \in \mathbf{Z}$: $1 \cdot a = a = a \cdot 1$.

3. Пустое множество $\varnothing$ - нейтральный элемент относительно операции объединения ($\cup$) на множестве $A = P(M)$, так как по свойству операций над множествами $\forall X \subset P(M): \varnothing \cup X = X = X \cup \varnothing$.

4. На множестве $\mathbf{M}_n$ нулевая матрица $O = (0)_{i,j=1}^{n}$ есть нейтральный элемент относительно сложения матриц, так как $O + A = A = A + O$, а единичная матрица E есть нейтральный элемент относительно операции произведения квадратных матриц, так как $E \cdot A = A = A \cdot E$

Определение 2.5. Элемент $a \in A$ называется *регулярным справа (регулярным слева)* относительно бинарной операции $*$, если $\forall b, c \in A$: $a * b = a * c \Rightarrow b = c$ (соответственно $\forall b, c \in A$: $b * a = c * a \Rightarrow b = c$). Если при этом элемент $a \in A$ является одновременно регулярным и справа, и слева, то он называется *регулярным элементом.*

Регулярность элемента означает, что обе части равенства можно сократить на этот элемент.

Пример 2.4. 1. На $A = \mathbf{Z}$ любое число $a \in \mathbf{Z}$ является регулярным относительно операции сложения, так как

$\forall a, b, c \in \mathbf{Z}$: $a + b = a + c \Rightarrow b = c$, $b + a = c + a \Rightarrow b = c$.

2. На $A = \mathbf{N}$ натуральных чисел любое $a \in \mathbf{N}$ является регулярным относительно операции умножения, так как

$\forall a, b, c \in \mathbf{N}$: $a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$, $b \cdot a = c \cdot a \Rightarrow b = c$.

Во всех приведенных примерах мы сокращаем обе части равенства на регулярный элемент.

Определение 2.6. Элемент $a' \in A$ называется *левым* (*правым*) *симметричным* к элементу $a \in A$ относительно бинарной операции $*$, если $a' * a = e$ (соответственно $a * a' = e$). Если при этом элемент $a' \in A$ является одновременно и левым, и правым симметричным элементом, то он называется *симметричным* элементом относительно бинарной операции $*$. При этом элементы $a, a' \in A$ называются *взаимно симметричными элементами.*

Если для элемента $a \in A$ существует симметричный элемент $a' \in A$, то говорят, что элемент $a \in A$ *симметризуем.*

Пример 2.5. 1. На множестве $A = \mathbf{Z}$ любое число $a \in \mathbf{Z}$ имеет симметричный элемент $a' = -a \in \mathbf{Z}$ (он называется противоположным к a) относительно операции сложения, так как очевидно $a + (-a) = 0$.

2. На множестве $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ всех вещественных чисел (без нуля)

любое число $a \in \mathbf{R}^*$ имеет симметричный (обратный) элемент $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ относительно операции умножения, так как $a \cdot a^{-1} = 1$.

3. На множестве $\mathbf{M}_n^*$ неособенных квадратных матриц n-го порядка любая матрица $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$ ($\det A \neq 0$) имеет обратную матрицу A^{-1} относительно операции умножения матриц такую, что $A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A$ (матрица E есть нейтральный элемент относительно операции умножения неособенных матриц).

Рассмотрим некоторые свойства симметризуемых элементов.

1. Если бинарная операция * ассоциативна и элемент $a \in A$ симметризуем, то существует единственный элемент, симметричный к $a \in A$.

2. Если элементы $a, b \in A$ симметризуемы относительно ассоциативной операции $*$, то элемент $a * b \in A$ также симметризуем и элемент $\left(b' * a'\right) \in A$ есть симметричный элемент к $a * b \in A$.

3. Элемент, симметризуемый относительно ассоциативной операции *, является регулярным относительно этой операции.

Докажем, например, свойство 2. Пусть a', b' есть симметричные элементы к элементам $a, b \in A$. Рассмотрим элемент $(a * b) * (b' * a')$:

$$(a * b) * (b' * a') = a * \left(b * (b' * a')\right) = a * \underbrace{(b * b')}_{=e} * a' = \underbrace{a * e}_{=a} * a' = a * a' = e.$$

Аналогично показывается, что $(b' * a') * (a * b) = e$, откуда следует, что элемент $(b' * a') \in A$ есть симметричный элемент к $a * b \in A$.

2.3. Понятие алгебры. Изоморфные алгебры

Определение 2.7. *Алгеброй* (или *алгебраической структурой*) называется упорядоченная пара $\mathfrak{A} = \langle A, \omega \rangle$, где $A \neq \varnothing$ – основное множество (носитель алгебры), ω – множество главных операций на A.

Как правило, множество ω главных операций на A конечно, поэтому используют запись $\mathfrak{A} = \langle A, \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \rangle$ или просто $\mathfrak{A} = \langle A, f_1, f_2, \ldots, f_n \rangle$ (здесь $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – главные операции на множестве A).

Определение 2.8. *Типом* алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, f_1, f_2, \ldots, f_n \rangle$ называется последовательность $\left(r(f_1), r(f_2), \ldots, r(f_n)\right)$, где $r(f_i)$ – ранг операции f_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$. При этом две алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, f_1, f_2, \ldots, f_n \rangle$, $\mathfrak{B} = \langle B, g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle$ называются *однотипными*, если их типы совпадают: $r(f_i) = r(g_i)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$.

Приведем простейшие примеры алгебр.

Пример 2.6. 1. $\mathfrak{Z} = \langle Z, +, \cdot \rangle$ – алгебра целых чисел типа (2,2) с бинарными операциями сложения и умножения.

2. $\tilde{\mathbf{N}} = \langle \mathbf{N},\ +,\ \cdot,\ 1 \rangle$ – алгебра натуральных чисел типа (2,2,0) с бинарными операциями сложения и умножения и нуль-местной операцией (выделением единичного элемента, число 1 относительно умножения).

3. $\tilde{\Omega} = \langle \Omega,\ \cup,\ \cap,\ \bar{\ } \rangle$ – алгебра типа (2,2,1) с бинарными операциями объединения и пересечения двух множеств и унарной операцией дополнения ($\bar{\ }$) до универсального множества Ω.

Определение 2.9. Алгебра $\tilde{A} = \langle A,\ *,\ e \rangle$ типа (2,0) с ассоциативной бинарной операцией * на множестве A и нейтральным элементом $e \in A$ относительно этой операции называется *моноидом* (*полугруппой с единицей*).

Например, моноидами являются алгебры $\tilde{\mathbf{Z}} = \langle Z,\ +,\ 0 \rangle$, $\tilde{\mathbf{Z}} = \langle Z,\ \cdot,\ 1 \rangle$, $\tilde{\mathbf{R}} = \langle \mathbf{R},\ +,\ 0 \rangle$, $\tilde{\mathbf{N}} = \langle \mathbf{N},\ \cdot,\ 1 \rangle$, $\tilde{\Omega} = \langle \Omega,\ \cup,\ \varnothing \rangle$ (в последнем случае нейтральный элемент – это пустое множество, так как $A \cup \varnothing = A$).

Определение 2.10. Пусть $\tilde{A},\ \tilde{B}$ - две однотипные алгебры, f_A, f_B – соответствующие главные операции в $\tilde{A},\ \tilde{B}$ ранга m. Отображение $h: A \to B$ сохраняет операцию f_A в алгебре $\tilde{A}$, если для любых элементов $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$:

$$h\left(f_A\left(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_m\right)\right) = f_B\left(h\left(a_1\right),\ h\left(a_2\right),\ \dots,\ h\left(a_m\right)\right). \tag{2.1}$$

Если f_A, f_B – нуль-местные операции (выделение соответствующих нейтральных элементов $e_A,\ e_B$ в A, B), то равенство (2.1) примет вид $h\left(e_A\right) = e_B$.

Если f_A, f_B – бинарные операции, то равенство (1) примет вид

$$h\left(f_A\left(a_1,\ a_2\right)\right) = f_B\left(h\left(a_1\right),\ h\left(a_2\right)\right). \tag{2.2}$$

Определение 2.11. Пусть $\tilde{A},\ \tilde{B}$ - однотипные алгебры. Отображение $h: A \to B$, сохраняющее все главные операции в $\tilde{A}$ [равенство (2.1) верно для всех главных операций в $\tilde{A}$)], называется *гомоморфизмом* $\tilde{A}$ в $\tilde{B}$.

Если $R\left(A\right) = B$ и $h: A \to B$ есть инъективное отображение, то h называется *изоморфизмом* $\tilde{A}$ на $\tilde{B}$. При этом алгебры $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называются *изоморфными* (пишут $\tilde{A} \cong \tilde{B}$).

Пример 2.7. Покажем, что алгебры $\tilde{A} = \langle \mathbf{R}^+,\ \cdot,\ 1 \rangle$, $\tilde{B} = \langle \mathbf{R},\ +,\ 0 \rangle$ изоморфны.

Решение. Введем отображение $h: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ по правилу

$$h\left(x\right) = \ln x,\ x \in \mathbf{R}^+,\ h\left(x\right) \in \mathbf{R}.$$

Отображение $h: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ является инъективным. При этом $h\left(1\right) = \ln 1 = 0$, то есть нейтральный элемент $1 = e_A$ отображается в соответствующий нейтральный $0 = e_B$.

Проверим выполнимость равенства (2.2): в нашем случае f_A – бинарная операция умножения ($f_A(a_1,\, a_2) = a_1 \cdot a_2$), тогда $h\big(f_A(a_1,\, a_2)\big) = \ln(a_1 \cdot a_2)$, f_B – бинарная операция сложения, тогда

$$f_B\big(h(a_1),\, h(a_2)\big) = h(a_1) + h(a_2) = \ln(a_1) + \ln(a_2).$$

Используя свойство логарифма, получим равенство (2.2): $h\big(f_A(a_1,\, a_2)\big) = \ln(a_1 \cdot a_2) = \ln(a_1) + \ln(a_1) = f_B\big(h(a_1),\, h(a_2)\big)$.

Отметим основные свойства гомоморфизмов алгебр.

1. Пусть h – гомоморфизм (изоморфизм) $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, g – гомоморфизм (изоморфизм) $\mathcal{B}$ в $\mathcal{C}$. Тогда композиция $g \circ h$ – гомоморфизм (изоморфизм) $\mathcal{A}$ в $\mathcal{C}$.

2. Если h – изоморфизм $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$, то h^{-1} – изоморфизм $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$.

3. Отношение изоморфизма $\cong$ на множестве однотипных алгебр является отношением эквивалентности.

Докажем свойство 3. Отношение изоморфизма $\cong$ является рефлексивным, то есть для любой алгебры $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$ (алгебра $\mathcal{A}$ изоморфна самой себе, в качестве инъективного отображения достаточно взять тождественное преобразование). Отношение изоморфизма $\cong$ является симметричным, то есть если $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, то $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$ (по свойству 2) если h – изоморфизм $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$, то h^{-1} – изоморфизм $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$). Отношение изоморфизма $\cong$ является транзитивным, то есть если $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \cong \mathcal{C}$, то $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ (доказывается при помощи свойства 1).

2.4. Понятие группы. Свойства групп

Определение 2.12. Алгебра $\mathcal{G} = \langle G,\ *,\ ' \rangle$ типа (2,1) с бинарной операцией * и унарной операцией $'$ называется *группой*, если:

G1) операция * ассоциативна, $\forall a,b,c \in G : a*(b*c) = (a*b)*c$,

G2) существует правый нейтральный элемент $e \in G$ относительно операции * такой, что $\forall a \in G : a*e = a$,

G3) для любого элемента $a \in G$ существует правый симметричный элемент $a' \in G$ такой, что $a*a' = e$.

Таким образом, группа – это моноид, все элементы которого обратимы.

Группа $\mathcal{G}$ называется конечной (порядка n), если основное множество состоит из конечного числа n элементов. В противном случае группа $\mathcal{G}$ называется бесконечной. Простейшим примером конечной группы является $\mathcal{G} = \langle G,\ \cdot,\ ^{-1} \rangle$ с основным множеством $G = \{-1,\ 1\}$ и операцией умножения. Действительно, операция умножения ассоциативна, правый нейтральный элемент $e = 1$, так как $1 \cdot 1 = 1$, $(-1) \cdot 1 = -1$. Для элемента $a = 1$ ($a = -1$) существует правый симметричный (обратный) элемент $a^{-1} = 1$ (соответственно $a^{-1} = -1$) такой, что $a \cdot a^{-1} = 1$.

Определение 2.13. Группа $\mathcal{G} = \langle G,\ *,\ '\rangle$ называется *абелевой* (*коммутативной*), если бинарная операция * коммутативна, $\forall a,b \in G : a * b = b * a$.

Сам термин "группа" принадлежит французскому математику Галуа - подлинному создателю теории групп. Термин "абелева группа" назван в честь норвежского математика Абеля.

Часто используют две формы записи групп:

1) мультипликативная форма записи: $\mathcal{G} = \langle G,\ \cdot,\ ^{-1}\rangle$ ($\cdot$ - операция умножения в G; $^{-1}$ - операция перехода к правому обратному элементу в G, $e = 1 -$ нейтральный элемент относительно умножения),

2) аддитивная форма записи: $\mathcal{G} = \langle G,\ +,\ -\rangle$ ($+$ есть операция сложения в G, $-$ есть операция перехода к правому противоположному элементу, 0 - нейтральный элемент относительно сложения в G).

Приведем примеры групп.

Пример 2.8.

1. $\mathbb{R} = \langle \mathbf{R},\ +,\ -\rangle -$ аддитивная (абелева) группа действительных чисел.

2. $\mathbb{Z} = \langle \mathbf{Z},\ +,\ -\rangle -$ аддитивная (абелева) группа целых чисел.

3. $\mathbb{Q} = \langle \mathbf{Q},\ +,\ -\rangle -$ аддитивная (абелева) группа рациональных чисел.

4. $\mathbb{R}^* = \langle \mathbf{R}^*,\ \cdot,\ ^{-1}\rangle -$ мультипликативная (абелева) группа действительных чисел ($\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$). Действительно, операция умножения ассоциативна, коммутативна, 1 – правый нейтральный элемент относительно умножения, и для каждого числа $a \in \mathbf{R}^*$ существует обратный элемент $a^{-1} = \dfrac{1}{a} \in \mathbf{R}^*$: $a \cdot a^{-1} = 1$.

5. $\mathbb{Q}^* = \langle \mathbf{Q}^*,\ \cdot,\ ^{-1}\rangle -$ мультипликативная (абелева) группа рациональных чисел ($\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$). Действительно, операция умножения ассоциативна, коммутативна, 1 – правый нейтральный элемент относительно умножения и для каждой дроби $q = \dfrac{m}{n} \in \mathbf{Q}^*$ $(m \neq 0)$ существует обратный элемент $q^{-1} = \dfrac{n}{m} \in \mathbf{Q}^*$ такой, что $q \cdot q^{-1} = 1$.

6. $\langle V^2,\ +,\ -\rangle -$ аддитивная (абелева) группа геометрических векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in V^2$ на плоскости с бинарной операцией + сложения векторов и унарной операцией – перехода к противоположному вектору. Под нейтральным элементом понимается нулевой вектор $\vec{0} \in V^2$.

7. $\langle G,\ \circ,\ ^{-1}\rangle -$ группа вращений плоскости вокруг начала координат O. Если $f, g -$ два вращения плоскости на углы α, β (в положительном на-

правлении), то композиция $f \circ g$ – вращение плоскости на угол $\alpha+\beta$, а f' – вращение плоскости на угол $-\alpha$.

8. $\langle \mathbf{M}_2^*, \cdot, ^{-1} \rangle$ – мультипликативная группа неособенных матриц 2-го порядка $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ $\det A \neq 0$, с ассоциативной операцией умножения и унарной операцией $^{-1}$ перехода к обратной матрице A^{-1}. В качестве нейтрального элемента относительно операции умножения выступает единичная матрица E. Заметим, что эта группа не абелева, так как операция умножения матриц не коммутативна.

9. На множестве $\mathbf{M}_2$ рассмотрим подмножество $Ident_{2,2}$ матриц 2-го порядка с определителем, равным 1, то есть $Ident_{2,2}=\{A \in \mathbf{M}_2 : \det A = 1\}$. При этом $\langle Ident_{2,2}, \cdot, ^{-1} \rangle$ – мультипликативная группа квадратных матриц. Очевидно, что $E \in Ident_{2,2}$. При этом на основании свойств определителей: если $A, B \in Ident_{2,2}$, то и $A \cdot B,\ A^{-1} \in Ident_{2,2}$, так как $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 1$, $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = 1$.

10. Рассмотрим множество $\Omega = \{1,2,...,n\}$. Элементы множества $S_n = S(\Omega)$ всех взаимно-однозначных (биективных) преобразований $\Omega \to \Omega$ называются *перестановками*. В наглядной форме произвольную перестановку π изображают в виде матрицы $\pi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ или в виде диаграммы, полностью указывая все образы:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & \dots & n \\ \pi: & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ & i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{array}$$

где $i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_n \in \{1,\ 2, \dots,\ n\}$ - перестановочные символы $i_k \neq i_m$ при $k \neq m$; обозначение $1 \to i_1$ означает, что элемент 1 переходит в элемент i_1.

На множестве $S_n = S(\Omega)$ всех перестановок введем бинарную операцию умножения $\circ$ с общим правилом композиции отображений: $(\pi_1 \circ \pi_2)(i) = \pi_1(\pi_2(i))$. Например, для перестановок $\pi_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

$\pi_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$ имеем перестановку

$$\pi_3=\pi_1\circ\pi_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\4&3&2&1\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&4&3&2\end{array}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}.$$

Операция умножения $\circ$ перестановок удовлетворяет всем условиям определения группы:

а) умножение ассоциативно, то есть $(\pi_1\circ\pi_2)\circ\pi_3=\pi_1\circ(\pi_2\circ\pi_3)$ для всех перестановок $\pi_1,\pi_2,\pi_3\in S_n$,

б) множество S_n обладает единичным элементом относительно операции умножения – тождественной перестановкой $e=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\1&2&\dots&n\end{pmatrix}$ такой, что $\pi\circ e=\pi$. Действительно,

$$\pi\circ e=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\i_1&i_2&\dots&i_n\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\1&2&\dots&n\end{pmatrix}=\begin{array}{cccc}1&2&\dots&n\\\downarrow&\downarrow&\dots&\downarrow\\1&2&\dots&n\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\i_1&i_2&\dots&i_n\end{array}=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\i_1&i_2&\dots&i_n\end{pmatrix}=\pi,$$

в) для каждой перестановки $\pi\in S_n$ существует обратная перестановка $\pi^{-1}\in S_n$ такая, что $\pi\circ\pi^{-1}=e=\pi^{-1}\circ\pi$. Например, в случае S_4 для перестановки

$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$ обратная перестановка равна $\pi^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$, так как

$$\pi\circ\pi^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\4&1&2&3\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\1&2&3&4\end{array}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=e.$$

Итак, алгебра $\langle S_n,\circ,{}^{-1}\rangle$ – мультипликативная группа.

В то же время эта группа не является абелевой, так как операция умножения перестановок не коммутативна, например в случае S_4:

$$\pi_2\circ\pi_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\2&3&4&1\\\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\3&2&1&4\end{array}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\neq\pi_1\circ\pi_2.$$

Найдем порядок (число элементов) группы $\langle S_n,\ \circ,\ ^{-1}\rangle$. Число 1 можно подходящей перестановкой π перевести в любое число $\pi(1)$, для чего существует ровно n различных способов. Зафиксировав $\pi(1)$, в качестве $\pi(2)$ можно брать лишь одно из оставшихся $n-1$ чисел [при этом всего число различных пар $\pi(1)$, $\pi(2)$ будет равно $n(n-1)$], в качестве $\pi(3)$ - соответственно $n-2$ чисел [различных троек $\pi(1)$, $\pi(2)$, $\pi(3)$ будет равно $n(n-1)(n-2)$] и т.д. В итоге всех различных перестановок будет $n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$ Итак, порядок группы $\langle S_n,\ \circ,\ ^{-1}\rangle$ равен $n!$ (то есть данная группа конечная).

Перечислим основные свойства групп. Для наглядности используем мультипликативную форму записи группы: $\tilde{G} = \langle G,\ \cdot,\ ^{-1}\rangle$:

1) в группе правый обратный элемент $a^{-1} \in G$ к элементу $a \in G$ является также и левым обратным элементом к $a \in G$ ($a^{-1}\cdot a = e = a\cdot a^{-1}$),

2) для каждого элемента $a \in G$ элемент $a^{-1} \in G$ является единственным обратным элементом,

3) в группе правый нейтральный элемент $e \in G$ является также и левым нейтральным элементом, причем он единственный,

4) при всех $a, b \in G$ уравнения $a\cdot x = b$, $y\cdot a = b$ всегда имеют единственные решения относительно $x,\ y \in G$ в виде $x = a^{-1}\cdot b$, $y = b\cdot a^{-1}$,

5) в группе элемент $a \in G$ является обратным к элементу $a^{-1} \in G$, то есть $a = \left(a^{-1}\right)^{-1}$.

Докажем, например, утверждение 4. Во-первых, покажем, что элемент $x = a^{-1}\cdot b$ является решением уравнения $a\cdot x = b$:

$$a\cdot x = a\cdot\left(a^{-1}\cdot b\right) = \left(a\cdot a^{-1}\right)\cdot b = e\cdot b = b.$$

Во-вторых, докажем единственность решения. Предположим, что существует другое решение $c \in G$ уравнения $a\cdot x = b$, то есть $a\cdot c = b$, тогда

$$c = e\cdot c = \left(a^{-1}\cdot a\right)\cdot c = a^{-1}\cdot(a\cdot c) = a^{-1}\cdot b = x,$$

то есть $c = x$, что и доказывает единственность элемента $x = a^{-1}\cdot b$ как решения уравнения $a\cdot x = b$.

2.5. Циклические группы

Пусть $\tilde{G} = \langle G,\ \cdot,\ ^{-1}\rangle$ есть мультипликативная группа ($\cdot$ - операция умножения в G; $^{-1}$ - операция перехода к обратному элементу в G, $e = 1-$нейтральный элемент относительно умножения), $a_0 \in G-$ ее фиксированный элемент.

Определение 2.14. Если любой элемент $g \in G$ можно представить в виде $g = \underbrace{a_0 \cdot a_0 \cdot .. \cdot a_0}_{n} = a_0{}^n$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$, то говорят, что G есть *циклическая группа*, порожденная элементом $a_0 \in G$. При этом используют запись $G = \langle a_0 \rangle$.

Нетрудно проверить, что при всех
$n, m \in \mathbf{N}$: $a_0^n \cdot a_0^m = a_0^{n+m}$, $\left(a_0^n\right)^m = a_0^{n \cdot m}$.

Если $\vec{G} = \langle G, +, - \rangle$ есть аддитивная группа, то циклическая группа определяется в виде $G = \langle a_0 \rangle = \{na_0 : n \in \mathbf{N}\}$.

Простейшим примером циклической группы служит аддитивная группа $\vec{\mathbf{Z}} = \langle \mathbf{Z}, +, - \rangle$ целых чисел, порожденная числом 1 или -1.

Матрица $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ порождает циклическую группу матриц $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, так как

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_0^2, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_0^3, \ldots,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_0^n.$$

Примером циклической группы порядка $n \in \mathbf{N}$ является группа C_n вращений $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ против часовой стрелки на углы $0, \dfrac{2\pi}{n}, \dfrac{4\pi}{n}, \ldots, \dfrac{(n-1)2\pi}{n}$ вокруг начала координат *O*, совмещающие с собой правильный n-угольник с центром в точке *O*. Под произведением вращений понимается последовательное выполнение преобразований. При этом $\varphi_k = \underbrace{\varphi_1 \cdot \varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_1}_{k} = \varphi_1^k$ (поворот плоскости на угол $2\pi k / n$ есть последовательное вращение плоскости k раз против часовой стрелки на угол $2\pi / n$), $\varphi_n = \underbrace{\varphi_1 \cdot \varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_1}_{n} = \varphi_1^n = \varphi_0$ (тождественное преобразование, поворот на угол 2π), обратное преобразование $\varphi_k^{-1} = \varphi_1^{n-k}$. Таким образом, группа C_n порождается преобразованием φ_1: $C_n = \langle \varphi_1 \rangle$.

Пусть даны однотипные группы $\vec{G} = \langle G, *, ' \rangle$, $\vec{H} = \langle H, \otimes, '' \rangle$. Так как группа – частный случай алгебры, то для нее также рассматриваются понятия гомоморфизма и изоморфизма.

Определение 2.15. Отображение $f : G \to H$, которое сохраняет главные операции $*$, $'$ в группе $\vec{G} = \langle G, *, ' \rangle$, то есть:

1) для любых элементов $a, b \in G$: $f(a * b) = f(a) \oplus f(b)$,

2) для любого элемента $a \in G: f(a') = \left(f(a)\right)''$,

называется *гомоморфизмом* группы G в группу H.

Если при этом $f: G \to H$ является инъективным отображением G на H, то f называется *изоморфизмом* группы G на группу H, а сами группы называются *изоморфными* ($G \cong H$).

Приведем пример гомоморфизма групп.

Пример 2.9. Пусть $G = \left\langle \mathbf{Q}^*, \cdot, {}^{-1} \right\rangle$ – мультипликативная группа рациональных чисел без нуля ($\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \setminus \{0\}$), $H = \left\langle \mathbf{Q}^+, \cdot, {}^{-1} \right\rangle$ – мультипликативная группа положительных рациональных чисел. Рассмотрим отображение $f: \mathbf{Q}^* \to \mathbf{Q}^+$, $f(a) = |a|$, $a \in \mathbf{Q}^*$. Покажем, что отображение $f: \mathbf{Q}^* \to \mathbf{Q}^+$ сохраняет главные операции в группе G. Используя свойства модуля, имеем:

1) для любых $a, b \in \mathbf{Q}^*: f(a \cdot b) = |a \cdot b| = |a| \cdot |b| = f(a) \cdot f(b)$,

2) для любого $a \in \mathbf{Q}^*: f\left(a^{-1}\right) = \left|a^{-1}\right| = |a|^{-1} = \left(f(a)\right)^{-1}$.

Таким образом, группы G, H гомоморфны.

Заметим, что отображение $f: \mathbf{Q}^* \to \mathbf{Q}^+$, $f(a) = |a|$ ($a \in \mathbf{Q}^*$) не является инъективным отображением [функция $f(x) = |x|$ не является строго монотонной на всем множестве $\mathbf{Q}^*$]. Значит группы G, H не изоморфны.

Теорема 2.1. Все циклические группы одного и того же порядка (в том числе и бесконечного) изоморфны.

Доказательство. Пусть $G = \langle a_0 \rangle$ есть бесконечная циклическая группа, порожденная элементом $a_0 \in G$, $\mathbf{Z} = \langle \mathbf{Z}, +, - \rangle$ - аддитивная группа целых чисел. Тогда все степени $a_0^n \in G$ различны. Введем отображение $f: G = \langle a_0 \rangle \to \mathbf{Z}$ по правилу $f\left(a_0^n\right) = n$. Ясно, что отображение f инъективно, причем f сохраняет операцию: $f\left(a_0^n \cdot a_0^m\right) = f\left(a_0^{n+m}\right) = n + m = f\left(a_0^n\right) + f\left(a_0^m\right)$.

Пусть теперь $G = \langle a_0 \rangle = \left\{e, a_0, a_0^2, \ldots, a_0^{p-1}\right\}$, $G' = \langle b_0 \rangle = \left\{e', b_0, b_0^2, \ldots, b_0^{p-1}\right\}$ – две циклические группы одного и того же порядка p. Определим биективное отображение $f: G \to G'$ по правилу $f\left(a_0^k\right) = b_0^k$ $(k = 0, 1, \ldots, p-1)$. Полагая $n + m = lp + r$, $0 \le r \le p - 1$, для любых $n, m = 0, 1, \ldots, p-1$, получаем

$$f\left(a_0^{n+m}\right) = f\left(a_0^{lp+r}\right) = f\left(a_0^{lp} \cdot a_0^r\right) = f\left(e \cdot a_0^r\right) = f\left(a_0^r\right) = b_0^r = \left(b_0\right)^{n+m} =$$

$$= \left(b_0\right)^n \cdot \left(b_0\right)^m = f\left(a_0^n\right) \cdot f\left(a_0^m\right).$$

2.6. Примеры решения задач

Пример 2.10. Проверить, является ли операция *, заданная на $A=\mathbf{Z}$ по правилу

$$a*b=|a-b| \ (a,b\in\mathbf{Z}),$$

бинарной операцией. Если является, то проверить ее на коммутативность, ассоциативность, наличие нейтрального элемента и симметричного элемента (в случае наличия нейтрального элемента).

Решение. Согласно правилу $a*b=|a-b|$ каждой паре целых чисел $a,b\in\mathbf{Z}$ ставится в соответствие целое число $a*b\in\mathbf{Z}$, то есть операция * является бинарной операцией. По свойству модулей

$$a*b=|a-b|=|b-a|=b*a,$$

значит, операция * коммутативна. Проверим операцию * на ассоциативность, то есть: $a*(b*c)=(a*b)*c$. В данном случае левая часть проверяемого равенства имеет вид

$$a*(b*c)=a*|b-c|=\big|a-|b-c|\big|,$$

а правая

$$(a*b)*c=|a-b|*c=\big||a-b|-c\big|.$$

На примере чисел $a=1,\ b=2,\ c=3$ видно, что равенство не выполняется, так как

$$a*(b*c)=\big|1-|2-3|\big|=\big|1-|-1|\big|=|1-1|=0,$$

$$(a*b)*c=\big||1-2|-3\big|=\big||-1|-3\big|=|1-3|=2.$$

Это говорит о том, что операция * не ассоциативна.

Проверим наличие нейтрального элемента относительно операции *. Так как операция * коммутативна, то достаточно найти левый нейтральный элемент $e\in\mathbf{Z}$: $e*a=a$ (причем равенство должно быть верно при всех $a\in\mathbf{Z}$). Имеем $e*a=|a-e|=a$. Единственным вариантом нейтрального элемента может выступать $e=0$. Однако при $a>0$: $|a-0|=|a|=a$ (требуемое равенство выполняется), а при $a<0$: $|a-0|=|a|=-a\neq a$ (требуемое равенство не выполняется). Значит, нейтрального элемента относительно операции * не существует.

Пример 2.11. Проверить, является ли операция *, заданная на множестве $A=\mathbf{Q}^*=\mathbf{Q}\setminus\{0\}$ рациональных чисел без нуля, по правилу $a*b=\dfrac{a+b}{a\cdot b}$ ($a,b\in\mathbf{Q}^*$), бинарной операцией. Если является, то проверить ее на коммутативность, ассоциативность, наличие нейтрального элемента и симметричного элемента (в случае наличия нейтрального элемента).

Решение. Так как $a=\dfrac{m_1}{n_1},\ b=\dfrac{m_2}{n_2}\ \left(m_1,m_2\in\mathbf{Z}^*,\ n_1,n_2\in\mathbf{N}\right)$, то число

$a*b=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{n_1}{m_1}+\dfrac{n_2}{m_2}\in\mathbf{Q}^*$, то есть операция * является бинарной операцией на множестве $\mathbf{Q}^*$. Очевидно, что операция * является коммутативной и ассоциативной операцией, так как

$$a*b=\frac{n_1}{m_1}+\frac{n_2}{m_2}=\frac{n_2}{m_2}+\frac{n_1}{m_1}=b*a,$$

$$a*(b*c)=\frac{n_1}{m_1}+\left(\frac{n_2}{m_2}+\frac{n_3}{m_3}\right)=\left(\frac{n_1}{m_1}+\frac{n_2}{m_2}\right)+\frac{n_3}{m_3}=(a*b)*c.$$

Проверим наличие нейтрального элемента $e\in\mathbf{Q}^*$, удовлетворяющего уравнению: $a*e=a\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{e}=a$. Очевидно, что это уравнение не имеет решения относительно нейтрального элемента $e\in\mathbf{Q}^*$.

Пример 2.12. Проверить, является ли операция *, заданная на множестве $X=\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}^*$ упорядоченных пар $x=(a,\ b)$ ненулевых действительных чисел по правилу $x*y=(a_1,b_1)*(a_2,b_2)=(a_1\cdot a_2,\ b_1\cdot b_2)$, бинарной операцией. Если является, то проверить ее на коммутативность, ассоциативность, наличие нейтрального элемента и симметричного элемента (в случае наличия нейтрального элемента).

Решение. Операция * является бинарной, так как двум упорядоченным парам $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in X=\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}^*$ ставится в соответствие третья упорядоченная пара $(a_1\cdot a_2,\ b_1\cdot b_2)\in X=\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}^*$. Заметим, что операция умножения на множестве действительных чисел коммутативна и ассоциативна:

$$a_1\cdot a_2=a_2\cdot a_1,\quad a_1\cdot(a_2\cdot a_3)=(a_1\cdot a_2)\cdot a_3.$$

Операция * является коммутативной, так как

$$x*y=(a_1,b_1)*(a_2,b_2)=(a_1\cdot a_2,\ b_1\cdot b_2)=(a_2\cdot a_1,\ b_2\cdot b_1)=y*x.$$

Операция * является ассоциативной, так как

$$x*(y*z)=(a_1,b_1)*((a_2,b_2)*(a_3,b_3))=(a_1,b_1)*(a_2\cdot a_3,\ b_2\cdot b_3)=$$

$$=(a_1\cdot(a_2\cdot a_3),\ b_1\cdot(b_2\cdot b_3))=((a_1\cdot a_2)\cdot a_3,\ (b_1\cdot b_2)\cdot b_3)=(x*y)*z.$$

Выясним наличие нейтрального элемента $e=(e_1,e_2)\in\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}^*$:

$$x*e=x\Leftrightarrow(a,\ b)*(e_1,\ e_2)=(a,\ b)\Leftrightarrow(a\cdot e_1,\ b\cdot e_2)=(a,\ b)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\cdot e_1=a,\\ b\cdot e_2=b,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e_1=a/a=1,\\ e_2=b/b=1.\end{cases}$$

Итак, $e=(1,1)\in\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}^*$ есть нейтральный элемент относительно бинарной операции *. Далее найдем симметричный элемент $x'=(c,d)\in\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}^*$ для упорядоченной пары $x=(a,\ b)$:

$$x * x' = e \Leftrightarrow (a,\ b) * (c,\ d) = (1,\ 1) \Leftrightarrow (a \cdot c,\ b \cdot d) = (1,\ 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot c = 1, \\ b \cdot d = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1/a, \\ d = 1/b. \end{cases}$$

Итак, $x' = (1/a,\ 1/b) \in \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$ есть симметричный элемент для пары $x = (a,\ b)$.

Таким образом, операция $*$: $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$ является коммутативной и ассоциативной бинарной операцией. Для каждого элемента имеется симметричный элемент.

Пример 2.13. Выяснить, является ли группой алгебра $\tilde{G} = \langle G,\ \cdot,\ ^{-1} \rangle$ с основным множеством $G = \{2^n :\ n \in \mathbf{Z}\}$ (элементами множества G являются всевозможные степени двойки с целыми показателями), бинарной операцией умножения и унарной операцией перехода к обратному числу.

Решение. Согласно аксиоме G1: если $a = 2^n$, $b = 2^m$, $c = 2^k$, то $a \cdot (b \cdot c) = 2^n \cdot (2^m \cdot 2^k) = 2^{n+m+k} = (2^n \cdot 2^m) \cdot 2^k = (a \cdot b) \cdot c$.

Согласно аксиоме G2 в качестве правого нейтрального элемента выступает $e = 1 = 2^0$, так как $a \cdot e = 2^n \cdot 2^0 = 2^n = a$.

Согласно аксиоме G3 в качестве правого симметричного (обратного) элемента к элементу $a = 2^n$ выступает элемент $a^{-1} = 2^{-n} = \dfrac{1}{2^n}$, так как $a \cdot a^{-1} = 2^n \cdot 2^{-n} = 2^0 = e$.

Все аксиомы группы выполнены, значит, алгебра $\tilde{G} = \langle G,\ \cdot,\ ^{-1} \rangle$ является группой, причем абелевой, так как $a \cdot b = 2^n \cdot 2^m = 2^{n+m} = 2^{m+n} = 2^m \cdot 2^n = b \cdot a$.

Пример 2.14. Выяснить, является ли группой алгебра $\tilde{G} = \langle \mathbf{Q}^* \times \mathbf{Q},\ *,\ ' \rangle$ с бинарной операцией $*$, определенной на множестве упорядоченных пар $x = (a,\ b)$ ($a \in \mathbf{Q}^*, b \in \mathbf{Q}$), по правилу $x * y = (a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2,\ b_1 \cdot a_2 + b_2)$.

Решение. Проверим аксиому G1 группы: $x * (y * z) = (x * y) * z$. Рассмотрим левую часть проверяемого равенства:

$$x * (y * z) = (a_1, b_1) * ((a_2, b_2) * (a_3, b_3)) = (a_1, b_1) * (a_2 \cdot a_3,\ b_2 \cdot a_3 + b_3) =$$

$$= (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3,\ b_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + b_2 \cdot a_3 + b_3).$$

Рассмотрим правую часть проверяемого равенства:

$$(x * y) * z = ((a_1, b_1) * (a_2, b_2)) * (a_3, b_3) = (a_1 \cdot a_2,\ b_1 \cdot a_2 + b_2) * (a_3, b_3) =$$

$$= (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3,\ (b_1 \cdot a_2 + b_2) \cdot a_3 + b_3) = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3,\ b_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + b_2 \cdot a_3 + b_3).$$

Совпадение левой и правой частей доказывает справедливость аксиомы G1 группы.

Для нахождения правого нейтрального элемента $e=(e_1,\ e_2)$ относительно операции * имеем

$$x*e=x\Leftrightarrow(a,b)*(e_1,e_2)=(a\cdot e_1,\ b\cdot e_1+e_2)=(a,b)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\cdot e_1=a,\\ b\cdot e_1+e_2=b,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e_1=a/a=1,\\ b\cdot 1+e_2=b,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}e_1=1,\\ e_2=0.\end{cases}$$

Итак, правый нейтральный элемент $e=(1,\ 0)$.

Для нахождения правого симметричного элемента x' для пары $x=(a,\ b)$ используем равенство $x*x'=e$:

$$x*x'=e\Leftrightarrow(a,b)*(c,d)=(a\cdot c,\ b\cdot c+d)=(1,\ 0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\cdot c=1,\\ b\cdot c+d=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=1/a,\\ b\cdot(1/a)+d=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=1/a,\\ d=-b/a.\end{cases}$$

Итак, правый симметричный элемент – пара $x=(1/a,\ -b/a)$ (при этом эта пара определена корректно, так как $a\in\mathbf{Q}^*$). Вывод: алгебра $G=\langle\mathbf{Q}^*\times\mathbf{Q},\ *,\ '\rangle$ является группой. Так как

$$y*x=(a_2,b_2)*(a_1,b_1)=(a_2\cdot a_1,\ b_2\cdot a_1+b_1)\neq x*y,$$

то данная группа не является абелевой группой.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть задана функция

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

($a,b,c,d\in\mathbf{R}$, числа c,d одновременно в нуль не обращаются). Составим для функции $f(x)$ матрицу $A_f=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Выяснить, какая матрица будет соответствовать сложной функции (композиции) $(f\circ f)(x)=f(f(x))$. Имеем

$$f(f(x))=\frac{a\cdot f(x)+b}{c\cdot f(x)+d}=\frac{a\cdot\dfrac{ax+b}{cx+d}+b}{c\cdot\dfrac{ax+b}{cx+d}+d}=\frac{a(ax+b)+b(cx+d)}{c(ax+b)+d(cx+d)}=$$

$$=\frac{a^2x+ab+bcx+bd}{acx+bc+cdx+d^2}=\frac{(a^2+bc)x+(ab+bd)}{(ac+cd)x+(bc+d^2)}.$$

Следовательно, по последней дроби можно составить матрицу

$$B_{f\circ f}=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}.$$

Заметим, что эта же матрица B получается путем возведения матрицы $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в квадрат: $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$.
Итак, композиции $f\circ f$ соответствует матрица $B_{f\circ f}=A^2{}_f$.

Пример 2.15. На множестве $f=\left\{x,\ \frac{1}{x},\ -x,\ -\frac{1}{x}\right\}$ (элементами множества являются функции $x,\ \frac{1}{x},\ -x,\ -\frac{1}{x}$) в качестве бинарной операции возьмем операцию композиции $\circ$ двух функций, то есть для любых

$$f_1, f_2 \in f : f_1\circ f_2 \in f.$$

Выяснить, является ли множество f с операцией композиции $\circ$ группой.

1. Используем рассмотренную выше задачу. Найдем сначала композицию $x\circ x$. Для элемента $x=\frac{1\cdot x+0}{0\cdot x+1}$ матрица имеет вид $A_x=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$ ($a=1, b=0, c=0, d=1$). Тогда композиции $x\circ x$ соответствует матрица $B_{x\circ x}=A_x\cdot A_x=E\cdot E=E$, то есть композиция $x\circ x=x$.

Аналогично для элемента $\frac{1}{x}=\frac{0\cdot x+1}{1\cdot x+0}\in f$ матрица $A_{\frac{1}{x}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ($a=0, b=1, c=1, d=0$). Тогда композиции $\frac{1}{x}\circ\frac{1}{x}$ соответствует матрица $B_{\frac{1}{x}\circ\frac{1}{x}}=A_{\frac{1}{x}}\cdot A_{\frac{1}{x}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$, то есть композиция $\frac{1}{x}\circ\frac{1}{x}=x$.

Для элемента $-x=\frac{(-1)\cdot x+0}{0\cdot x+1}$ матрица имеет вид $A_{-x}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($a=-1, b=0, c=0, d=1$). Тогда композиции $(-x)\circ(-x)$ соответствует матрица $B_{(-x)\circ(-x)}=A_{-x}\cdot A_{-x}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$, то есть $(-x)\circ(-x)=x$.

Аналогично показывается, что композиция $\left(-\frac{1}{x}\right)\circ\left(-\frac{1}{x}\right)=x$.

Рассмотрим теперь композицию разных функций, например $x\circ\frac{1}{x}$. Так как
$A_{-x}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{\frac{1}{x}}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то композициям $x\circ\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}\circ x$ соответствуют матрицы $B_{x\circ\frac{1}{x}}=A_x\cdot A_{\frac{1}{x}}=E\cdot A_{\frac{1}{x}}=A_{\frac{1}{x}}$, $B_{\frac{1}{x}\circ x}=A_{\frac{1}{x}}\cdot A_x=A_{\frac{1}{x}}\cdot E=A_{\frac{1}{x}}$.

Аналогично рассматриваются композиции остальных функций из множества f. В результате получаем так называемую *таблицу Кэли* композиций $f_1 \circ f_2$ $\left(f_1, f_2 \in f\right)$.

$f=\left\{x,\ \dfrac{1}{x},\ -x,\ -\dfrac{1}{x}\right\}$	x	$\dfrac{1}{x}$	$-x$	$-\dfrac{1}{x}$
x	x	$\dfrac{1}{x}$	$-x$	$-\dfrac{1}{x}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x}$	x	$-\dfrac{1}{x}$	$-x$
$-x$	$-x$	$-\dfrac{1}{x}$	x	$\dfrac{1}{x}$
$-\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x}$	$-x$	$\dfrac{1}{x}$	x

2. В силу симметричности таблицы Кэли можно сделать вывод о том, что операция композиции коммутативна, то есть при всех $f_1, f_2 \in f$: $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$. Далее можно убедиться, что операция композиции ассоциативна, то есть при всех $f_1, f_2, f_3 \in f$: $f_1 \circ \left(f_2 \circ f_3\right) = \left(f_1 \circ f_2\right) \circ f_3$. Например, если $f_1 = x,\ f_2 = \dfrac{1}{x},\ f_3 = -x$, то по таблице Кэли находим

$$f_1 \circ \left(f_2 \circ f_3\right) = x \circ \left(\frac{1}{x} \circ (-x)\right) = x \circ \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x},$$

$$\left(f_1 \circ f_2\right) \circ f_3 = \left(x \circ \frac{1}{x}\right) \circ (-x) = \frac{1}{x} \circ (-x) = -\frac{1}{x}.$$

3. Из таблицы Кэли видно, что в качестве нейтрального элемента выступает функция $e = x$, так как при всех f_i : $e \circ f_i = f_i$, и каждый элемент f_i является симметричным к самому себе, так как

$$x \circ x = x = e,\quad \frac{1}{x} \circ \frac{1}{x} = x = e,\quad (-x) \circ (-x) = x = e,\quad \left(-\frac{1}{x}\right) \circ \left(-\frac{1}{x}\right) = x = e.$$

Таким образом, можно сделать вывод о том, что алгебра $\langle f, \circ, x \rangle$ есть абелева группа.

Пример 2.16. Выяснить, является ли группой алгебра $G = \langle G,\ *,\ ' \rangle$ с основным множеством $G = \mathbf{R} \setminus \{1\}$, бинарной операцией $*$ по правилу

$$a * b = -a \cdot b + a + b$$

и унарной операцией $'$.

Решение

1. Покажем, что $*$ ассоциативна, то есть $\forall a, b, c \in G : a * (b * c) = (a * b) * c$.

Рассмотрим сначала левую часть доказываемого равенства:

$$a*(b*c)\overset{(3)}{=}a*(-b\cdot c+b+c)\overset{(3)}{=}-a\cdot(-b\cdot c+b+c)+a+(-b\cdot c+b+c)=$$
$$=abc-ab-ac+a-bc+b+c=abc-ab-ab-bc+a+b+c.$$

Рассмотрим правую часть доказываемого равенства:

$$(a*b)*c\overset{(3)}{=}(-a\cdot b+a+b)*c\overset{(3)}{=}-(-a\cdot b+a+b)\cdot c+(-a\cdot b+a+b)+c=$$
$$=abc-ac-bc-ab+a+b+c=abc-ab-ab-bc+a+b+c.$$

Правая часть совпала с левой частью, что доказывает ассоциативность операции *.

2. Покажем, что существует правый нейтральный элемент e относительно операции *. Рассмотрим равенство $a*e=e$, откуда найдем элемент e:

$$a*e=a\Leftrightarrow -a\cdot e+a+e=a\Leftrightarrow -a\cdot e+e=0\Leftrightarrow e\cdot(-a+1)=0.$$

Последнее равенство должно выполняться при любых $a\in G=\mathbf{R}\setminus\{1\}$, откуда получаем $e=0$ – правый нейтральный элемент относительно операции *.

3. Покажем, что для любого элемента $a\in G=\mathbf{R}\setminus\{1\}$ существует правый симметричный элемент $a'\in G$ такой, что $a*a'=0$:

$$a*a'=0\Leftrightarrow -a\cdot a'+a+a'=0\Leftrightarrow a'\cdot(1-a)=-a\Leftrightarrow a'=\frac{a}{a-1}.$$

Так как $a\in G=\mathbf{R}\setminus\{1\}$, то для любого $a\in G=\mathbf{R}\setminus\{1\}$ существует правый симметричный элемент $a'=\dfrac{a}{a-1}\in G$.

Так как все три условия из определения группы выполнены, то $\bar{G}=\langle G,\ *,\ '\rangle$ является группой (причем абелевой, так как $a*b=b*a$).

Пример 2.17. Пусть $\bar{G}=\langle \mathbf{R}\times\mathbf{R},\ \oplus,\ -\rangle$, $\bar{H}=\langle \mathbf{R},\ +,\ -\rangle$ – две группы. Выяснить, изоморфны ли эти группы.

Решение. В качестве отображения $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ примем функцию двух переменных $f(x_1,x_2)=2x_1+x_2$, которая каждой упорядоченной паре $(x_1,x_2)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ ставит в соответствие действительное число $y=2x_1+x_2$. Покажем, что $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ сохраняет главные операции в множестве $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, то есть является гомоморфизмом $\bar{G}$ в $\bar{H}$:

1) $\forall x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)\in G: f(x\oplus y)=f(x)+f(y)$,

$$f(x\oplus y)=f((x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2))=f((x_1+y_1,\ x_2+y_2))=$$
$$=2(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=\underbrace{(2x_1+x_2)}_{=f(x)}+\underbrace{(2y_1+y_2)}_{f(y)}=f(x)+f(y);$$

2) $\forall x=(x_1,x_2)\in G: f(-x)=-f(x)$.

$$f(-x)=f(-(x_1,x_2))=f((-x_1,\ -x_2))=2(-x_1)+(-x_2)=$$
$$=-\underbrace{(2x_1+x_2)}_{=f(x)}=-f(x).$$

Однако $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ не является инъективным отображением, так как найдутся две различные упорядоченные пары $x=(1,2)$, $y=(0,4)\in G$, для которых $f(1,2)=f(0,4)=4$. Значит, группы не изоморфны.

2.7. Задания для самостоятельной работы

Задание 2.1. Проверить, является ли операция *, заданная на множестве A, бинарной операцией. Если является, то проверить ее на коммутативность, ассоциативность, наличие нейтрального элемента и симметричного элемента (в случае наличия нейтрального элемента).

а) $A=\mathbf{N}$, $a*b=НОД(a,b)$ ($a,b\in\mathbf{N}$),

б) $A=\mathbf{N}$, $a*b=a^b$ ($a,b\in\mathbf{N}$),

в) $A=\mathbf{Q}$, $x*y=2x+3y$ ($x,y\in\mathbf{Q}$),

г) $A=\mathbf{R}$, $a*b=\sqrt[3]{a^3+b^3}$ ($a,b\in\mathbf{R}$),

д) $A=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $x*y=(a_1,b_1)*(a_2,b_2)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2)$,

е) $A=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $x*y=(a_1,\ b_1)*(a_2,\ b_2)=(a_1+a_2,\ b_1\cdot b_2)$.

ж) $A=\mathbf{R}$, $a*b=ab-a-b+2$,

з) $A=\mathbf{Z}$, $a*b=a^2-b^2$.

Задание 2.2. Рассмотрим множество $\mathbf{R}^+$ положительных действительных чисел. На этом множестве определим бинарные операции: умножения ($a\cdot b$) и возведения в положительную степень ($a\wedge b=a^b$). Доказать, что операция возведения в степень дистрибутивна справа относительно умножения, но не дистрибутивна слева.

Задание 2.3. Показать, что алгебра $G=\langle\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}^*,\ *,\ '\rangle$ с бинарной операцией *, заданной на $G=\mathbf{R}^*\times\mathbf{R}^*$ упорядоченных пар $x=(a,\ b)$ ненулевых действительных чисел по правилу $x*y=(a_1,b_1)*(a_2,b_2)=(a_1\cdot a_2,\ b_1\cdot b_2)$, является абелевой группой.

Задание 2.4. Выяснить, является ли группой алгебра $G=\langle 2\mathbf{Z},\ *,\ '\rangle$ четных целых чисел с бинарной операцией *, заданной на множестве $2\mathbf{Z}$ по правилу $a*b=\dfrac{a\cdot b}{2}$.

Задание 2.5. Доказать, что алгебра $G=\langle\mathbf{R}^*,\ *,\ ^{-1}\rangle$ ненулевых действительных чисел с бинарной операцией $a*b=\dfrac{a\cdot b}{a+b}$ не является группой (не существует нейтрального элемента).

Задание 2.6. Выясните, является ли группой алгебра $G=\langle G,\ \bullet,\ '\rangle$ с основным множеством $G=\mathbf{R}$, бинарной операцией, заданной по правилу $a\bullet b=ab+2a+2b-1$, и унарной операцией $'$.

Задание 2.7. Выяснить, является ли группой алгебра $\tilde{G} = \langle G, \bullet, ' \rangle$ с основным множеством $G = \mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, бинарной операцией, заданной по правилу $\langle a,b \rangle \bullet \langle c,d \rangle = \langle a+2c, b-d \rangle$, и унарной операцией $'$.

Задание 2.8. Пусть $\tilde{G} = \langle \mathbf{R}, +, - \rangle$ – аддитивная группа действительных чисел с унарной операцией перехода к противоположному элементу, $\tilde{H} = \langle \mathbf{R}^+, \cdot, ^{-1} \rangle$ – мультипликативная группа положительных действительных чисел. Рассмотрим отображение $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbf{R}$. Показать, что $\tilde{G} \cong \tilde{H}$.

2.8. Определение кольца. Примеры колец

Определение 2.16. *Кольцом* называется алгебра $\tilde{K} = \langle K, +, -, \cdot, 1_K \rangle$ типа (2,1,2,0), если:

1) алгебра $\langle K, +, - \rangle$ есть абелева группа типа (2,1) относительно бинарной операции сложения +,

2) алгебра $\langle K, \cdot, 1_K \rangle$ есть моноид типа (2,0),

3) умножение $\cdot$ дистрибутивно относительно сложения +, то есть при всех $a,b,c \in K$: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Группа $\langle K, +, - \rangle$ называется аддитивной группой кольца $\tilde{K}$, алгебра $\langle K, \cdot, 1 \rangle$ называется мультипликативным моноидом кольца $\tilde{K}$ (алгебра $\langle K, \cdot, 1 \rangle$ не обязательно является группой), элемент 1_K (нейтральный элемент относительно операции умножения) называется единицей кольца $\tilde{K}$.

Определение 2.17. Кольцо $\tilde{K} = \langle K, +, -, \cdot, 1_K \rangle$ называется *коммутативным*, если операция умножения коммутативна, то есть при всех $a,b \in K$: $a \cdot b = b \cdot a$.

Определение 2.18. Кольцо $\tilde{K}$ называется *областью целостности*, если оно коммутативно и при всех $a,b \in K$: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

При этом кольцо $\tilde{K}$ не является областью целостности, если существуют ненулевые элементы (они называются делителями нуля) $a,b \in K$ такие, что $a \cdot b = 0$. Таким образом, если кольцо $\tilde{K}$ есть область целостности, то оно не содержит делителей нуля.

Приведем примеры колец.

1. $\tilde{\mathbf{Z}} = \langle \mathbf{Z}, +, -, \cdot, 1 \rangle$ – кольцо целых чисел. Действительно, $\langle \mathbf{Z}, +, - \rangle$ есть абелева группа типа (2,1) относительно бинарной операции сложения +, $\langle \mathbf{Z}, \cdot, 1 \rangle$ есть моноид, операция умножения дистрибутивна относительно операции сложения. Причем кольцо $\tilde{\mathbf{Z}}$ есть область целостности, так как в нем нет делителей нуля: равенство $a \cdot b = 0$ возможно только в том случае, когда $a = 0 \vee b = 0$.

2. $\mathbf{Q}=\langle \mathbf{Q},+,\ -,\ \cdot,\ 1\rangle$ – кольцо рациональных чисел.

3. $\mathbf{R}=\langle \mathbf{R},+,\ -,\ \cdot,\ 1\rangle$ – кольцо действительных чисел.

4. Наряду с кольцом матриц в различных разделах математики широко используется также кольцо функций. Пусть X – произвольное множество, K – произвольное кольцо с бинарными операциями сложения + и умножения $\cdot$. Рассмотрим $K^X=\{f:X\to K\}$ – множество всех функций (отображений), рассматриваемое вместе с бинарными операциями: суммой $f\oplus g$ и произведением $f\odot g$, определёнными следующим образом:

$$\forall x\in X:\ (f\oplus g)(x)=f(x)+g(x),\ (f\odot g)(x)=f(x)\cdot g(x).$$

Непосредственно проверяется, что K^X удовлетворяет всем условиям кольца. Так, ввиду дистрибутивности операций в кольце K имеем

$$\forall f,g,h\in K^X\forall x\in X:(f(x)+g(x))\cdot h(x)=f(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h(x).$$

Если 0, 1 – нулевой и единичный элементы в кольце K, то роль нулевого (нулевой функции) и единичного элементов в K^X играют $0_X:\ 0_X(x)=0$ и соответственно $1_X:\ 1_X(x)=1$.

5. Числовые пары $(a,\ b)$ (где $a,\ b\in\mathbf{R}$) со сложением и умножением, определенными формулами

$$(a_1,\ b_1)\oplus(a_2,\ b_2)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2),\ (a_1,\ b_1)\odot(a_2,\ b_2)=(a_1a_2,\ b_1b_2),$$

образуют коммутативное кольцо с нейтральным элементом $e=(1,\ 1)$ [так как $(1,\ 1)\odot(a,\ b)=(1\cdot a,\ 1\cdot b)=(a,\ b)$], нулем $\theta=(0,\ 0)$. Данное кольцо не является областью целостности, так как в нем имеются делители нуля – пары $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, так как $(1,\ 0)\odot(0,\ 1)=(1\cdot 0,\ 0\cdot 1)=(0,\ 0)=\theta$.

Пример 2.18. Показать, что алгебра $M=\langle \mathbf{M}_2,+,\ -,\ \cdot,\ E\rangle$ есть кольцо матриц $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{2}$, $B=(b_{ij})_{i,j=1}^{2}$, $C=(c_{ij})_{i,j=1}^{2}$, ... второго порядка (с действительными элементами). Операции сложения и умножения матриц вводятся естественным образом:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix},\ A+B=\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2\\ a_3+b_3 & a_4+b_4\end{pmatrix},$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_1b_1+a_2b_3 & a_1b_2+a_2b_4\\ a_3b_1+a_4b_3 & a_3b_2+a_4b_4\end{pmatrix}.$$

Решение. 1. Во-первых, алгебра $\langle \mathbf{M}_2,+,\ -\rangle$ есть абелева группа: операция сложения ассоциативна и коммутативна, существует нейтральный элемент (нулевая матрица O) относительно операции сложения, для каждой матрицы A существует симметричный элемент – матрица $-A$ такая, что $A+(-A)=O$.

2. Во-вторых, алгебра $\langle \mathbf{M}_2, \cdot, E \rangle$ есть моноид: операция произведения матриц ассоциативна ($A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$), с единичной матрицей E относительно операции умножения.

3. В-третьих, операция умножения ассоциативна относительно операции сложения матриц: $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$.

Заметим, что это кольцо не коммутативно, так как операция умножения матриц не коммутативна: в общем случае $A\cdot B\neq B\cdot A$. Это кольцо не является областью целостности, так как в нем существуют делители нуля, например ненулевые матрицы $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ дают в произведении нулевую матрицу $A\cdot B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

2.9. Гомоморфизмы колец

Рассмотрим более подробно понятие гомоморфизма колец. Пусть $\mathcal{K}=\langle K,+,-,\cdot,1_K\rangle$ и $\mathcal{K}_1=\langle K_1,\oplus,-,\square,1_{K_1}\rangle$ два кольца.

Определение 2.19. Отображение $h:K\to K_1$ называется *гомоморфизмом* кольца $\mathcal{K}$ в кольцо $\mathcal{K}_1$, если отображение h сохраняет главные операции в $\mathcal{K}$, то есть при всех $a,b\in K$:

1) $h(a+b)=h(a)\oplus h(b)$,

2) $h(-a)=-h(a)$,

3) $h(a\cdot b)=h(a)\square h(b)$,

4) $h(1_K)=1_{K_1}$.

Если $h:K\to K_1$ есть инъективное отображение множества K на множество K_1, то h называется изоморфизмом кольца $\mathcal{K}$ на кольцо $\mathcal{K}_1$.

Пример 2.19. Рассмотрим кольцо $\mathcal{K}=\langle \mathbf{Q}[\sqrt{2}],+,-,\cdot,1\rangle$, где основное множество $\mathbf{Q}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$. В качестве кольца $\mathcal{K}_1$ возьмем кольцо $\mathcal{K}_1=\langle \mathbf{M}_2,\oplus,-,\square,E\rangle$ матриц, где основное множество $\mathbf{M}_2=\left\{A=\begin{pmatrix}a&b\\2b&a\end{pmatrix}:\ a,b\in\mathbf{Q}\right\}$, $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=1_{K_1}$ – нейтральный элемент относительно операции умножения $\square$ матриц (бинарные операции $\oplus$, $\square$ определяются естественным образом). Показать, что $\mathcal{K}$ изоморфно $\mathcal{K}_1$.

Решение. Введем отображение $h:\mathbf{Q}[\sqrt{2}]\to\mathbf{M}_2$: каждому числу $\alpha=a+b\sqrt{2}\in\mathbf{Q}[\sqrt{2}]$ поставим в соответствие матрицу $h(\alpha)=\begin{pmatrix}a&b\\2b&a\end{pmatrix}$.

Проверим выполнимость 1, 2, 3, 4) определения 2.19. Пусть $\alpha_1 = a_1 + b_1\sqrt{2} \in \mathbf{Q}\left[\sqrt{2}\right]$

1) покажем, что $h(\alpha+\alpha_1) = h(\alpha) \oplus h(\alpha_1)$,

$$h(\alpha+\alpha_1) = h\left(a + b\sqrt{2} + a_1 + b_1\sqrt{2}\right) = h\left((a+a_1)+(b+b_1)\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} a+a_1 & b+b_1 \\ 2(b+b_1) & a+a_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} = h(\alpha) \oplus h(\alpha_1);$$

2) покажем, что $h(-\alpha) = -h(\alpha)$,

$$h(-\alpha) = h\left(-a - b\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -2b & -a \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} = -h(\alpha);$$

3) покажем, что $h(\alpha\cdot\alpha_1) = h(\alpha) \square\, h(\alpha_1)$. Рассмотрим сначала левую часть проверяемого равенства:

$$h(\alpha\cdot\alpha_1) = h\left(\left(a+b\sqrt{2}\right)\cdot\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\right) = h\left((aa_1+2bb_1)+(ab_1+a_1b)\sqrt{2}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} aa_1+2bb_1 & ab_1+a_1b \\ 2(ab_1+a_1b) & aa_1+2bb_1 \end{pmatrix}.$$

Правая часть (применяем правило умножения матриц):

$$h(\alpha) \square\, h(\alpha_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 2b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1+2bb_1 & ab_1+a_1b \\ 2(ab_1+a_1b) & aa_1+2bb_1 \end{pmatrix}.$$

Совпадение результатов левой и правой частей доказывает справедливость равенства $h(\alpha\cdot\alpha_1) = h(\alpha) \square\, h(\alpha_1);$.

4) покажем, что $h(1_K) = 1_{K_1}$, то есть $h(1) = E$:

$$h(1) = h\left(\underbrace{1}_{a} + \underbrace{0}_{b}\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cdot 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

2.10. Кольцо целых чисел

Рассмотрим более подробно кольцо целых чисел $\overset{\square}{\mathbf{Z}} = \langle \mathbf{Z}, +, -, \cdot, 1\rangle$. В нем $\langle \mathbf{Z}, +, -\rangle$ есть абелева группа типа (2,1) относительно бинарной операции сложения, $\langle \mathbf{Z}, \cdot, 1\rangle$ есть моноид относительно ассоциативной операции умножения; операция умножения дистрибутивна относительно операции сложения.

Сформулируем одну из основных теорем в кольце $\overset{\square}{\mathbf{Z}}$.

Теорема 2.2 (о делении с остатком). Для любых $a, b \in \mathbf{Z}$ $(b \in \mathbf{N})$ существует единственная пара целых чисел $q, r \in \mathbf{Z}$ такая, что

$$a = bq + r,\ 0 \le r < b \tag{2.3}$$

(q называется *неполным частным*, r – *остатком* от деления a на b).

Доказательство. 1. Доказательство существования пары чисел $q, r \in \mathbf{Z}$, удовлетворяющей равенству (2.3).

В тривиальном случае, когда $a = 0$ равенство (2.3) верно при $q = r = 0$.

Пусть $\boxed{a > 0}$. Существование пары чисел $q, r \in \mathbf{Z}$ докажем методом математической индукции по $a \in \mathbf{N}$ (при фиксированном $b > 0$). При $a = 1$ (база индукции) равенство (2.3) верно на паре чисел $q = 0,\ r = 1$ (при $b > 1$, $1 = b \cdot 0 + 1$) и на паре чисел $q = 1,\ r = 0$ (при $b = 1$, $1 = 1 \cdot 1 + 0$). Предположим, что равенство (2.3) верно при $a = n \in \mathbf{N}$ (предположение индукции), то есть

$$n = bq + r,\ 0 \le r < b. \tag{2.4}$$

Докажем теперь, что равенство (2.3) будет верно при $a = n + 1$. Из равенства (2.4) путем добавления единицы к обеим частям имеем

$$n + 1 = bq + (r + 1),\ 0 < r + 1 \le b.$$

Если при этом $r + 1 < b$, то пара $q,\ r + 1$ есть искомая пара чисел (q – неполное частное, а $r + 1 < b$ есть остаток). Если же $r + 1 = b$, то

$$n + 1 = bq + (r + 1) = bq + b = b(q + 1) + 0,$$

и тогда уже пара $q + 1,\ 0$ есть искомая пара чисел. Итак, существование пары чисел $q, r \in \mathbf{Z}$ при $a > 0$ доказано.

Пусть теперь $\boxed{a < 0}$. Тогда $-a \in \mathbf{N}$. По доказанному выше для пары чисел $-a, b \in \mathbf{N}$ существует пара $q_1, r_1 \in \mathbf{Z}$ такая, что $-a = bq_1 + r_1,\ 0 \le r_1 < b$.

Если $r_1 = 0$, то $-a = bq_1 + 0 = bq_1 \Rightarrow a = b \cdot (-q_1) + 0$, то есть пара $-q_1, 0 \in \mathbf{Z}$ найдена.

Если $r_1 > 0$, то $-a = bq_1 + r_1 \Rightarrow a = -bq_1 - r_1 \Rightarrow a = b(-q_1 - 1) + (b - r_1)$, и тогда $0 < b - r_1 < b$. В итоге, полагая $q = -q_1 - 1,\ r = b - r_1$, получаем справедливость равенства (2.3) в случае $a < 0$.

Итак, в обоих случаях $a > 0,\ a < 0$ доказано существование пары чисел $q, r \in \mathbf{Z}$, удовлетворяющей равенству (2.3).

2. Доказательство единственности пары чисел, удовлетворяющей равенству (2.3). Предположим, что кроме пары $q, r \in \mathbf{Z}$ существует вторая пара чисел $q_1, r_1 \in \mathbf{Z}$, удовлетворяющая (2.3) (предположим для определенности $r_1 < r$). Тогда имеем два равенства

$$\begin{cases} a = bq + r,\ 0 \le r < b, \\ a = bq_1 + r_1,\ 0 \le r_1 < b,\ (r_1 < r). \end{cases}$$

Вычитая из одного равенства другое, получаем $0 = b(q - q_1) + (r - r_1)$, откуда

$$r - r_1 = b(q_1 - q), \tag{2.5}$$

причем нетрудно видеть, что $0 < r - r_1 < b$.

Далее, так как $r - r_1 > 0$ и $b \in \mathbf{N}$, то $q_1 - q \geq 1$. Тогда из равенства (2.5) следует, что $r - r_1 = b \cdot \underbrace{(q_1 - q)}_{\geq 1} \geq b$ то есть $r - r_1 \geq b$. Это противоречит условию $r - r_1 < b$. Значит, случай $r_1 < r$ исключен, и в итоге $r_1 = r$. Так как $r_1 = r$, то из равенства (2.5) следует $q_1 = q$, и единственность пары $q, r \in \mathbf{Z}$ доказана.

В кольце $\mathbf{Z}$ можно ввести отношение делимости.

Определение 2.20. Пусть $a,\ b \in \mathbf{Z}$. Говорят, что число b делит число a (по другому a кратно b, или a делится нацело на b), если существует $q \in \mathbf{Z}$ такое, что $a = bq$. При этом используют запись $b|a$.

Сформулируем свойства отношения делимости в кольце $\mathbf{Z}$ ($a,\ b, c \in \mathbf{Z}$).

1) $a|a$,

2) $a|0$,

3) $\pm 1|a$,

4) если $a|b$ и $b|c$, то $a|c$ (отношение делимости транзитивно),

5) если $c|a$, то $c|(ab)$,

6) если $c|a$ и $c|b$, то $c|(a \pm b)$,

7) если $b|a$, то $(bc)|(ac)$,

8) если $c \neq 0$, то $(bc)|(ac) \Rightarrow b|a$,

9) если $b|a,\ d|c$, то $(bd)|(ac)$,

10) если $a|b,\ a|c$, то при всех $m,\ n \in \mathbf{Z}$: $a|(mb + nc)$.

Приведем доказательства некоторых свойств:

4) покажем, что если $a|b$ и $b|c$, то $a|c$. Так как $a|b$, то существует $q_1 \in \mathbf{Z}$: $b = aq_1$. Так как $b|c$, то существует $q_2 \in \mathbf{Z}$: $c = bq_2$. Тогда $c = bq_2 = a(q_1 q_2)$, причем $q_1 q_2 \in \mathbf{Z}$, что говорит о том, что c делится на a, то есть $a|c$;

9) покажем, что если $b|a,\ d|c$, то $(bd)|(ac)$. Имеем

$$\begin{cases} b|a \Rightarrow \exists q_1 \in \mathbf{Z} : a = bq_1, \\ d|c \Rightarrow \exists q_2 \in \mathbf{Z} : c = dq_2 \end{cases} \Rightarrow ac = bd(q_1 q_2), \text{ то есть } (bd)|(ac).$$

2.11. Сравнения. Кольцо классов вычетов

Пусть $m \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ – фиксированное натуральное число. Непосредственно можно показать, что множество $m\mathbf{Z} = \{ma :\ a \in \mathbf{Z}\}$ замкнуто относительно операций сложения и умножения и удовлетворяет всем аксиомам кольца. Используя множество $m\mathbf{Z}$, строим кольцо, состоящее из конечного числа элементов.

Определение 2.21. Два числа $a, b \in \mathbf{Z}$ называются *сравнимыми по модулю* m, если при делении на m они дают одинаковые остатки. При этом записывают

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Получается, что множество $\mathbf{Z}$ разбивается на непересекающиеся классы чисел (называемые *классами вычетов*), сравнимых между собой по модулю m. Каждый класс вычетов имеет вид

$$\overline{r} = r + m\mathbf{Z} = \{r + mk,\ k \in \mathbf{Z}\},$$

при этом $\mathbf{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \ldots \cup \overline{m-1}$.

По определению сравнения следует, что $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow (a-b)$ делится на m, то есть $m|(a-b)$.

Со сравнениями можно поступать как с обычными равенствами, а именно:

$$\begin{cases} a_1 \equiv b_1 \pmod{m}, \\ a_2 \equiv b_2 \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{m}, \\ a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod{m}, \\ c \cdot a_1 \equiv c \cdot b_1 \pmod{m} \ (c \in \mathbf{Z}), \end{cases}$$

то есть сравнения можно почленно складывать и умножать.

Каждым двум классам $\overline{r}$ и $\overline{l}$ независимо от выбора в них представителей (элементов) $r,\ l \in \mathbf{Z}$ можно сопоставить классы, являющиеся их суммой и произведением, то есть на множестве $\mathbf{Z}_m = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ классов вычетов по модулю m однозначным образом задаются операции сложения и умножения классов:

$$\overline{r} \oplus \overline{l} = \overline{r+l},\ \overline{r} \odot \overline{l} = \overline{r \cdot l}.$$

Так как определения этих операций сводятся к соответствующим операциям над целыми числами из классов вычетов, то алгебра $\left\langle \mathbf{Z}_m, \oplus, \odot, \{1\}_m \right\rangle$ будет также коммутативным кольцом с единицей $\overline{1} = \{1 + mk,\ k \in \mathbf{Z}\}$ ($\overline{r} \odot \overline{1} = \overline{r \cdot 1} = \overline{r}$). Оно называется кольцом классов вычетов по модулю m. Нулем (нейтральным элементом относительно операции сложения) в этом кольце, очевидно, является класс $\overline{0} = \{mk,\ k \in \mathbf{Z}\}$. При этом, выбирая из каждого из классов вычетов $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}$ по одному представителю (числа) $0, 1, \ldots, m-1$, получаем так называемую приведенную систему вычетов по модулю m.

Приведем в качестве примера таблицу сложения и таблицу умножения в кольце $\mathbf{Z}_4 = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$. Приведенная система вычетов имеет вид $0,1,2,3$ (всевозможные остатки от деления целого числа на 4):

$$\mathbb{Z}_4: \quad \begin{array}{c|cccc} + & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} \cdot & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Заметим, что кольцо $\mathbf{Z}_m = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ классов вычетов не является областью целостности, так как, например, в кольце $\mathbf{Z}_4$ имеются два делителя нуля - вычеты $\bar{2},\bar{2}$, для которых $\bar{2} \cdot \bar{2} = \overline{2 \cdot 2} = \bar{4} = \bar{0}$ - нулевой элемент.

В заключение отметим, что кольцо классов вычетов играет важную роль в алгебре и теории чисел и является отправной точкой для разного рода обобщений.

Пример 2.20. Решить в кольце $\mathbf{Z}_5 = \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ систему уравнений

$$\begin{cases} \bar{x} + \bar{2} \cdot \bar{y} = \bar{1}, \\ \bar{3} \cdot \bar{x} - \bar{y} = \bar{4}. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся методом Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений для получения ступенчатой матрицы:

$$\begin{cases} \bar{x} + \bar{2} \cdot \bar{y} = \bar{1}, \\ \bar{3} \cdot \bar{x} - \bar{y} = \bar{4}. \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{3} & -\bar{1} & \bar{4} \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & -\bar{7} & \bar{1} \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{1} \end{array} \right).$$

Сначала умножили первую строку расширенной матрицы на $-\bar{3}$ и сложили с элементами второй строки этой матрицы. Учитывая, что $-\bar{a} = \overline{-a},\ \bar{a} = \overline{a + m \cdot b} = \bar{b}$, получаем $-\bar{7} = \overline{-7} = \overline{-7 + 5 \cdot 2} = \overline{-7 + 10} = \bar{3}$.

Переходя к обратному ходу Гаусса, имеем

$$\begin{cases} \bar{x} + \bar{2} \cdot \bar{y} = \bar{1}, \\ \bar{3} \cdot \bar{y} = \bar{1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = \bar{1} - \bar{2} \cdot \bar{y}, \\ \bar{y} = \bar{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = \bar{1} - \bar{2} \cdot \bar{2} = \overline{1 - 4} = \overline{-3} = \bar{2}, \\ \bar{y} = \bar{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = \bar{2}, \\ \bar{y} = \bar{2}. \end{cases}$$

2.12. Примеры решения задач

Пример 2.21. Рассмотрим множество $\mathbf{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{ a + b\sqrt{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbf{Q} \right\}$. Показать, что алгебра $\mathcal{K} = \left\langle \mathbf{Q}\left[\sqrt{2}\right], +, -, \cdot, 1 \right\rangle$ есть коммутативное кольцо.

Решение. Во-первых, операции сложения и умножения в алгебре определяются следующим образом: если $a_1 + b_1\sqrt{2},\ a_2 + b_2\sqrt{2} \in \mathbf{Q}\left[\sqrt{2}\right]$, то

$$\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) + \left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right) = \left(a_1 + a_2\right) + \left(b_1 + b_2\right)\sqrt{2} \in \mathbf{Q}\left[\sqrt{2}\right],$$

$$\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \cdot \left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right) = \left(a_1 a_2 + 2b_1 b_2\right) + \left(a_1 b_2 + a_2 b_1\right)\sqrt{2} \in \mathbf{Q}\left[\sqrt{2}\right],$$

то есть результатом операции сложения и умножения элементов из $\mathbf{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ является элемент из $\mathbf{Q}\left[\sqrt{2}\right]$.

1. Алгебра $\left\langle \mathbf{Q}\left[\sqrt{2}\right], +, - \right\rangle$ есть абелева группа: операция сложения ассоциативна и коммутативна:

$$a_1 + b_1\sqrt{2} + \left(a_2 + b_2\sqrt{2} + a_3 + b_3\sqrt{2}\right) = \left(a_1 + b_1\sqrt{2} + a_2 + b_2\sqrt{2}\right) + a_3 + b_3\sqrt{2},$$

$$a_1 + b_1\sqrt{2} + a_2 + b_2\sqrt{2} = a_2 + b_2\sqrt{2} + a_1 + b_1\sqrt{2}.$$

Существует нейтральный элемент $0 + 0\sqrt{2} \in \mathbf{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ относительно операции сложения:

$$a + b\sqrt{2} + 0 + 0\sqrt{2} = a + b\sqrt{2},$$

для каждого элемента $a + b\sqrt{2}$ существует симметричный элемент $-a - b\sqrt{2} \in \mathbf{Q}\left[\sqrt{2}\right]$:

$$a + b\sqrt{2} + -a - b\sqrt{2} = a + (-a) + b\sqrt{2} - b\sqrt{2} = 0 + 0\sqrt{2}.$$

2. Во-вторых, алгебра $\left\langle \mathbf{Q}\left[\sqrt{2}\right], \cdot, 1_K \right\rangle$ есть моноид: операция произведения ассоциативна, единичный элемент $1_K \in \mathbf{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ имеет вид $1 + 0\sqrt{2}$. Действительно, $\left(a + b\sqrt{2}\right)\cdot\left(1 + 0\sqrt{2}\right) = a + 0 + b\sqrt{2} + 0 = a + b\sqrt{2}$.

3. В-третьих, операция умножения дистрибутивна относительно операции умножения.

4. Кольцо K коммутативно, так как нетрудно проверить, что $\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right)\cdot\left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right) = \left(a_2 + b_2\sqrt{2}\right)\cdot\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right)$.

Пример 2.22. Рассмотрим $\mathbf{Q}\left[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right] = \left\{ x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} \,\middle|\, x, y, z \in \mathbf{Q} \right\}$. Показать, что алгебра $K = \left\langle \mathbf{Q}\left[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right], +, -, \cdot, 1 \right\rangle$ есть коммутативное кольцо.

Решение. Во-первых, проверим, что операции сложения и умножения во множестве $\mathbf{Q}\left[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right]$ являются бинарными операциями. Пусть $x_1 + y_1\sqrt[3]{2} + z_1\sqrt[3]{4},\ x_2 + y_2\sqrt[3]{2} + z_2\sqrt[3]{4} \in \mathbf{Q}\left[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right]$, тогда операция сложения является бинарной, так как в результате этой операции

$$\left(x_1 + y_1\sqrt[3]{2} + z_1\sqrt[3]{4}\right) + \left(x_2 + y_2\sqrt[3]{2} + z_2\sqrt[3]{4}\right) =$$

$$= (x_1 + y_1) + (y_1 + y_2)\sqrt[3]{2} + (z_1 + z_2)\sqrt[3]{4} \in \mathbf{Q}\left[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right].$$

Рассмотрим операцию умножения:

$$\left(x_1+y_1\sqrt[3]{2}+z_1\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(x_2+y_2\sqrt[3]{2}+z_2\sqrt[3]{4}\right)=$$
$$=x_1\cdot x_2+x_1\cdot y_2\sqrt[3]{2}+x_1\cdot z_2\sqrt[3]{4}+y_1\sqrt[3]{2}\cdot x_2+\underbrace{y_1\sqrt[3]{2}\cdot y_2\sqrt[3]{2}}_{=y_1y_2\sqrt[3]{4}}+\underbrace{y_1\sqrt[3]{2}\cdot z_2\sqrt[3]{4}}_{=2y_1z_2}+z_1\sqrt[3]{4}\cdot x_2+$$
$$+\underbrace{z_1\sqrt[3]{4}\cdot y_2\sqrt[3]{2}}_{=2z_1y_2}+\underbrace{z_1\sqrt[3]{4}\cdot z_2\sqrt[3]{4}}_{=2z_1z_2\sqrt[3]{2}}=\left(x_1x_2+2z_1y_2+2y_1z_2\right)+\left(x_1y_2+y_1x_2+2z_1z_2\right)\sqrt[3]{2}+$$
$$+\left(x_1z_2+y_1y_2+z_1x_2\right)\sqrt[3]{4}\in\mathbf{Q}\left[\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\right],$$

то есть в результате операции умножения двух элементов $x_1+y_1\sqrt[3]{2}+z_1\sqrt[3]{4}$, $x_2+y_2\sqrt[3]{2}+z_2\sqrt[3]{4}\in\mathbf{Q}\left[\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\right]$ получается элемент из $\mathbf{Q}\left[\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\right]$.

Непосредственно проверяется, что алгебра $\mathbf{Q}\left[\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\right]$ есть абелева алгебра, причем в качестве нейтрального элемента выступает

$$\theta=0+0\sqrt[3]{2}+0\sqrt[3]{4}\in\mathbf{Q}\left[\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\right],$$

в качестве противоположного элемента – число вида

$$-x-y\sqrt[3]{2}-z\sqrt[3]{4}\in\mathbf{Q}\left[\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4}\right].$$

В качестве нейтрального элемента относительно умножения выступает число

$$1_K=1+0\sqrt[3]{2}+0\sqrt[3]{4}.$$

Пример 2.23. Рассмотрим множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели являются степенями тройки. Выяснить, является ли это множество с обычными операциями сложения и умножения кольцом.

Решение. В данном случае основное множество имеет вид $K=\left\{q=\frac{m}{3^n}\,\middle|\, m\in\mathbf{Z}, n\in\mathbf{N},\ НОД\left(m,\ 3^n\right)=1\right\}$. Покажем, что операции сложения и умножения чисел из множества K являются бинарными операциями. Рассмотрим два числа $q_1=\frac{m_1}{3^{n_1}},\ q_2=\frac{m_2}{3^{n_2}}\in K$, для которых $НОД\left(m_1,3^{n_1}\right)=1,\ НОД\left(m_2,3^{n_2}\right)=1$ (каждая из дробей несократима). Пусть $НОК\left(3^{n_1},3^{n_2}\right)=3^n$, откуда $3^n=3^{n_1}\cdot d_1,\ 3^n=3^{n_2}\cdot d_2$, причем $НОД\left(3^{n_1},\ 3^{n_2}\right)=1$. Тогда

$$q_1+q_2=\frac{m_1}{3^{n_1}}+\frac{m_2}{3^{n_2}}=\frac{d_1m_1}{3^n}+\frac{d_2m_2}{3^n}=\frac{d_1m_1+d_2m_2}{3^n}\in K,$$

так как $НОД\left(d_1m_1+d_2m_2,\ 3^n\right)=1$. Аналогично

$$q_1\cdot q_2=\frac{m_1}{3^{n_1}}\cdot\frac{m_2}{3^{n_2}}=\frac{m_1\cdot m_2}{3^{n_1+n_2}}\in K.$$

Так как операции над элементами множества K есть операции над рациональными числами, то операция сложения коммутативна и ассоциативна, операция умножения дистрибутивна относительно сложения. В качестве нулевого элемента выступает $0=\dfrac{0}{3^n}\in K$. В качестве противоположного элемента к числу $q=\dfrac{m}{3^n}$ выступает число $-q=-\dfrac{m}{3^n}$. Данное множество является кольцом.

2.13. Задания для самостоятельной работы

Задание 2.9. Рассмотрим множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели не делятся на число 3. Выяснить, является ли это множество с обычными операциями сложения и умножения кольцом. Ответ: да, является, основное множество имеет вид

$$K=\left\{ q=\frac{m}{3n+1}\vee q=\frac{m}{3n+2} \,\middle|\, m\in\mathbf{Z}, n\in\mathbf{N},\ НОД\left(m,3n+1\right)=1\right\}.$$

Задание 2.10. Является ли множество всех вещественных симметрических матриц n-го порядка с обычными операциями сложения и умножения кольцом?

Задание 2.11. Является ли множество всех вещественных верхнетреугольных матриц n-го порядка с обычными операциями сложения и умножения кольцом?

Задание 2.12. Является ли множество $K=\left\{ A=\begin{pmatrix} x & y \\ \alpha y & x\end{pmatrix} \,\middle|\, x,y\in\mathbf{Z}\right\}$ матриц ($\alpha\in\mathbf{Z}-$ фиксированное целое число) с обычными операциями сложения и умножения матриц кольцом?

Задание 2.13. Является ли множество $K=\left\{ \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \\ \alpha y & x\end{pmatrix} \,\middle|\, x,y\in 2\mathbf{Z}\right\}$ матриц ($\alpha\in\mathbf{Z}-$фиксированное число, не делящееся на квадрат простого числа) с обычными операциями сложения и умножения матриц кольцом? Указание: в данном случае $\alpha\neq kp^2$, $k\in\mathbf{Z}$, $p-$простое число. Сначала необходимо показать, что операции сложения и умножения матриц из K являются бинарными операциями, то есть в результате этих операций получается матрица из K. Рассмотреть матрицы $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \alpha y_1 & x_1\end{pmatrix}$, $B=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ \alpha y_2 & x_2\end{pmatrix}\in K$ ($x_1=2u_1$, $x_2=2u_2$, $y_1=2v_1$, $y_2=2v_2$) и показать, что $A+B,\ A\cdot B\in K$. Далее проверить условия из определения кольца, в качестве нулевого элемента выступает матрица $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha\cdot 0 & 0\end{pmatrix}$.

Задание 2.14. Рассмотрим множество $\mathbf{Q}\left[\sqrt{3}\right]=\left\{a+b\sqrt{3}\,\middle|\, a,b\in\mathbf{Q}\right\}$. Показать, что алгебра $\mathcal{K}=\left\langle \mathbf{Q}\left[\sqrt{3}\right],+,\ \text{-},\ \cdot,\ 1\right\rangle$ есть коммутативное кольцо.

Задание 2.15. Рассмотрим $\mathbf{Q}\left[\sqrt[3]{3}\right]=\left\{x+y\sqrt[3]{3}\,\middle|\, x,y\in\mathbf{Q}\right\}$. Выяснить, является ли алгебра $\left\langle \mathbf{Q}\left[\sqrt[3]{3}\right],+,\ \text{-},\ \cdot,\ 1\right\rangle$ кольцом.

Задание 2.16. Пусть $K=\left\{(a,b)\,\middle|\, a,b\in\mathbf{Z}\right\}$ есть множество упорядоченных пар с целыми компонентами, операциями сложения и умножения пар по правилам: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$, $(a,b)\cdot(c,d)=(ac,bd)$. Выяснить, является ли алгебра $\langle K,+,\ \text{-},\ \cdot,\ e\rangle$ коммутативным кольцом (в качестве нейтрального элемента относительно умножения взять $e=(1,\ 1)$). Является ли оно целостным кольцом?

Задание 2.17. Решить в кольце $\mathbf{Z}_5=\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ системы уравнений:

а) $\begin{cases}\overline{2}\cdot\overline{x}+\overline{3}\cdot\overline{y}=\overline{2},\\ \overline{3}\cdot\overline{x}-\overline{y}=-\overline{5},\end{cases}$ б) $\begin{cases}-\overline{x}+\overline{2}\cdot\overline{y}=\overline{4},\\ \overline{2}\cdot\overline{x}-\overline{y}=-\overline{1},\end{cases}$ в) $\begin{cases}\overline{3}\cdot\overline{x}-\overline{4}\cdot\overline{y}=\overline{3},\\ \overline{2}\cdot\overline{x}+\overline{y}=\overline{1}.\end{cases}$

2.14. Понятие поля. Простейшие примеры полей

Определение 2.22. Пусть $\mathcal{K}=\langle K,+,\ \text{-},\ \cdot,\ 1_K\rangle$ – кольцо. Элемент $a\in K$ называется *обратимым элементом* кольца $\mathcal{K}$, если существует элемент $b\in K$ такой, что $a\cdot b=b\cdot a=1_K$. При этом элементы $a,b\in K$ образуют пару взаимно-обратных элементов.

Определение 2.23. *Полем* называется коммутативное кольцо $\mathcal{K}=\langle K,+,\ \text{-},\ \cdot,\ 1_K\rangle$, в котором $0_K\neq 1_K$ [0_K – нейтральный (нулевой) элемент относительно операции сложения] и всякий ненулевой элемент $a\in K$ является обратимым, то есть:

1) $\mathcal{K}=\langle K,+,\ \text{-},\ \cdot,\ 1_K\rangle$ есть коммутативное кольцо,

2) $0_K\neq 1_K$,

3) $(\forall a\in K, a\neq 0_K)(\exists b\in K): a\cdot b=b\cdot a=1_K$.

При этом $\langle K,+,\ \text{-}\rangle$ есть аддитивная группа поля $\mathcal{K}$, 0_K – нуль поля, 1_K – единица поля. Из пункта 3 определения поля следует, что для элемента $a\in K$ элемент $b\in K$ (он обозначается в виде a^{-1}) является обратным элементом.

Простейшими примерами полей являются:

1) $\mathcal{R}=\langle \mathbf{R},+,\ \text{-},\ \cdot,\ 1\rangle$ – *поле действительных чисел*. В нем $\langle \mathbf{R},+,\ \text{-},\ \cdot,\ 1\rangle$ – коммутативное кольцо, $0\neq 1$, и для каждого ненулевого числа $a\in\mathbf{R}$ существует обратный элемент $b=a^{-1}=\dfrac{1}{a}$: $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$;

2) $\mathbf{Q} = \langle \mathbf{Q}, +, -, \cdot, 1 \rangle$ – *поле рациональных чисел* (дробей), где множество $\mathbf{Q} = \left\{ \left. \frac{m}{n} \right| m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$, $\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}$. В $\mathbf{Q}$ действия с дробями подчиняются естественным (школьным) правилам (которые следуют из определения поля):

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \ (b, d \neq 0), \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \ (a, b \neq 0).$$

Например, покажем обоснованность второй формулы:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{1}{bd} \cdot ad + \frac{1}{bd} \cdot bc = \frac{1}{bd} \cdot (ad + bc) = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Естественно предположить, что не всякое кольцо является полем. Например, кольцо $\langle \mathbf{Z}_4, \oplus, \odot, \bar{1} \rangle$ классов вычетов по модулю 4 не является полем, так как не каждый ненулевой элемент этого кольца имеет обратный элемент. Как видно из таблицы умножения, для элемента (класса вычетов) $\bar{2}$ не существует такого элемента $\bar{b} \in \mathbf{Z}_4 : \bar{2} \odot \bar{b} = \bar{1}$.

$\odot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Кольцо $\langle \mathbf{Z}_5, \oplus, \odot, \bar{1} \rangle$ классов вычетов по модулю 5 с классами вычетов $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ является полем, так как каждый ненулевой элемент этого кольца имеет обратный элемент: $\bar{1} \odot \bar{1} = \bar{1}$, $\bar{2} \odot \bar{3} = \bar{1}$, $\bar{3} \odot \bar{2} = \bar{1}$, $\bar{4} \odot \bar{4} = \bar{1}$.

$\odot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

И вообще, кольцо $\langle \mathbf{Z}_m, \oplus, \odot, \bar{1} \rangle$ классов вычетов по модулю m с классами вычетов $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{m}$ является полем только в том случае, когда m есть простое число (данное утверждение доказывается в разделе “Теория чисел” дисциплины “Дополнительные главы высшей математики”).

2.15. Поле комплексных чисел

Определение 2.24. Множеством $\mathbf{C}$ комплексных чисел называется совокупность упорядоченных пар $z=(x,y)$, $x,y\in\mathbf{R}$, для которых выполняются условия:

$C_1:\ z_1+z_2=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ (аксиома сложения),

$C_2:\ z_1\cdot z_2=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+y_1x_2)$ (аксиома умножения).

При этом $x,y\in\mathbf{R}$ называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа $z=(x,y)$ (пишут $x=\operatorname{Re}z,\ y=\operatorname{Im}z$).

Пару вида $(x,0)$ будем отождествлять с действительным числом x и записывать как $(x,0)=x$.

Определение 2.25. Пара вида $i=(0,1)$ называется мнимой единицей.

При этом

$$i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot0-1\cdot1,\ 0\cdot1-1\cdot0)=(-1,0)=-1,$$

то есть квадрат мнимой единицы равен -1. К тому же непосредственно проверяется, что $(0,y)=(y,0)\cdot(0,\ 1)$. Тогда приходим к записи $(0,y)=y\cdot i$.

В соответствии с аксиомой C_1 получим $z=(x,y)=$ $=(x,0)+(0,y)=x+y\cdot i$.

Определение 2.26. Равенство

$$z=x+y\cdot i \tag{2.6}$$

называется алгебраической формой записи комплексного числа $z=(x,y)$.

В соответствие с формулой (2.6) операции сложения и умножения комплексных чисел можно представить в алгебраической форме записи:

1) $z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i$,

2) $z_1\cdot z_2=(x_1+y_1i)\cdot(x_2+y_2i)=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)i$,

3) $\lambda\cdot z=\lambda\cdot(x+yi)=\lambda x+\lambda yi\quad(\lambda\in\mathbf{R})$,

4) $(-1)\cdot z=-x-yi=-z$.

Из этих формул следует, что комплексная пара $(1,0)=1$ является нейтральным элементом относительно операции умножения.

Алгебра $\mathbb{C}=\langle\mathbf{C},+,\ -,\ \cdot,\ 1\rangle$ является коммутативным кольцом. В этом нетрудно убедиться, проверив аксиомы кольца. В частности, операция умножения дистрибутивна относительно операции сложения:

$$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3.$$

Определение 2.27. Число $\bar{z}=(x,\ -y)=x-yi$ называется сопряженным к числу $z=(x,y)$.

Из определения 27 следуют свойства сопряженных чисел:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,

2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,

3) $\overline{\overline{z}} = z$,

4) $\overline{z} = z \Leftrightarrow z = (x,0) = x \in \mathbf{R}$,

5) $z + \overline{z} = 2x \in \mathbf{R}$,

6) $z \cdot \overline{z} = (x+yi)\cdot(x-yi) = x^2 + y^2 \in \mathbf{R}$.

Докажем равенство 2. Пусть $z_1 = x_1 + y_1 i,\ z_2 = x_2 + y_2 i$. Распишем подробно левую и правую части доказываемого равенства:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x_1 + y_1 i)\cdot(x_2 + y_2 i)} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i} =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + y_1x_2)i,$$
$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{x_1 + y_1 i} \cdot \overline{x_2 + y_2 i} = (x_1 - y_1 i)\cdot(x_2 - y_2 i) = (x_1x_2 + y_1y_2 i^2) - (x_1y_2 + y_1x_2)i =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) - (x_1y_2 + y_1x_2)i.$$

Совпадение результатов правых частей обоих равенств доказывает справедливость равенства 2.

Для доказательства того, что $\mathcal{C} = \langle \mathbf{C}, +, -, \cdot, 1\rangle$ является полем, необходимо показать, что для каждого ненулевого комплексного числа $z = x + yi$ ($z \neq 0$) существует обратный элемент $z' \in \mathbf{C}$ такой, что $z \cdot z' = 1$. В качестве числа $z' \in \mathbf{C}$ возьмем $z' = \dfrac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \dfrac{x - yi}{x^2 + y^2}$. Тогда

$$z \cdot z' = (x + yi) \cdot \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{(x + yi)\cdot(x - yi)}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

Итак, $\mathcal{C} = \langle \mathbf{C}, +, -, \cdot, 1\rangle$ есть поле комплексных чисел.

На множестве $\mathbf{C}$ можно ввести операцию деления комплексных чисел: если $z_1 = x_1 + y_1 i,\ z_2 = x_2 + y_2 i$ $(z_2 \neq 0)$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}. \tag{2.7}$$

При этом частное двух комплексных чисел можно привести к алгебраической форме записи следующим образом:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(x_1 + y_1 i)\cdot(x_2 - y_2 i)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + (y_1x_2 - x_1y_2)i}{x_2^2 + y_2^2} =$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

2.16. Примеры решения задач

Пример 2.24. На множестве $P_3 = \{0,1,2\}$ определим две операции: "сложение по модулю 3" $\oplus$ - остаток от деления суммы $a+b$ на число 3, обозначим $a \oplus b = \{a+b\}_3$, "умножение по модулю 3" $\odot$ - остаток от деления произведения $a \cdot b$ на число 3, обозначим $a \odot b = \{a \cdot b\}_3$. Доказать, что множество $P_3 = \{0,1,2\}$ с введенными операциями является полем.

Решение. Сначала составим таблицы "сложения" и "умножения" по модулю 3. Например, $1 \oplus 2 = \{1+2\}_3 = \{3\}_3 = 0 -$ остаток от деления числа 3 на 3, $2 \odot 2 = \{2 \cdot 2\}_3 = \{4\}_3 = 1 -$ остаток от деления числа 4 на 3.

$P_3 = \{0,1,2\}$ $\oplus$	0	1	2	$P_3 = \{0,1,2\}$ $\odot$	0	1	2
0	0	1	2	0	0	0	0
1	1	2	0	1	0	1	2
2	2	0	1	2	0	2	1

Из таблицы сложения видно, что операция $\oplus$ коммутативна:

$$a \oplus b = \{a+b\}_3 = \{b+a\}_3 = b \oplus a,$$

ассоциативна:

$$a \oplus (b \oplus c) = \{a + (b+c)\}_3 = \{(a+b)+c\}_3 = (a \oplus b) \oplus c,$$

число 0 – нейтральный (нулевой) элемент относительно операции $\oplus$:

$$a \oplus 0 = \{a+0\}_3 = \{a\}_3 = a.$$

Каждый элемент из множества $P_3 = \{0,1,2\}$ имеет противоположный:

$$-(0) = 0, \ -(1) = 2, \ -(2) = 1,$$

так как

$$-(0) \oplus 0 = 0, \ -(1) \oplus 1 = 2 \oplus 1 = \{2+1\}_3 = \{3\}_3 = 0,$$
$$-(2) \oplus 2 = 1 \oplus 2 = \{1+2\}_3 = \{3\}_3 = 0.$$

Непосредственно можно проверить, что операция $\odot$ ассоциативна и дистрибутивна относительно операции $\oplus$.

Из таблицы видно, что для каждого ненулевого элемента $1,2 \in P_3$ имеется обратный элемент: $(1)^{-1} = 1, \ (2)^{-1} = 2$, так как $1 \odot 1 = 1, \ \ 2 \odot 2 = 1$.

Пример 2.25. Рассмотрим алгебру $\tilde{P} = \langle \mathbf{R}, \oplus, -, \odot, 1_K \rangle$, где основным множеством является множество $\mathbf{R}$, бинарные операции $\oplus, \odot$ определяются по правилам ($+, \cdot$ есть обычные арифметические операции сложения и умножения действительных чисел):

$$a \oplus b = a + b + 1, \ a \odot b = a \cdot b + a + b.$$

Доказать, что алгебра $\tilde{P}$ является полем.

Решение. Доказательство того, что данная алгебра является полем, предполагает подробную проверку соответствующих условий группы и кольца.

1. а) во-первых, проверим, что $\langle \mathbf{R}, \oplus, \ - \rangle$ есть абелева группа. Операция сложения $\oplus$ коммутативна ($a \oplus b = a + b + 1 = b + a + 1 = b \oplus a$) и ассоциативна (проверяется непосредственно). В качестве нулевого элемента 0_K необходимо взять число -1, так как в этом случае $a \oplus 0_K = a + (-1) + 1 = a$. Далее найдем противоположный элемент $(-a)$ к элементу $a \in \mathbf{R}$:

$a \oplus (-a) = 0_K \Leftrightarrow a + (-a) + 1 = -1 \Leftrightarrow (-a) = -a - 2$.

Таким образом, противоположный к элементу $a \in \mathbf{R}$ есть элемент $(-a) = -a - 2$;

б) Операция умножения $\otimes$ коммутативна, так как $a \otimes b = ab + a + b = ba + b + a = b \otimes a$, и ассоциативна (проверяется непосредственно).

Для нахождения единицы кольца 1_K используем равенство $a \otimes 1_K = a$:

$a \otimes 1_K = a \Leftrightarrow a \cdot 1_K + a + 1_K = a \Leftrightarrow a \cdot 1_K + 1_K = 0 \Leftrightarrow (a+1) \cdot 1_K = 0 \Leftrightarrow 1_K = 0$.

Таким образом, единица кольца $1_K = 0$.

в) проверим, является ли операция умножения $\otimes$ дистрибутивной относительно операции сложения $\oplus$, то есть покажем, что при всех $a, b, c \in \mathbf{R}$: $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c$.

Рассмотрим сначала левую часть равенства:

$$a \otimes (b \oplus c) = a \otimes \underbrace{(b + c + 1)}_{d} = a \otimes d = a \cdot d + a + d = a \cdot (b + c + 1) + a + b + c + 1 =$$

$$= a \cdot b + a \cdot c + 2a + b + c + 1.$$

Рассмотрим правую часть проверяемого равенства:

$$a \otimes b \oplus a \otimes c = \underbrace{(a \cdot b + a + b)}_{f} \oplus \underbrace{(a \cdot c + a + c)}_{g} = f \oplus g = f + g + 1 =$$

$$= a \cdot b + a + b + a \cdot c + a + c + 1 = a \cdot b + a \cdot c + 2a + b + c + 1.$$

Равенство левой и правой частей доказывает справедливость проверяемого равенства о дистрибутивности.

Из пунктов а,б,в следует, что алгебра $P = \langle \mathbf{R}, \oplus, \ -, \ \otimes, \ 1_K \rangle$ есть коммутативное кольцо.

2. Очевидно, что $0_K \neq 1_K$, так как $-1 \neq 0$.

3. Покажем, что $(\forall a \in \mathbf{R}, a \neq 0_K = -1)(\exists b \in \mathbf{R}) : a \otimes b = 1_K = 0$.

$$a \otimes b = 1_K = 0 \Leftrightarrow ab + a + b = 0 \Leftrightarrow b(a+1) = -a \Leftrightarrow b = -\frac{a}{a+1} \ (a \neq -1).$$

Таким образом, показано, что $b = -\dfrac{a}{a+1}$ есть обратный элемент для числа $(\forall a \in \mathbf{R}, a \neq 0_K = -1)(\exists b \in \mathbf{R}) : a \otimes b = 1_K = 0$.

Все пункты из определения поля выполнены, значит, $P = \langle \mathbf{R}, \oplus, \ -, \ \otimes, \ 1_K \rangle$ есть поле.

2.17. Задания для самостоятельной работы

Задание 2.18. На множестве $P_5 = \{0,1,2,3,4\}$ определим две операции: "сложение по модулю 5" $\oplus$ - остаток от деления суммы $a+b$ на число 5, обозначим $a \oplus b = \{a+b\}_5$, "умножение по модулю 5" $\odot$ - остаток от деления произведения $a \cdot b$ на число 5, обозначим $a \odot b = \{a \cdot b\}_5$. Доказать, что множество $P_5 = \{0,1,2,3,4\}$ с введенными операциями является полем.

Задание 2.19. Пусть $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbf{Q} \right\}$. Доказать, что алгебра $\tilde{K} = \langle K, +, -, \cdot, E \rangle$ с обычными операциями сложения и умножения матриц является полем. Показать, что оно содержит такой элемент A, $A^2 = -E$.

Задание 2.20. Рассмотрим множество $\mathbf{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{ a + b\sqrt{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbf{Q} \right\}$. Показать, что алгебра $\left\langle \mathbf{Q}\left[\sqrt{2}\right], +, -, \cdot, 1 \right\rangle$ является полем.

Глава 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Особенности численных алгоритмов. Общие положения

Многие естественно-научные и технические задачи приводят к необходимости решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.1}$$

или в матричной форме $AX = B$, где $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ – основная матрица СЛАУ, $B = \left(b_i\right)_{m\times 1} = \left(b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_m\right)^T$ - вектор-столбец свободных членов СЛАУ, $X = \left(x_j\right)_{n\times 1} = \left(x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n\right)^T$ - вектор-столбец неизвестных СЛАУ.

Число m уравнений в СЛАУ и число n неизвестных в них могут исчисляться десятками и сотнями тысяч. Очевидно, что решение таких систем уравнений невозможно без применения ЭВМ. Но даже для современных специализированных ЭВМ задача решения СЛАУ с очень большими значениями m и n $\left(m, n \geq 10^5\right)$ требует огромных затрат машинного времени. Проблема сокращения затрат машинного времени на решение систем уравнений большого размера является актуальной и в настоящее время, хотя в течение уже многих десятилетий усилия математиков всего мира направлены на разработку эффективных вычислительных алгоритмов решения таких систем уравнений.

В настоящей главе рассматриваются проблемы, возникающие при решении СЛАУ численными методами, а также наиболее простые и широко применяемые в вычислительной практике методы решения систем уравнений.

Вопрос ***вычислительной сложности*** является одним из основных вопросов, возникающих при тестировании любого нового численного алгоритма. Ответ на него получают, подсчитывая число арифметических операций, которые необходимы для реализации алгоритма. Например, для решения методом Гаусса системы n уравнений с n неизвестными необходимо выполнить $\frac{n^3}{3} + O\left(n^2\right)$ арифметических операций, а методом квадратных корней, как будет показано ниже, - в два раза меньше.

Учет особенностей основной матрицы A СЛАУ (симметричность, ленточный вид, блочная структура матрицы и т.д.) позволяет создавать более эффективные алгоритмы нахождения решений таких систем.

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений разделяют на ***точные*** или, иначе, ***конечные*** и ***итерационные***. Точные методы позволяют находить решение $X^{(0)} = \left(x_1^{(0)} \quad x_2^{(0)} \quad \ldots \quad x_n^{(0)}\right)^T$ СЛАУ за конечное число шагов, определяемое размерами ее основной матрицы и собственно алгоритмом. К ним относятся хорошо известные правило Крамера и метод Гаусса, метод квадратных корней, метод прогонки и другие.

Метод Гаусса является универсальным методом исследования линейных систем уравнений на совместность и решения совместных СЛАУ. Три других, названные в числе точных методов, применимы к системам уравнений, основная матрица которых удовлетворяет для каждого метода своим определенным условиям. Для метода квадратных корней и метода прогонки эти условия обсуждаются ниже в соответствующих пунктах.

Итерационные методы являются циклическими алгоритмами с однотипными действиями (процедурами) в каждом цикле. Они позволяют находить ***приближенное решение*** СЛАУ с заданной точностью и также за конечное, но априори не известное число циклов. К итерационным методам относятся методы простой итерации, Зейделя, релаксации и др.

Термин "точный метод" требует пояснения. Метод Гаусса, равно как и другие конечные методы решения СЛАУ, является точным в том смысле, что если коэффициенты системы уравнений (3.1) заданы точно и все вычисления, предписываемые алгоритмом этого метода, выполняются точно, то и решение X^0 системы (если оно существует) будет найдено точно.

Однако числа в ЭВМ записываются приближенно в соответствии с размером разрядной сетки; арифметические действия с ними организованы так, что в определенных ситуациях результаты вычислений могут отличаться от точных значений. Таким образом, все методы, как приближенные по своей сути, так и точные, оказываются приближенными при реализации алгоритма решения системы уравнений на ЭВМ.

Есть еще одна проблема, обусловленная приближенной записью действительных чисел в ЭВМ. Конечные методы ведут себя по-разному в отношении ошибок округлений. В одних алгоритмах эти ошибки могут быстро расти и приводить к неприемлемым ошибкам в получаемом приближенном решении $\hat{X}^0$ системы уравнений, в других – ошибки округления не накапливаются. Алгоритмы первой группы (любые, не обязательно конечные) называют ***неустойчивыми*** к вычислительным ошибкам, а алгоритмы второй группы - ***устойчивыми.***

Доказано, что метод Гаусса является ***неустойчивым***, а метод квадратных корней устойчив к ошибкам округлений. Идеи метода Гаусса лежат в основе большого числа вычислительных алгоритмов линейной алгебры. С его помощью можно находить обратную матрицу и вычислять определители квадратных матриц. Поэтому задача повышения устойчивости метода Гаусса к погрешностям округлений всегда была одной из основных в вычислительной математике.

Простейший метод повышения устойчивости заключается в выборе так называемого ***ведущего элемента*** данного шага прямого хода. Если модуль определителя основной матрицы СЛАУ больше ***машинного нуля***, то с помощью дополнительной процедуры выбора ведущего элемента на каждом шаге прямого хода метода Гаусса можно избежать деления на машинный нуль и тем самым повысить в результате точность решения. ***Машинным нулем*** (или ***машинным эпсилоном***) называется такое числовое значение с отрицательным порядком, которое воспринимается ЭВМ как нуль. По-другому, машинным нулем называется числовое значение, меньше которого невозможно задавать относительную точность для любого алгоритма, возвращающего вещественные числа.

Поясним, как осуществляется выбор ведущего элемента. Пусть

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1k} & \dots & a_{1r} & \dots\ a_{1n} & b_1 \\
0 & a_{12}^1 & \dots & a_{2,k-1}^1 & a_{2k}^1 & \dots & a_{2r}^1 & \dots\ a_{2n}^1 & b_2^1 \\
. & . & \dots & . & . & \dots & . & \dots & . \\
0 & 0 & \dots & a_{k-1,k-1}^{k-2} & a_{k-1,k}^{k-2} & \dots & a_{k-1,r}^{k-2} & \dots\ a_{k-1,n}^{k-2} & b_{k-1}^{k-2} \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_{kk}^{k-1} & \dots & a_{kr}^{k-1} & \dots\ a_{kn}^{k-1} & b_k^{k-1} \\
. & . & \dots & . & . & \dots & . & \dots & . \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_{sk}^{k-1} & \dots & a_{sr}^{k-1} & \dots\ a_{sn}^{k-1} & b_s^{k-1}
\end{array}\right)$$

есть расширенная матрица СЛАУ после некоторого $(k-1)$-го ($2 \le k < r$) шага прямого хода метода Гаусса. Блоком в ней выделена подматрица

$$A^{k-1} = \left(a_{ij}^{k-1}\right) = \begin{pmatrix} a_{kk}^{k-1} & \dots & a_{kr}^{k-1} & \dots & a_{kn}^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{sk}^{k-1} & \dots & a_{sr}^{k-1} & \dots & a_{sn}^{k-1} \end{pmatrix} \left(i = k,\ k+1, \dots, s;\ \ j = k,\ k+1, \dots, n\right),$$

которая называется ***активной подматрицей*** следующего k -го шага. Первый столбец

$$\begin{pmatrix} a_{kk}^{k-1} \\ \dots \\ a_{sk}^{k-1} \end{pmatrix}$$

активной подматрицы называется ***активным столбцом***.

Выделяют два основных способа выбора ведущего элемента k -го шага: **по активному столбцу (частичный выбор)** и по всей активной подматрице **(полный выбор).**

В первом случае в качестве ведущего элемента k -го шага выбирается наибольший по модулю элемент a_{tk}^{k-1} $\left(k \le t \le s\right)$ в активном столбце. Если $t \ne k$, то строки активной подматрицы с номерами t и k меняются местами.

Пример 3.1. Решить систему

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3=2, \\ -2x_1+x_2-3x_3=-4, \\ 5x_1+5x_2-x_3=9 \end{cases}$$

методом Гаусса с помощью частичного выбора ведущего элемента.

Решение. На первом шаге в первом активном столбце расширенной матрицы $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & -4 \\ \boxed{5} & 5 & -1 & 9 \end{array}\right)$ ведущим элементом выберем $5=\max\{3,2,5\}$.

Тогда, применяя элементарные преобразования, получаем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & -4 \\ \boxed{5} & 5 & -1 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[I\leftrightarrow III]{5=\max\{3,2,5\},} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{5} & 5 & -1 & 9 \\ -2 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 4 & -5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[I\cdot(-3/5)+III]{I\cdot(2/5)+II,} \to \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{5} & 5 & -1 & 9 \\ 0 & \boxed{3} & -\dfrac{17}{5} & -\dfrac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\dfrac{22}{5} & -\dfrac{17}{5} \end{array}\right).$$

На втором шаге активным столбцом является столбец $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ с активной матрицей $\begin{pmatrix} 3 & -17/5 \\ 1 & -22/5 \end{pmatrix}$. Тогда ведущим элементом будет элемент $3=\max\{3,1\}$.

Применяя элементарные преобразования, получаем на втором шаге ступенчатую матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{5} & 5 & -1 & 9 \\ 0 & \boxed{3} & -\dfrac{17}{5} & -\dfrac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\dfrac{22}{5} & -\dfrac{17}{5} \end{array}\right) \xrightarrow[II\cdot(-1/3)+III]{3=\max\{3,\ 1\},} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{5} & 5 & -1 & 9 \\ 0 & \boxed{3} & -\dfrac{17}{5} & -\dfrac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\dfrac{49}{15} & -\dfrac{49}{15} \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1+5x_2-x_3=9, \\ 3x_2-\dfrac{17}{5}x_3=-\dfrac{2}{5}, \\ -\dfrac{49}{15}x_3=-\dfrac{49}{15}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=1, \\ x_3=1. \end{cases}$$

Ответ: $X=(1\quad 1\quad 1)^T$.

Во втором случае в качестве ведущего элемента k-го шага выбирается наибольший по модулю элемент во всей активной подматрице.

Пример 3.2. Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3=10, \\ 3x_1+x_2+5x_3=12, \\ -4x_1-3x_2-2x_3=-2 \end{cases}$$

методом Гаусса с помощью полного выбора ведущего элемента.

Решение. На первом шаге на основании анализа модулей всех элементов основной матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & \boxed{5} \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ системы в качестве ведущего элемента возьмем $a_{23}=5$. Применяя элементарные преобразования (меняем местами вторую и первую строки, затем меняем местами первый и третий столбцы), получаем

$$(A|B)=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 10 \\ 3 & 1 & \boxed{5} & 12 \\ -4 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\end{array} \to \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & \boxed{5} & 12 \\ 2 & -1 & 4 & 10 \\ -4 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\end{array} \to \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{5} & 1 & 3 & 12 \\ 4 & -1 & 2 & 10 \\ -2 & -3 & -4 & -2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\end{array} \xrightarrow{\substack{I\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+II,\\ I\cdot\left(\frac{2}{5}\right)+III}}$$

$$\to \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{5} & 1 & 3 & 12 \\ 0 & -\frac{9}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{13}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{14}{5} \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\end{array}.$$

На втором шаге активной подматрицей является матрица $\begin{pmatrix} -\frac{9}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{13}{5} & -\frac{14}{5} \end{pmatrix}$.

Ведущим элементом становится $-\frac{14}{5}$, так как $\frac{14}{5}=\max\left\{\left|-\frac{9}{5}\right|, \left|-\frac{2}{5}\right|, \left|-\frac{13}{5}\right|, \left|-\frac{14}{5}\right|\right\}$. На втором шаге прямого хода метода Гаусса получаем ступенчатую матрицу

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{5} & 1 & 3 & 12 \\ 0 & -\frac{9}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{13}{5} & \boxed{-\frac{14}{5}} & \frac{14}{5} \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\end{array} \to \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{5} & 1 & 3 & 12 \\ 0 & -\frac{13}{5} & \boxed{-\frac{14}{5}} & \frac{14}{5} \\ 0 & -\frac{9}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\end{array} \to \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{5} & 3 & 1 & 12 \\ 0 & \boxed{-\frac{14}{5}} & -\frac{13}{5} & \frac{14}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{9}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_3 & x_1 & x_2 \end{array}\end{array} \xrightarrow{\substack{II\cdot 5,\\ III\cdot 5}}$$

$$\to \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{5} & 3 & 1 & 12 \\ 0 & \boxed{-14} & -13 & 14 \\ 0 & -2 & -9 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_3 & x_1 & x_2 \end{array}\end{array} \xrightarrow{II\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)+III} \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{5} & 3 & 1 & 12 \\ 0 & \boxed{-14} & -13 & 14 \\ 0 & 0 & -\frac{50}{7} & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_3 & x_1 & x_2 \end{array}\end{array}.$$

Применяя обратный ход метода Гаусса, получаем

$$\begin{cases} 5x_3+3x_1+x_2=12, \\ -14x_1-13x_2=14, \\ x_2=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3=-3, \\ x_1=-1, \\ x_2=0. \end{cases}$$

Ответ: $X = (-1 \quad 0 \quad 3)^T$.

Ошибки округлений могут приводить не только к неприемлемому изменению результата решения СЛАУ, но даже и к прекращению вычислений. Рассмотрим следующий пример.

Пример 3.3. Пусть требуется исследовать на совместность систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ -3x_2 + 6{,}999x_3 = 1{,}01. \end{cases}$$

Прямой ход метода Гаусса приводит к расширенной матрице

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6{,}999 & 1{,}01 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & -3 & 6{,}999 & 1{,}01 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -0{,}001 & 0{,}01 \end{array}\right),$$

которой отвечает треугольная СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_2 - 7x_3 = -1, \\ -0{,}001x_3 = 0{,}01. \end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение $X^{(0)} = (-8/3 \quad -71/3 \quad -10)^T$.

Допустим теперь, что решение данной системы выполняется с помощью некоторой виртуальной ЭВМ, вычисления на которой производятся с двумя знаками после запятой. В этом случае прямой ход метода Гаусса приводит к несовместной системе (в памяти ЭВМ число -0,001 запишется как 0)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_2 - 7x_3 = -1, \\ 0 \cdot x_3 = 0{,}01. \end{cases}$$

Причина такого явления заключается в том, что в пределах объявленной машинной точности определитель основной матрицы системы уравнений равен нулю. Действительно, машинным нулем при такой точности являются все действительные числа a такие, что $|a| < 0{,}005$, а определитель основной матрицы исходной СЛАУ равен $1 \cdot 3 \cdot (-0{,}001) = -0{,}003$, то есть равен машинному нулю.

Изменим исходную систему на систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ -3x_2 + 6{,}99x_3 = 1{,}001. \end{cases}$$

Ее точным решением является вектор $X = (19/30 \quad -17/30 \quad -1/10)^T$. В виртуальную ЭВМ эта же система будет записана в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ -3x_2 + 6{,}99x_3 = 1. \end{cases}$$

Решением данной системы является вектор $X = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}^T$, существенно отличающийся от точного решения. В данной видоизмененной системе определитель $\det A = -0,03$ основной матрицы хоть и больше машинного нуля ($|\det A| = 0,03 > 0,005$), но оказывает существенное влияние на решение системы.

3.2. Источники погрешности

Рассмотрим более подробно источники погрешностей и способы оценивания возможных уклонений приближенных решений систем от их точных решений.

Термины «численные методы» и «приближенный анализ» - синонимы. Всякий раз точная задача заменяется приближенной. Например, пусть по заданной величине w нужно вычислить величину u. Символически запишем операцию как

$$u = \mathbf{A}(w).$$

Как исходные данные, так и решение могут быть величинами различных типов. Пусть u, w есть вектор-столбцы размерностью n.

Количественной мерой точности решения задачи является норма погрешности. Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ есть вектор-столбец размерностью n, $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$ – вещественная матрица размером $m \times n$. Укажем наиболее употребительные нормы для вектор-столбцов и матриц.

1. Введение нормы через стандартное скалярное произведение *(евклидова норма* или l_2*-норма*): $\|X\|_2 = \sqrt{X^T \cdot X} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$,

2. l_1*-норма* или *октаэдрическая норма*: $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$,

3. l_∞ *-норма* или *кубическая норма*: $\|X\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \{|x_i|\} = $
$= \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$.

Для матриц размером $m \times n$ норму можно вводить различными способами. Наиболее часто используется подход, связанный с введением так называемой индуцированной нормы. Если в пространстве $\mathbf{R}^n$ введена норма $\|\square\|_*$ (см. 1, 2, 3), то *индуцированной (подчиненной) нормой* в пространстве $\mathbf{M}_{mn}$ матриц $A_{m \times n}$ называется норма

$$\|A\|_* = \max_{x \ne \theta} \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*}.$$

При этом норма $\|\cdot\|_*$ в пространстве $\mathbf{R}^n$ называется *порождающей* норму в пространстве матриц. Задавая различные нормы в $\mathbf{R}^n$, будем получать индуцированные нормы в $\mathbf{M}_{mn}$:

1) *евклидова норма* или l_2*-норма:* $\|A\|_2 = \sqrt{(A,\ A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{\ 2}}$,

2) *столбцевая* или *октаэдрическая норма*

$$\|A\|_c = \max_{1\le j\le n}\left\{|a_{1j}| + |a_{2j}| + \ldots + |a_{mj}|\right\} = \max_{1\le j\le n}\left\{\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right\},$$

3) *строчная* или *кубическая норма*

$$\|A\|_r = \max_{1\le i\le m}\left\{|a_{i1}| + |a_{i2}| + \ldots + |a_{in}|\right\} = \max_{1\le i\le m}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\}.$$

При численном решении математических и прикладных задач почти неизбежно появление на каком-то этапе их решения погрешностей следующих трех типов.

1. **Погрешность задачи**. Она связана с приближенным характером исходной содержательной модели, а также ее математического описания, параметрами которого служат обычно приближенные числа (из-за невозможности выполнения абсолютно точных измерений). Для вычислителя погрешность задачи следует считать ***неустранимой***.

2. **Погрешность метода**. Это погрешность, связанная со способом решения поставленной математической задачи и появляющаяся в результате подмены исходной математической модели другой моделью. При создании численных методов закладывается возможность отслеживания такой погрешности и доведения ее до сколь угодно малого уровня. Отсюда следует относить эту ошибку как к ***устранимой*** (или ***условной***) ошибке. Многие алгоритмы строят так, чтобы у них были управляющие параметры. Например, у итерационного алгоритма это число итераций, у разностного — шаг сетки h. Алгоритм строят так, чтобы при стремлении параметра к некоторому пределу численное решение стремилось бы к точному решению. Отличие численного решения от точного при конкретном значении параметра называют ***погрешностью метода***. Сам факт сходимости и скорость сходимости устанавливают теоретическими исследованиями для каждого метода отдельно. Параметры целесообразно выбирать так, чтобы погрешность метода была меньше неустранимой погрешности (погрешности задачи) примерно в 10 раз.

3. **Погрешность округлений (погрешность действий)**. Этот тип погрешностей обусловлен необходимостью выполнять арифметические операции над числами, усеченными до количества разрядов, зависящего от применяемой вычислительной техники. Пусть A и a - два “близких” числа, число A будем называть точным, a – приближенным. Величина $\Delta a = |A - a|$ называется абсолютной погрешностью приближенного числа a , а величина

$\delta a = \dfrac{\Delta a}{|a|}$ – его относительной погрешностью. Числа Δ_a, δ_a такие, что $\Delta a \le \Delta_a$, $\delta a \le \delta_a$, называются оценками (границами) абсолютной и относительной погрешностей (их также называют предельными погрешностями).

3.3. Обусловленность систем линейных алгебраических уравнений

В силу неизбежности появления погрешностей в исходных данных задачи (в том числе в процессе создания математической модели), а также погрешностей округления при ее решении следует иметь представление о том, насколько чувствительными могут оказаться сами задачи и методы их решения к таким погрешностям. Рассмотрим пример системы линейных алгебраических уравнений, чувствительной к коэффициентам уравнений.

Система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 11, \\ 100x_1 + 1001x_2 = 1101 \end{cases}$$

имеет единственное решение $x_1 = x_2 = 1$. Вместе с этой системой рассмотрим так называемую возмущенную систему

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 11{,}01; \\ 100x_1 + 1001x_2 = 1101, \end{cases}$$

отличающуюся от исходной системы изменением правой части в первом уравнении на величину (погрешность задачи) 0,01. Возмущенная система имеет единственное решение $x_1 = 11{,}01;\ x_2 = 0$, которое никак не назовешь близким к решению исходной системы. Приведенный пример показывает, что при малых изменениях правой части системы линейных алгебраических уравнений решение возмущенной системы может сильно отличаться от решения исходной системы. Это пример так называемой ***неустойчивой задачи***. Для оценивания влияния погрешностей задания элементов матрицы и правой части системы линейных уравнений введено понятие обусловленности СЛАУ.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений, записанную в матричном виде

$$AX = B, \qquad (3.2)$$

где $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n,n}$ – неособенная матрица n -го порядка, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}^T$ – ненулевой вектор-столбец, $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ – вектор-столбец неизвестных системы (3.2).

Пусть правая часть системы (3.2) получила приращение (“возмущение”) $\Delta B \ne 0$, то есть вместо вектора B используется приближенный вектор $B + \Delta B$. Реакцией решения X на возмущение ΔB будет вектор поправок ΔX, то есть если X есть решение системы (3.2), то $X + \Delta X$ будет решением возмущенной системы

$$A\left(X + \Delta X\right) = B + \Delta B. \qquad (3.3)$$

Выясним, как возмущение ΔB правой части СЛАУ (3.3) влияет на изменение ΔX решения системы. Для этого получим оценку вида

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le K \cdot \frac{\|\Delta B\|}{\|B\|},$$

то есть выясним связь между относительными погрешностями $\delta_X = \dfrac{\|\Delta X\|}{\|X\|}$ вектор-столбца решения и $\delta_B = \dfrac{\|\Delta B\|}{\|B\|}$ вектор-столбца свободных членов системы (3.3) (здесь $\|\cdot\|$ – какая-либо векторная норма), K – пока неизвестный коэффициент.

Если X есть решение системы (3.2), то из (3.3) следует, что поправка ΔX связана с возмущением ΔB равенством $A\Delta X = \Delta B$, откуда

$$\Delta X = A^{-1} \cdot \Delta B. \tag{3.4}$$

Из равенств (3.2), (3.4) получаем (с учетом неравенства $\|AX\| \le \|A\| \cdot \|X\|$ для нормы произведения матриц) неравенства

$$\|B\| \le \|A\| \cdot \|X\|, \quad \|\Delta X\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta B\|.$$

Перемножим почленно эти неравенства:

$$\|B\| \cdot \|\Delta X\| \le \|A\| \cdot \|X\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta B\|.$$

После деления обеих частей полученного неравенства на $\|B\| \cdot \|X\|$, получим искомую связь:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta B\|}{\|B\|} = condA \cdot \frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}. \tag{3.5}$$

Число $condA = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ называется ***числом (мерой) обусловленности матрицы*** A системы (3.2) (так как A есть неособенная матрица, то $condA > 0$).

Число обусловленности $condA$ служит также коэффициентом роста относительных погрешностей при неточном (приближенном) задании элементов матрицы A системы (3.2). Пусть матрица A получила возмущение ΔA и $X + \Delta X$ есть решение возмущенной системы

$$(A + \Delta A)(X + \Delta X) = B.$$

Учитывая, что $AX = B$, получаем

$$(A + \Delta A)(X + \Delta X) = B \Leftrightarrow \underbrace{AX}_{=B} + (A + \Delta A)\Delta X + \Delta A \cdot X = B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A + \Delta A)\Delta X = -\Delta A \cdot X.$$

Рассуждая как и выше, получаем неравенства

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le condA \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A + \Delta A\|}, \quad \frac{\|\Delta X\|}{\|X + \Delta X\|} \le condA \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}. \tag{3.6}$$

Неравенства (3.5), (3.6) показывают, что чем больше число обусловленности $condA = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ матрицы, тем сильнее сказывается на решении линейной системы ошибка в исходных данных. Например, если $condA = O\left(10^{p}\right)$ и исходные данные имеют погрешность в l-м знаке после запятой, то независимо от способа решения системы (3.2) в результате можно гарантировать не более $l - p$ верных знаков после запятой.

Если число обусловленности $condA$ достаточно велико, то система (3.2) считается ***плохо обусловленной***.

При этом следует иметь в виду, что число $condA$ всегда не меньше единицы:

$$condA = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \|A \cdot A^{-1}\| = \|E\| = 1$$

(норма единичной матрицы E равна единице вне зависимости от выбранной нормы). Известна также и верхняя граница для числа обусловленности, превышение которой при решении системы (3.2) численным способом (или на ЭВМ) может привести к заведомо ложному результату. Так, решение считается ненадежным, если $condA \geq (macheps)^{-1}$ (здесь $macheps$ – так называемый машинный эпсилон).

На практике матрицу A считают плохо обусловленной, если ее число обусловленности $condA > 10^4$.

Типичным примером плохо обусловленной матрицы является матрица Гильберта вида

$$\mathbf{H}_n = \left(h_{ij}\right)_{i,j=1}^{n} = \left(\frac{1}{i + j - 1}\right)_{i,j=1}^{n},$$

для которой имеет место большой рост числа обусловленности с ростом n размерности этой матрицы. Например, уже при $n = 6$ $cond\mathbf{H}_6 = 29070279$, а при $n = 8$ $cond\mathbf{H}_8 = 33872791095 > 10^{10}$.

В случае если коэффициенты матрицы A есть числа с плавающей точкой, то число обусловленности можно найти по формуле Дж. Ортеги

$$condA = \frac{\det A}{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^{2}\right)^{1/2}}.$$

Вернемся к системе из двух линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 11, \\ 100x_1 + 1001x_2 = 1101. \end{cases}$$

Найдем число обусловленности матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 10\\ 100 & 1001\end{pmatrix}$. При этом обратная матрица $A^{-1}=\begin{pmatrix}1001 & -10\\ -100 & 1\end{pmatrix}$. В качестве нормы выберем строчную норму $\|A\|_r=\max\limits_{1\le i\le m}\left\{\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\}$. Тогда получим

$\|A\|=\max\{11,\ 1101\}=1101,$

$\|A^{-1}\|=\max\{1011,\ 101\}=1011,$

$condA=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|=1101\cdot1011=1113111.$

Далее, учитывая, что в нашем примере

$B=\begin{pmatrix}11\\ 1101\end{pmatrix}$, $\Delta B=\begin{pmatrix}0{,}01\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{matrix}\|B\|=\max\{11,\ 1101\}=1101,\\ \|\Delta B\|=\max\{0{,}01;\ 0\}=0{,}01,\end{matrix}$

на основании неравенства (3.5) получим оценку (по норме) относительной погрешности решения этой системы в соответствующей l_∞-норме вектор-столбца

$$\delta_X=\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}\le condA\cdot\frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}=1113111\cdot\frac{0{,}01}{1101}=10{,}11.$$

Далее, так как норма решения $X=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T$ равна $\|X\|=1$, то оценка абсолютной погрешности $\|\Delta X\|$ решения $\|\Delta X\|=\|X\|\cdot\delta_X\le1\cdot10{,}11=10{,}11.$

Заметим, что решение $X+\Delta X=\begin{pmatrix}11{,}01 & 0\end{pmatrix}^T$ с нормой $\|X+\Delta X\|=11{,}01$ возмущенной системы

$$\begin{cases}x_1+10x_2=11{,}01,\\ 100x_1+1001x_2=1101\end{cases}$$

вписывается в общую оценку: $\|X+\Delta X\|\le\|X\|+\|\Delta X\|=1+10{,}11=11{,}11.$

На данном примере плохо обусловленной системы уравнений можно наглядно убедиться, что малость вектор-столбца $\Delta B=\begin{pmatrix}0{,}01 & 0\end{pmatrix}^T$ плохо обусловленной системы не говорит о близости точного решения возмущенной системы к точному решению исходной (невозмущенной) системы.

3.4. Переопределенные системы линейных алгебраических уравнений

Иногда приходится решать системы, в которых число уравнений больше числа неизвестных. Такие системы называются ***переопределенными***. Пусть в системе (3.2) по-прежнему $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$ – вещественная $m\times n$-матрица, $m>n$ (число уравнений больше числа неизвестных), $B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \dots & b_m\end{pmatrix}^T$ – вектор-столбец свободных коэффициентов,

$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ – вектор-столбец неизвестных. Будем также полагать, что система (3.1) несовместна [$rangA \neq rang\left(A|b\right)$].

Введем невязку $r = AX - B$. Так как система (3.1) несовместна, то невязка не равна нулевому вектору. Будем искать решение
$X^* = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ системы, минимизирующее норму невязки:

$$(r,r) = r^T \cdot r = \left(AX - B\right)^T \cdot \left(AX - B\right) \to \min. \qquad (3.7)$$

Решение $X^* = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ задачи (3.7), при котором функция (r,r) принимает наименьшее значение, называется ***квазирешением.***

В качестве дополнительного условия может использоваться близость квазирешения к некоторому вектору X_0, то есть решают более общую задачу

$$\left(AX - B\right)^T \cdot \left(AX - B\right) + \alpha\left(X - X_0\right)^T \cdot \left(X - X_0\right) \to \min, \qquad (3.8)$$

где $\alpha \in \mathbf{R}$ – некоторое достаточно малое число. Решение задачи (3.8) называется ***нормальным решением.*** Непосредственно доказывается, что нормальное решение удовлетворяет системе уравнений

$$\left(A^T A + \alpha E\right)x = A^T B + \alpha X_0. \qquad (3.9)$$

При этом матрица $A^T A$ есть симметрическая и положительно определенная квадратная матрица n-го порядка. Число α можно подобрать так, что матрица $A^T A + \alpha E$ будет неособенной матрицей, а значит, система (3.9) будет иметь единственное нормальное решение

$$X^* = \left(A^T A + \alpha E\right)^{-1} \cdot \left(A^T B + \alpha X_0\right). \qquad (3.10)$$

В частном случае, если $\alpha = 0$, то нормальное решение имеет вид

$$x^* = \left(A^T A\right)^{-1} \cdot A^T B. \qquad (3.11)$$

Пример 3.4. Рассмотрим систему с малым параметром $\varepsilon \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + (\varepsilon - 1)x_2 = \varepsilon, \\ -x_1 + x_2 = 0, \\ (\varepsilon + 1)x_1 - x_2 = -\varepsilon, \end{cases}$$

в которой $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon - 1 \\ -1 & 1 \\ 1+\varepsilon & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ -\varepsilon \end{pmatrix}$.

Данная система несовместна, так как если взять первые два уравнения

$$\begin{cases} x_1 + (\varepsilon - 1)x_2 = \varepsilon, \\ -x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

то решением является $X^{(1)} = (1;\ 1)^T$, а если взять систему из 2-го, 3-го уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0, \\ (\varepsilon+1)x_1 - x_2 = -\varepsilon, \end{cases}$$

то решением является $X^{(2)} = (-1;\ -1)^T$. Матрицы в системе (3.9) имеют вид

$$A^T A = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 + 2\varepsilon + 3 & -3 \\ -3 & \varepsilon^2 - 2\varepsilon + 3 \end{pmatrix},\ A^T B = \begin{pmatrix} -\varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 \end{pmatrix},$$

причем матрица $A^T A$ плохо обусловлена, так как ее определитель $\det A^T A = \varepsilon^4 + 2\varepsilon^2$ близок к нулю при малых значениях ε. Так, например, если при $\varepsilon = 0{,}2$ число обусловленности матрицы $A^T A$ равно 508,25, то при $\varepsilon = 0{,}1$ число обусловленности матрицы $A^T A$ равно 1918,6.

Но, несмотря на плохую обусловленность матрицы $A^T A$, нормальное решение системы (3.9) легко находится уже при $\alpha = 0$ по формуле (3.11):

$$X^* = \left(A^T A\right)^{-1} \cdot A^T B = \frac{1}{\varepsilon^4 + 2\varepsilon^2} \begin{pmatrix} \varepsilon^2 - 2\varepsilon + 3 & 3 \\ 3 & \varepsilon^2 + 2\varepsilon + 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \dfrac{1 - 0{,}5\varepsilon}{1 + 0{,}5\varepsilon^2} \\ \varepsilon \dfrac{1 + 0{,}5\varepsilon}{1 + 0{,}5\varepsilon^2} \end{pmatrix}.$$

Применив разложение в ряд Маклорена по степеням ε (в пакете символьной алгебры Maple), получим нормальное решение в виде

$$x^* = \begin{pmatrix} \varepsilon - \dfrac{1}{2}\varepsilon^2 - \dfrac{1}{2}\varepsilon^3 + \dfrac{1}{4}\varepsilon^4 + o\left(\varepsilon^4\right) \\ \varepsilon + \dfrac{1}{2}\varepsilon^2 - \dfrac{1}{2}\varepsilon^3 - \dfrac{1}{4}\varepsilon^4 + o\left(\varepsilon^4\right) \end{pmatrix}.$$

При малых значениях ε можно положить, что $X^* \approx (\varepsilon;\ \varepsilon)^T$, что вполне логично лежит между $X^{(1)}$, $X^{(2)}$.

Теперь найдем нормальное решение системы, если в качестве дополнительного условия возьмем близость квазирешения к вектору $X_0 = (1\ \ 1)^T$. Приняв $\alpha = 1$, найдем решение по формуле (3.10). В данном случае имеем

$$A^T A + \alpha E = \begin{pmatrix} (\varepsilon+1)^2 + 3 & -3 \\ -3 & (\varepsilon-1)^2 + 3 \end{pmatrix},\ \ A^T B + \alpha X_0 = \begin{pmatrix} -\varepsilon^2 + 1 \\ \varepsilon^2 + 1 \end{pmatrix},$$

причем $\det\left(A^T A + \alpha E\right) = \varepsilon^4 + 4\varepsilon^2 + 7$, что говорит о хорошей обусловленности системы, нормальное решение имеет вид

$$x^* = \left(A^T A + \alpha E\right)^{-1} \cdot \left(A^T B + \alpha X_0\right) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\varepsilon^4 - 2\varepsilon^3 + 2\varepsilon - 7}{\varepsilon^4 + 4\varepsilon^2 + 7} \\ \dfrac{\varepsilon^4 + 2\varepsilon^3 + 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 7}{\varepsilon^4 + 4\varepsilon^2 + 7} \end{pmatrix}.$$

Применив разложение в ряд Маклорена по степеням ε (в пакете символьной алгебры Maple), получим нормальное решение в виде

$$x^* = \begin{pmatrix} 1-\frac{2}{7}\varepsilon-\frac{4}{7}\varepsilon^2+\frac{22}{49}\varepsilon^3+\frac{2}{49}\varepsilon^4+o\left(\varepsilon^4\right) \\ 1+\frac{2}{7}\varepsilon-\frac{2}{7}\varepsilon^2+\frac{6}{49}\varepsilon^3+\frac{8}{49}\varepsilon^4+o\left(\varepsilon^4\right) \end{pmatrix}.$$

Как видно, при малых значениях ε нормальное решение системы достаточно мало отличается от вектора $X_0 = X^{(1)}$.

3.5. Нормальные СЛАУ

Определение 3.1. Система $AX = B$ и ее основная матрица A называются ***нормальными***, если:

1) $A^T = A$, т.е. матрица A симметричная;

2) матрица A положительно определена: при всех $X \in \mathbf{R}^n$: $X \neq 0 \;\Rightarrow\; X^T AX > 0$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. Если обе части СЛАУ $AX = B$ с невырожденной матрицей A умножить слева на транспонированную матрицу A^T, то полученная СЛАУ

$$\left(A^T A\right)X = A^T B \tag{3.12}$$

будет нормальной.

Доказательство. 1. Докажем, что матрица $A^T A$ симметричная, т.е. $\left(A^T A\right)^T = A^T A$. Имеем $\left(A^T A\right)^T = A^T\left(A^T\right)^T = A^T A$.

2. Докажем теперь положительную определенность матрицы $A^T A$, т.е. при всех $X \in \mathbf{R}^n$ $X \neq 0 \;\Rightarrow\; X^T A^T AX > 0$. Имеем

$$X^T A^T AX = (AX)^T (AX) = Y^T Y. \tag{3.13}$$

Здесь $Y = AX$. По условию теоремы матрица A является невырожденной, $X \neq 0$, поэтому $Y = AX \neq 0$ и, как следствие, $\mathrm{Y}^\mathrm{T}\mathrm{Y} > 0$. Отсюда с учетом (3.13) следует, что $\forall X \in R^n :\; X \neq 0 \;\Rightarrow\; X^T A^T AX > 0$.

Требования симметричности и положительной определенности основной матрицы СЛАУ являются достаточно ограничительными. Однако в практике решения прикладных математических задач часто встречаются СЛАУ именно с такими основными матрицами - симметричными и положительно определенными, то есть нормальные СЛАУ. Для их решения можно и целесообразно использовать метод квадратных корней, который рассматривается в следующих пунктах.

3.6. Примеры решения задач

Пример 3.5. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=5, \\ -3x_1-x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_1+4x_2-5x_3 \qquad =-6, \\ 3x_1+7x_2-6x_3+4x_4=-1 \end{cases}$$

методом Гаусса с помощью частичного выбора ведущего элемента.

Решение. На первом шаге в первом активном столбце $\begin{pmatrix}2 & -3 & 1 & 3\end{pmatrix}^T$ расширенной матрицы $(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ -3 & -1 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 4 & -5 & 0 & -6 \\ 3 & 7 & -6 & 4 & -1 \end{array}\right)$ системы ведущим элементом выберем элемент $a_{21}=-3$ ($3=\max\{2,\ 3,\ 1,\ 3\}$). Применяя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы системы, получаем

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ -3 & -1 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & 4 & -5 & 0 & -6 \\ 3 & 7 & -6 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-3} & -1 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -5 & 0 & -6 \\ 3 & 7 & -6 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[I\cdot 1+IV]{I\cdot(2/3)+II,\ I\cdot(1/3)+III,} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-3} & -1 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & \frac{7}{3} & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{23}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} & -4 & -\frac{4}{3} & -\frac{14}{3} \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-3} & -1 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & -5 & 23 \\ 0 & 11 & -12 & -4 & -14 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

На втором шаге активным столбцом является столбец $\begin{pmatrix}7 \\ 11 \\ 2\end{pmatrix}$ активной подматрицы $\begin{pmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 11 & -12 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ведущим элементом выберем $11=\max\{11,\ 7,\ 2\}$.

Применяя элементарные преобразования над строками, получаем на втором шаге:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-3} & -1 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & -5 & 23 \\ 0 & \boxed{11} & -12 & -4 & -14 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II \leftrightarrow III} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-3} & -1 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & \boxed{11} & -12 & -4 & -14 \\ 0 & 7 & 3 & -5 & 23 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[II\cdot(-2/11)+IV]{II\cdot(-7/11)+III,} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-3} & -1 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & \boxed{11} & -12 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & \frac{117}{11} & -\frac{27}{11} & \frac{351}{11} \\ 0 & 0 & \frac{13}{11} & \frac{8}{11} & \frac{39}{11} \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\mathbf{-3}} & -1 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & \boxed{\mathbf{11}} & -12 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & 13 & -3 & 39 \\ 0 & 0 & 13 & 8 & 39 \end{array}\right).$$

На третьем шаге активным столбцом является столбец $\begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix}$ активной подматрицы $\begin{pmatrix} 13 & -3 \\ 13 & 8 \end{pmatrix}$. Ведущим элементом выберем элемент $13 = \max\{13,\ 13\}$. Применяя элементарные преобразования над строками, получаем на третьем шаге ступенчатую матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\mathbf{-3}} & -1 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & \boxed{\mathbf{11}} & -12 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & \boxed{\mathbf{13}} & -3 & 39 \\ 0 & 0 & 13 & 8 & 39 \end{array}\right) \xrightarrow{III+IV} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{\mathbf{-3}} & -1 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & \boxed{\mathbf{11}} & -12 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & \boxed{\mathbf{13}} & -3 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Переходя к обратному ходу метода Гаусса, получаем искомое решение

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ \qquad 11x_2 - 12x_3 - 4x_4 = -14, \\ \qquad\qquad 13x_3 - 3x_4 = 39, \\ \qquad\qquad\qquad 5x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{4 + x_2 - 3x_3 + 4x_4}{-3} = \dfrac{4 + 2 - 3\cdot 3 + 4\cdot 0}{-3} = 1, \\ x_2 = \dfrac{-14 + 12x_3 + 4x_4}{11} = \dfrac{-14 + 12\cdot 3 + 4\cdot 0}{11} = 2, \\ x_3 = \dfrac{39 + 3x_4}{13} = \dfrac{39 + 3\cdot 0}{13} = 3, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Пример 3.6. Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -7, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -1, \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

методом Гаусса с помощью полного выбора ведущего элемента.

Решение. На первом шаге ведущим элементом будет $a_{13} = -5$, равный наибольшему по модулю из всех элементов основной матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 & \boxed{\mathbf{-5}} \\ 3 & -5 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ системы уравнений. Тогда, применяя элементарные преобразования, получаем

$$\left(A|B\right)=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & \boxed{-5} & -7 \\ 3 & -5 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\end{array} \to \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-5} & 3 & 2 & -7 \\ 2 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\end{array} \xrightarrow{\substack{I\cdot\left(\frac{2}{5}\right)+II, \\ I\cdot\left(\frac{1}{5}\right)+III}} \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-5} & 3 & 2 & -7 \\ 0 & -\frac{19}{5} & \frac{19}{5} & -\frac{19}{5} \\ 0 & \frac{13}{5} & -\frac{18}{5} & \frac{8}{5} \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\end{array} \to$$

$$\to \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-5} & 3 & 2 & -7 \\ 0 & -19 & 19 & -19 \\ 0 & 13 & -18 & 8 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\end{array}.$$

На втором шаге при помощи полного выбора активной подматрицей является матрица $\begin{pmatrix} \boxed{-19} & 19 \\ 13 & -18 \end{pmatrix}$. Ведущим элементом определяем элемент -19. На втором шаге прямого хода метода Гаусса получаем ступенчатую матрицу

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-5} & 3 & 2 & -7 \\ 0 & \boxed{-19} & 19 & -19 \\ 0 & 13 & -18 & 8 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\end{array} \xrightarrow{II\cdot\left(\frac{13}{19}\right)+III} \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-5} & 3 & 2 & -7 \\ 0 & \boxed{-19} & 19 & -19 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\end{array}.$$

Применяя обратный ход Гаусса, получаем

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-5} & 3 & 2 & -7 \\ 0 & \boxed{-19} & 19 & -19 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\end{array} \begin{cases} -5x_3+3x_2+2x_1=-7, \\ -19x_2+19x_1=-19, \\ -5x_1=-5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3=\dfrac{-7-3x_2-2x_1}{-5}=\dfrac{-7-3\cdot 2-2\cdot 1}{-5}=3, \\ x_2=\dfrac{-19-19x_1}{-19}=\dfrac{-19-19\cdot 1}{-19}=2, \\ x_1=1. \end{cases}$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^T$.

Пример 3.7. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 10x_1-9x_2=19, \\ -111x_1+100x_2=-211. \end{cases}$$

Найти решение этой системы, число обусловленности матрицы системы. Найти решение соответствующей возмущенной СЛАУ при замене вектор-столбца $B=\begin{pmatrix} 19 \\ -211 \end{pmatrix}$ на вектор-столбец $B^*=B+\Delta B=\begin{pmatrix} 18{,}99 \\ -211 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем число обусловленности матрицы $A=\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -111 & 100 \end{pmatrix}$.

При этом обратная матрица $A^{-1}=\begin{pmatrix} 100 & 9 \\ 111 & 10 \end{pmatrix}$. В качестве матричной нормы

выберем строчную норму $\|A\|_r = \max\limits_{1\le i\le m}\left\{\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\}$. Тогда
$\|A\| = \max\{19,\ 211\} = 211$,
$\|A^{-1}\| = \max\{109,\ 121\} = 121$. Так как число обусловленности матрицы $condA = \|A\|\cdot\|A^{-1}\| = 211\cdot 121 = 25531 > 10^4$, то матрица (значит, и система) считается плохо обусловленной.

Решения исходной системы уравнений и соответствующей возмущенной системы

$$\begin{cases}10x_1 - 9x_2 = 18{,}99,\\ -111x_1 + 100x_2 = -211.\end{cases}$$

находим матричным способом:

$$X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix}100 & 9\\ 111 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}19\\ -211\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},$$

$$X^* = A^{-1}\cdot(B+\Delta B) = \begin{pmatrix}100 & 9\\ 111 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}18{,}99\\ -211\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}100\cdot 18{,}99 - 9\cdot 211\\ 111\cdot 18{,}99 - 10\cdot 211\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -2{,}11\end{pmatrix}.$$

На данном примере плохо обусловленной системы уравнений можно убедиться, что малость вектор-столбца $\Delta B = B^* - B = (-0{,}01\quad 0)^T$ плохо обусловленной системы не говорит о близости решения возмущенной системы к решению исходной (невозмущенной) системы.

Учитывая, что $\|B\| = \max\{19,\ 211\} = 211$, $\|\Delta B\| = \max\{0{,}01;\ 0\} = 0{,}01$, на основании неравенства (3.5) получим оценку (по норме) относительной погрешности решения системы в соответствующей l_∞ -норме вектор-столбца

$$\delta_X = \frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le condA\cdot\frac{\|\Delta B\|}{\|B\|} = 25531\cdot\frac{0{,}01}{211} = 1{,}21.$$

Далее, так как норма решения $X = (1\quad -1)^T$ исходной системы равна $\|X\| = 1$, то оценка абсолютной погрешности $\|\Delta X\|$ решения имеет вид
$\|\Delta X\| = \|X\|\cdot\delta_X \le 1\cdot 1{,}21 = 1{,}21$.

Заметим, что для решения $X^* = X + \Delta X = (0\quad -2{,}11)^T$ возмущенной системы

$$\begin{cases}10x_1 - 9x_2 = 18{,}99,\\ -111x_1 + 100x_2 = -211\end{cases}$$

с нормой $\|X^*\| = 2{,}11$ выполняется оценка
$\|X^*\| = \|X + \Delta X\| \le \|X\| + \|\Delta X\| = 1 + 1{,}21 = 2{,}21$.

Пример 3.8. Рассмотрим систему с малым параметром $\varepsilon \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + (\varepsilon - 1)x_2 = 1, \\ \varepsilon x_1 + x_2 = \varepsilon, \\ (\varepsilon + 1)x_1 - \varepsilon x_2 = -\varepsilon^2, \end{cases}$$

в которой $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon - 1 \\ \varepsilon & 1 \\ \varepsilon + 1 & -\varepsilon \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ -\varepsilon^2 \end{pmatrix}$.

Данная система несовместна, так как если взять первые два уравнения

$$\begin{cases} x_1 + (\varepsilon - 1)x_2 = 1, \\ \varepsilon x_1 + x_2 = \varepsilon, \end{cases}$$

то ее решением является $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, а если взять систему из 2-го,3-го уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = \varepsilon, \\ (\varepsilon + 1)x_1 - \varepsilon x_2 = -\varepsilon^2, \end{cases}$$

то ее решением является $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \end{pmatrix}^T$. Матрицы в системе (3.9) имеют вид

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 2 & \varepsilon - 1 - \varepsilon^2 \\ \varepsilon - 1 - \varepsilon^2 & 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 2 \end{pmatrix}, \; A^T B = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon^3 \\ \varepsilon^3 + 2\varepsilon - 1 \end{pmatrix},$$

причем матрица $A^T A$ хорошо обусловлена, так как ее определитель $\det\left(A^T A\right) = 3\varepsilon^4 + 2\varepsilon^3 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon + 3$ близок к числу 3 при малых значениях параметра ε.

Нормальное решение системы при $\alpha = 0$ находится по формуле (3.11):

$$x^* = \left(A^T A\right)^{-1} \cdot A^T b = \frac{1}{\det\left(A^T A\right)} \begin{pmatrix} 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 2 & \varepsilon^2 - \varepsilon + 1 \\ \varepsilon^2 - \varepsilon + 1 & 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon^3 \\ \varepsilon^3 + 2\varepsilon - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{\varepsilon^3 - 2\varepsilon - 1}{3\varepsilon^2 + 5\varepsilon + 3} \\ \dfrac{\left(\varepsilon^3 + 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon - 1\right)\left(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1\right)}{3\varepsilon^4 + 2\varepsilon^3 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon + 3} \end{pmatrix}.$$

Применив разложение в ряд Маклорена по степеням ε (в пакете символьной алгебры Maple), получим нормальное решение

$$x^* = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9}\varepsilon - \dfrac{14}{27}\varepsilon^2 + \dfrac{34}{81}\varepsilon^3 - \dfrac{44}{243}\varepsilon^4 + o\left(\varepsilon^4\right) \\ -\dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{9}\varepsilon + \dfrac{20}{27}\varepsilon^2 + \dfrac{98}{81}\varepsilon^3 - \dfrac{22}{243}\varepsilon^4 + o\left(\varepsilon^4\right) \end{pmatrix}.$$

В приведенной ниже таблице показано поведение нормального решения $X^* = \left(x_1^* \quad x_2^*\right)^T$ системы при различных значениях параметра ε (вычисления проводились в пакете символьной алгебры Maple):

Параметр ε	$\det\left(A^T A\right)$	$cond\left(A^T A\right)$	x_1^*	x_2^*
0,5	4,6875	3,8533	0,3	0,23(3)
0,4	4,1648	3,614675	0,31679	0,06892
0,3	3,7683	3,382135	0,32977	-0,07119
0,2	3,4608	3,184928	0,33786	-0,18345
0,1	3,2123	3,049808	0,33966	-0,26918
0,05	3,10277	3,012892	0,33764	-0,30355
0,01	3,0201	3,00053	0,33439	-0,32771

3.7. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод квадратных корней

3.7.1. Идея метода квадратных корней

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$AX = B \tag{3.14}$$

с симметричной основной матрицей $A = \left(a_{ij}\right)$ n-го порядка ($A = A^T$), вектор-столбцом $B = \left(b_1 \quad b_2 \ldots \ b_n\right)^T$ свободных членов и вектор-столбцом $X = \left(x_1 \quad x_2 \ldots \ x_n\right)^T$ неизвестных.

Представим матрицу A в виде произведения двух треугольных матриц

$$A = R^T R, \tag{3.15}$$

где R – верхняя треугольная матрица, а R^T – транспонированная к ней, т.е.

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & r_{nn} \end{pmatrix}, \quad R^T = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ r_{12} & r_{22} & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ r_{1n} & r_{2n} & \ldots & r_{nn} \end{pmatrix}.$$

Разложение (3.15) матрицы A в произведение $R^T R$ называется ***факторизацией*** матрицы A (возможно оно, как будет показано ниже, если $r_{ii} \neq 0$).

С учетом (3.15) СЛАУ (3.14) принимает следующий вид

$$\left(R^T R\right) X = B.$$

Используя свойство ассоциативности произведения матриц, можем записать $R^T\left(RX\right) = B.$ Введем обозначение $RX = Y.$ В результате СЛАУ (3.14) будет эквивалентна двум системам с треугольными матрицами:

$$AX = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} R^T Y = B, \\ RX = Y. \end{cases}$$

Решая первую систему $R^T Y = B$, находим вспомогательный вектор Y – вектор-столбец свободных членов для второй системы $RX = Y$. Решая систему $RX = Y$ (при известном вектор-столбце Y), находим искомый вектор-столбец X.

Таким образом, для решения СЛАУ (3.14) с симметричной матрицей A необходимо:

1) осуществить факторизацию матрицы A: $A = R^T R$,

2) решить последовательно две СЛАУ с треугольными матрицами:

$$\begin{cases} R^T Y = B, \\ RX = Y. \end{cases}$$

3.7.2. Факторизация матрицы A

Из условия (3.15) $R^T R = A$:

$$R^T R = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & \dots & 0 \\ r_{12} & r_{22} & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ r_{1n} & r_{2n} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & r_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11}^2 & r_{11}r_{12} & \dots & r_{11}r_{1n} \\ r_{11}r_{12} & r_{12}^2 + r_{22}^2 & \dots & r_{12}r_{1n} + r_{22}r_{2n} \\ . \quad . & . & . & . \\ r_{11}r_{1n} & r_{12}r_{1n} + r_{22}r_{2n} & \dots & r_{1n}^2 + r_{2n}^2 + \dots + r_{nn}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

получаем систему $\frac{n(n+1)}{2}$ уравнений для нахождения $\frac{n(n+1)}{2}$ элементов r_{ij} $\left(i = \overline{1,n}; j = \overline{i,n}\right)$ матрицы R:

$$\begin{cases} r_{11}^2 = a_{11}, \; r_{11}r_{1j} = a_{1j} \quad \left(j = \overline{2,n}\right), \\ r_{12}^2 + r_{22}^2 = a_{22}, \; r_{12}r_{1j} + r_{22}r_{2j} = a_{2j} \quad \left(j = \overline{3,n}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_{1k}^2 + r_{2k}^2 + \dots + r_{k-1,k}^2 + r_{kk}^2 = a_{kk}, \\ r_{1k}r_{1j} + r_{2k}r_{2j} + \dots + r_{kk}r_{kj} = a_{kj} \quad \left(j = \overline{k,n}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_{1n}^2 + r_{2n}^2 + \dots + r_{n-1,n}^2 + r_{nn}^2 = a_{nn}. \end{cases} \tag{3.16}$$

Из системы (3.16) последовательно находим коэффициенты матрицы R:

$$
\begin{cases}
r_{11} = \sqrt{a_{11}}; \quad r_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{r_{11}} \quad \left(j = \overline{2,n}\right), \\
r_{22} = \sqrt{a_{22} - r_{12}^2}; \quad r_{2j} = \dfrac{a_{2j} - r_{12}r_{1j}}{r_{22}} \quad \left(j = \overline{3,n}\right) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
r_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \left(r_{1k}^2 + r_{2k}^2 + \ldots + r_{k-1,k}^2\right)}, \\
r_{kj} = \dfrac{a_{kj} - \left(r_{1k}r_{1j} + r_{2k}r_{2j} + \ldots + r_{k-1,k}r_{k-1,j}\right)}{r_{kk}}, \quad \left(k = \overline{3, n-1}, j > k\right) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
r_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \left(r_{1n}^2 + r_{2n}^2 + \ldots + r_{n-1,n}^2\right)}.
\end{cases}
\tag{3.17}
$$

Из (3.17) следует, что система уравнений (3.16) однозначно разрешима, если $r_{kk} \neq 0 \ \left(k = \overline{1, n-1}\right)$. Это в свою очередь, есть достаточное условие существования и единственности решения системы (3.14). Действительно, в этом случае

$$\det A = \det\left(R^T R\right) = \det R^T \cdot \det R = r_{11}^2 \cdot r_{22}^2 \cdot \ldots \cdot r_{nn}^2$$

и если при всех $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $r_{kk} \neq 0$, то $\det A \neq 0$, $rg(A|B) = rg(A) = n$ и в соответствии с теоремой Кронекера-Капелли СЛАУ (3.14) совместна и имеет единственное решение.

Формулы (3.17) не очень удобны для запоминания. Целесообразно пользоваться векторной формой записи этих формул для произвольного числа $k \in \{2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$.

Введем обозначения (арифметические вектор-строки)

$$\overline{r_k} = \left(r_{1k}, r_{2k}, \ldots, r_{k-1,k}\right), \quad \overline{r_j} = \left(r_{1j},\ r_{2j},\ \ldots,\ r_{k-1,j}\right) \tag{3.18}$$

Здесь $\overline{r_k}$ – вектор-строка элементов k-го столбца матрицы R, расположенных в строках с номерами 1, 2, …, $k-1$ (выделены жирным шрифтом в матрице R). Аналогично определяется $\overline{r_j}$ – вектор-строка элементов j-го столбца $\left(j \in \{k+1, k+2, \ldots, n\}\right)$, расположенных в первых $(k-1)$ -ой строках (также выделены жирным шрифтом).

$$
R = \begin{pmatrix}
r_{11} & r_{12} & \ldots & \mathbf{r_{1k}} & \ldots & \mathbf{r_{1j}} & \ldots & r_{1n} \\
0 & r_{22} & \ldots & \mathbf{r_{2k}} & \ldots & \mathbf{r_{2j}} & \ldots & r_{2n} \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & \mathbf{r_{k-1,k}} & \ldots & \mathbf{r_{k-1,j}} & \ldots & r_{k-1,n} \\
0 & 0 & \ldots & r_{kk} & \ldots & r_{kj} & \ldots & r_{kn} \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & r_{jj} & \ldots & r_{jn} \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & \ldots & 0 & . & 0 & \ldots & r_{nn}
\end{pmatrix}.
$$

Тогда из (3.17) и (3.18) следует

$$\begin{cases} r_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \left(\overline{r_k}, \overline{r_k}\right)}, \quad k = \overline{2,n}, \\ r_{kj} = \dfrac{a_{kj} - \left(\overline{r_k}, \overline{r_j}\right)}{r_{kk}}, \quad j = \overline{k+1,n}, \end{cases} \tag{3.19}$$

где $\left(\overline{r_k}, \overline{r_k}\right) = r_{1k}^2 + r_{2k}^2 + \ldots + r_{k-1,k}^2$, $\left(\overline{r_k}, \overline{r_j}\right) = r_{1k} r_{1j} + r_{2k} r_{2j} + \ldots + r_{k-1,k} r_{k-1,j}$ есть скалярные произведения арифметических вектор-строк $\overline{r_k} = \left(r_{1k}, r_{2k}, \ldots, r_{k-1,k}\right), \overline{r_j} = \left(r_{1j}, r_{2j}, \ldots, r_{k-1,j}\right)$.

Выясним, при каких дополнительных условиях действительная матрица A $\left(a_{ij} \in \mathbf{R}\right)$ раскладывается в произведение $R^T R$ с действительной матрицей R. Из формул (3.17) следует, что комплексные элементы r_{ij} в матрице R могут появиться, если среди чисел a_{11}, $a_{kk} - \left(r_{1k}^2 + r_{2k}^2 + \ldots + r_{k-1,k}^2\right) = r_{kk}^2$ $\left(k = \overline{2,n}\right)$ есть хотя бы одно отрицательное число.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. Действительная матрица А раскладывается в произведение $R^T R$ с действительной матрицей R тогда и только тогда, когда матрица А определена положительно.

Доказательство. Введем обозначения

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ . & . & . & . \\ a_{1k} & a_{2k} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad R_k = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1k} \\ 0 & r_{22} & \ldots & r_{2k} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & r_{kk} \end{pmatrix}.$$

Матрицы A_k и R_k являются подматрицами порядка k матриц A и R соответственно, расположенными в левых верхних углах этих матриц. Легко установить, что если имеет место разложение $A = R^T R$, то и $A_k = R_k^T R_k$. При этом

$$\begin{aligned} \det A &= \det\left(R^T R\right) = \det\left(R^T\right) \cdot \det\left(R\right) = \prod_{i=1}^{n} r_{ii}^2, \\ \det A_k &= \det\left(R_k^T R_k\right) = \det R_k^T \cdot \det R_k = \prod_{i=1}^{k} r_{ii}^2. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Обозначим через $\Delta_k = \det A_k$ угловой минор матрицы A. Из (3.20) с учетом (3.16) последовательно получаем

$\Delta_1 = \det A_1 = a_{11} = r_{11}^2$,

$\Delta_2 = \det A_2 = \det R_2^T \cdot \det R_2 = r_{11}^2 \cdot r_{22}^2 = \Delta_1 \cdot r_{22}^2$,

$\Delta_3 = \det A_3 = \det R_3^T \cdot \det R_3 = r_{11}^2 \cdot r_{22}^2 \cdot r_{33} = \left| r_{11}^2 \cdot r_{22}^2 = \Delta_2 \right| = \Delta_2 \cdot r_{33}$,

……………………………………………………………..

$\Delta_n = \det A_n = \det R_n^T \cdot \det R_n = r_{11}^2 \cdot r_{22}^2 \ldots \cdot r_{nn}^2 = \left| r_{11}^2 \cdot r_{22}^2 \ldots \cdot r_{n-1,n-1}^2 = \Delta_{n-1} \right| = \Delta_{n-1} \cdot r_{nn}$,

откуда получаем, что $r_{11}^2 = a_{11} = \Delta_1$, $\quad r_{kk}^2 = \dfrac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$ $\left(k = \overline{2,n}\right)$.

Последние равенства позволяют сделать искомый вывод: если числа r_{kk}^2 $\left(k=\overline{1,n}\right)$, положительны, то и все угловые миноры Δ_k $\left(k=\overline{1,n}\right)$ положительны, что, как известно, равносильно положительной определенности матрицы A, и наоборот – из положительности угловых миноров Δ_k $\left(k=\overline{1,n}\right)$ следует положительность чисел r_{kk}^2. Теорема доказана.

Таким образом, положительная определенность симметричной матрицы A обеспечивает существование действительных значений корней $\sqrt{a_{11}}$, $\sqrt{a_{kk}-\left(r_{1k}^2+r_{2k}^2+\ldots+r_{k-1,k}^2\right)}$ $\left(k=\overline{2,n}\right)$. В противном случае матрица R будет комплексной $\left(r_{ij}\in\mathbf{C}\right)$, даже если матрица A действительная.

Перейдем теперь к нахождению решений систем $R^TY=B$ и $RX=Y$. Эти системы являются “треугольными“, и потому их решения находятся сразу при помощи обратного хода метода Гаусса:

$$\begin{cases} r_{11}y_1=b_1,\\ r_{12}y_1+r_{22}y_2=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ r_{1n}y_1+r_{2n}y_2+\ldots+r_{nn}y_n=b_n, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=b_1/r_{11},\\ y_2=\dfrac{b_2-r_{12}y_1}{r_{22}},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n=\dfrac{b_n-\sum\limits_{i=1}^{n-1}r_{in}y_i}{r_{nn}}, \end{cases} \tag{3.21}$$

$$\begin{cases} r_{11}x_1+r_{12}x_{21}+\ldots+r_{1n}x_n=y_1,\\ r_{12}x_2+\ldots+r_{2n}x_n=y_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ r_{n-1,n-1}x_{n-1}+r_{n-1,n}x_n=y_{n-1},\\ r_{nn}x_n=y_n, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n=y_n/r_{nn},\\ x_{n-1}=\dfrac{y_{n-1}-r_{n-1,n}x_n}{r_{n-1,n-1}},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_1=\dfrac{y_1-\sum\limits_{j=2}^{n}r_{1j}x_j}{r_{11}}. \end{cases} \tag{3.22}$$

3.7.3. Требуемые ресурсы ЭВМ и число операций

Для хранения коэффициентов a_{ij} [верхнего или нижнего “треугольника”, так как $a_{ij}=a_{ji}$ $\left(\forall i\neq j\right)$], необходимо $n+(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ячеек памяти. В этих же ячейках можно поместить и элементы r_{ij} матрицы R. Еще n ячеек необходимо для хранения коэффициентов b_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ и в них же – коэффициентов векторов Y и X. В результате необходимо $\dfrac{n(n+3)}{2}$ ячеек основной памяти ЭВМ.

Вычисление числа операций. *Здесь и далее символами* $N(\pm)$, $N(*)$, $N(/)$, $N(\sqrt{\ })$ *обозначены соответственно число операций сложения, умножения, деления и извлечения квадратного корня.*

А. **Факторизация матрицы** A [формулы (3.17)]:

1) вычисление коэффициентов r_{kk} $\left(k=\overline{1,n}\right)$:

$$N(\sqrt{\ })=n,\quad N(/)=0,\ N(*)=1+2+\ldots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2},\ N(\pm)=\frac{(n-1)n}{2}; \tag{3.23}$$

2) вычисление коэффициентов r_{kj} $\left(k=\overline{1,n-1},\ j=\overline{k+1,n}\right)$:

$$\begin{cases} N(\sqrt{\ })=0,\ N(/)=(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}, \\ N(*)=1\cdot(n-2)+2\cdot(n-3)+\ldots+(n-2)\cdot 1=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}, \\ N(\pm)=N(*)=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}. \end{cases} \tag{3.24}$$

В формулах (3.24): $1\cdot(n-2)$ – число умножений, необходимое для вычисления коэффициентов r_{2j} $\left(j=\overline{3,n}\right)$; $2\cdot(n-3)$ – число умножений, необходимое для вычисления коэффициентов r_{3j} $\left(j=\overline{4,n}\right)$ и т.д; $(n-2)\cdot 1$ – число умножений, необходимое для вычисления коэффициента $r_{n-1,n}$.

Доказательство. Проведем доказательство формулы для числа $N(*)$ операций умножения:

$$1(n-2)+2(n-3)+3(n-4)+\ldots+(n-2)\cdot 1=(n+2\cdot n+3\cdot n+\ldots+(n-2)\cdot n)-$$
$$-(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-2)\cdot(n-1))=n\cdot(1+2+3+\ldots+n-2)-$$
$$-(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-2)\cdot(n-1))=n\cdot\frac{(n-2)(n-1)}{2}-$$
$$-\left[1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+3\cdot(3+1)+\ldots+(n-2)((n-2)+1)\right]=$$
$$=n\cdot\frac{(n-2)(n-1)}{2}-\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-2)^2\right)-\left(1+2+\ldots+(n-2)\right)=$$
$$=n\cdot\frac{(n-2)(n-1)}{2}-\frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}=$$
$$=\frac{(n-2)(n-1)}{6}(3n-2n+3-3)=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

При выводе формулы (3.24) были использованы следующие очевидные соотношения: $(n-2)=(n-2)(n-(n-1))$, $(n-3)=(n-3)(n-(n-1))$ и формула $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Основные затраты времени ЭВМ при реализации вычислительных операций приходятся на “медленные” операции умножения, деления и нахождения квадратного корня. Общее число таких операций на этапе факторизации матрицы A равно:

$$N\left(\sqrt{\ };*;/\right)=n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=\frac{n^3}{6}+O\left(n^2\right).$$

В. Решение треугольных СЛАУ.

Состав и число операций при решении каждой треугольной системы $R^TY=B$ и $RX=Y$ совпадают. Для одной СЛАУ имеем из (3.21)

$$N(/)=n,\quad N(*)=1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2},\quad N(\pm)=N(*)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

С. Общее число вычислительных операций:

1) медленных

$$N\left(\sqrt{\ };*;/\right)=\frac{n(n+1)(n-2)}{6}+2\left(n+\frac{n(n-1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)(n+8)}{6}==\frac{n^3}{6}+O\left(n^2\right);$$

2) быстрых

$$N\left(\sqrt{\ };*;/\right)=\underbrace{\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}_{\text{Факторизация } A}+\underbrace{2\frac{n(n-1)}{2}}_{\text{Решение СЛАУ}}=\frac{n(n-1)(n+7)}{6}=\frac{n^3}{6}+O\left(n^2\right).$$

3.7.4. Выводы

1. В методе Гаусса число медленных операций равно $\frac{n^3}{3}+O\left(n^2\right)$, в методе квадратных корней $\frac{n^3}{6}+O\left(n^2\right)$. В результате метод квадратных корней быстрее метода Гаусса приблизительно в 2 раза.

2. Метод Гаусса применим для исследования совместности и решения произвольных СЛАУ. Метод квадратных корней применим для решения только “квадратных” СЛАУ с симметричной основной матрицей.

Естественно, требование симметричности основной матрицы системы уравнений существенно сужает область применения метода квадратных корней. Вместе с тем при решении некоторых достаточно широко распространенных задач появляются СЛАУ вида

$$\left(K^TK\right)X=F \tag{3.25}$$

с основной матрицей СЛАУ $A=K^TK$, где $\dim\ K=m\times n$ и $m\le n$. Если матрица K является матрицей полного ранга, т.е. $rgK=m$, то матрица $A=K^TK$ будет ***положительно определенной***. Кроме того, матрица A – симметричная. Поэтому для решения СЛАУ (3.25) ***можно*** и ***целесообразно*** использовать метод квадратных корней.

СЛАУ вида (3.25) появляется, например, в методе наименьших квадратов и при решении интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

Пусть $y_i=a_1x_{1i}+\ldots+a_nx_{ni}+\varepsilon_i$ ($i=\overline{1,N}$) есть уравнение множественной линейной регрессии, или в векторно-матричной форме

$$Y=A^TX+E,$$

где $Y=\left(y_1\ y_2\ \ldots\ y_n\right)^T$ – вектор значений случайной величины y, $A=\left(a_1\ \ a_2\ \ldots\ \ a_n\right)^T$ – вектор неизвестных параметров, $X=\left(x_{ij}\right)_{N\times n}$ – матрица значений факторов, $E=\left(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \ldots\ \ \varepsilon_N\right)^T$ – вектор случайных отклонений. Неизвестные коэффициенты $a_1,\ \ldots,\ a_n$ уравнения регрессии находятся из условия минимума суммы квадратов отклонений

$$F\left(A\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\left(a_1x_{1i}+\ldots+a_nx_{ni}\right)\right)^2=\left(Y-XA\right)^T\cdot\left(Y-XA\right)\to\min_A.$$

Из необходимого условия $\dfrac{dF\left(A\right)}{dA}=0$ минимума функции $F(A)$ n переменных получаем $\dfrac{dF}{dA}=-2X^TY+2X^TXA=0$ или

$$X^TXA=X^TY. \tag{3.26}$$

Полученная система (3.26) есть система вида (3.25) с положительно определенной матрицей X^TX и вектор-столбцом X^TY.

Решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_a^b K\left(t,\tau\right)x\left(\tau\right)d\tau=f\left(t\right),\quad a\le t\le b$$

или в операторной форме

$$Kx=f,\quad Kx\equiv\int_a^b K\left(t,\tau\right)x\left(\tau\right)d\tau$$

находится в результате решения уравнения Эйлера

$$\left(K^*K+\alpha G\right)X=K^*f. \tag{3.27}$$

Здесь K^* – оператор, сопряженный к оператору K, α – параметр регуляризации, G – дифференциальный оператор. Дискретным аналогом уравнения Эйлера (3.27) на заданной $\left(t,\tau\right)$-сетке является СЛАУ

$$\left(K^TK+\alpha G\right)X=K^TF. \tag{3.28}$$

Матрица $K^TK+\alpha G$ этой СЛАУ при соответствующем задании оператора G будет симметричной и положительно определенной. Поэтому решать СЛАУ (3.28) также целесообразно методом квадратных корней.

3.8. Примеры решения задач

Пример 3.9. Решить методом квадратного корня СЛАУ

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=-2,\\ 2x_1+6x_2-x_3=-17,\\ x_1-x_2+8x_4=25.\end{cases}$$

Решение. 1. Основная матрица $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&6&-1\\1&-1&8\end{pmatrix}$ системы является симметричной и положительно определенной, так как в соответствии с критерием Сильвестра $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 > 0$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 5 > 0$. Значит, результатом ее факторизации будет действительная матрица R.

2**.** Факторизация. В соответствии с формулами (3.17) находим последовательно элементы матрицы R:

$$r_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1,\ r_{12} = \frac{a_{12}}{r_{11}} = \frac{2}{1} = 2,\ r_{13} = \frac{a_{13}}{r_{11}} = \frac{1}{1} = 1\ ;$$

$$r_{22} = \sqrt{a_{22} - r_{12}^2} = \sqrt{6 - 2^2} = \sqrt{2},\ r_{23} = \frac{a_{23} - r_{12}r_{13}}{r_{22}} = \frac{-1 - 2\cdot 1}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$r_{33} = \sqrt{a_{33} - \left(r_{13}^2 + r_{23}^2\right)} = \sqrt{8 - \left(1^2 + \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} = \sqrt{8 - \left(1 + \frac{9}{2}\right)} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}},$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ R^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

3. Решение треугольных СЛАУ:

$$R^TY = B \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -2, \\ 2y_1 + \sqrt{2}y_2 = -17, \\ y_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}y_3 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -2, \\ y_2 = \dfrac{-17 - 2y_1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-17 - 2\cdot(-2)}{\sqrt{2}} = -\dfrac{13}{\sqrt{2}}, \\ y_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\left(25 - y_1 + \dfrac{3}{\sqrt{2}}y_2\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\left(25 - (-2) + \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\dfrac{13}{\sqrt{2}}\right)\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -2, \\ y_2 = -\dfrac{13}{\sqrt{2}}, \\ y_3 = \dfrac{15}{\sqrt{10}}. \end{cases}$$

$$RX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -2, \\ \sqrt{2}x_2 - \dfrac{3}{\sqrt{2}}x_3 = -\dfrac{13}{\sqrt{2}}, \\ \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x_3 = \dfrac{15}{\sqrt{10}}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 - 2x_2 - x_3 = -2 - 2\cdot(-2) - 3 = -1, \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\dfrac{13}{\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}}x_3\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\dfrac{13}{\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}}\cdot 3\right) = -2, \\ x_3 = \dfrac{15}{\sqrt{10}} : \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = 3. \end{cases}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^T$.

Пример 3.10. Решить методом квадратного корня СЛАУ

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 \qquad = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 3, \\ -2x_1 + \; x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 2, \\ \qquad -2x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$$

Решение. Матрица A СЛАУ является симметрической:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Проверим матрицу A на знакоопределенность:

$$\Delta_1 = 4 > 0, \;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \;\; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

В соответствии с критерием Сильвестра матрица A является положительно определенной и потому результатом ее факторизации будет действительная матрица R.

2**.** Факторизация. В соответствии с формулами (3.17) находим последовательно элементы матрицы R:

$$r_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2, \;\; r_{12} = \frac{a_{12}}{r_{11}} = \frac{2}{2} = 1, \;\; r_{13} = \frac{a_{13}}{r_{11}} = \frac{-2}{2} = -1, \;\; r_{14} = \frac{a_{14}}{r_{11}} = \frac{0}{2} = 0;$$

$$r_{22} = \sqrt{a_{22} - r_{12}^2} = \sqrt{2 - 1^2} = 1, \;\; r_{23} = \frac{a_{23} - r_{12} r_{13}}{r_{22}} = \frac{1 - 1 \cdot (-1)}{1} = 2,$$

$$r_{24} = \frac{a_{24} - r_{12} r_{14}}{r_{22}} = \frac{-2 - 1 \cdot 0}{1} = -2;$$

$$r_{33} = \sqrt{a_{33} - \left(r_{13}^2 + r_{23}^2\right)} = \sqrt{6 - \left((-1)^2 + (2)^2\right)} = 1,$$

$$r_{34} = \frac{a_{34} - \left(r_{13} r_{14} + r_{24} r_{24}\right)}{r_{33}} = \frac{-3 - \left((-1) \cdot 0 + 2(-2)\right)}{1} = 1,$$

$$r_{44} = \sqrt{a_{44} - \left(r_{14}^2 + r_{24}^2 + + r_{34}^2\right)} = \sqrt{6 - \left(0^2 + (-2)^2 + (1)^2\right)} = 1,$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \;\; R^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решение треугольных СЛАУ:

$$R^TY = B \Leftrightarrow \begin{cases} 2y_1 & = 4, \\ y_1 + y_2 & = 3, \\ -y_1 + 2y_2 + y_3 & = 2, \\ -2y_2 + y_3 + y_4 & = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2, \\ y_2 = 3 - 2 = 1, \\ y_3 = 2 + 2 - 2 = 2, \\ y_4 = 1 + 2 \cdot 1 - 2 = 1. \end{cases}$$

$$RX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 & = 2, \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 & = 1, \\ x_3 + x_4 & = 2, \\ x_4 & = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4 = 1, \\ x_3 = 2 - 1 = 1, \\ x_2 = 1 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1, \\ x_1 = (2 - 1 + 1)/2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.

3.9. Метод LU-разложения

Данный метод основывается на представлении квадратной матрицы системы $Ax = b$ в виде произведения двух треугольных матриц (так называемой *операции факторизации*)

$$A = LU = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.29}$$

где $L = \left(l_{ij}\right)_{i,i=1}^{n}$ – нижнетреугольная $n \times n$ матрица ($l_{ij} = 0$ при $i < j$),

$L = \left(u_{ij}\right)_{i,i=1}^{n}$ – верхнетреугольная $n \times n$ матрица ($u_{ij} = 1$ при $i = j$, $u_{ij} = 0$ при $i > j$). С учетом (3.29) система $AX = B$ представляется в форме

$$LUX = B. \tag{3.30}$$

Решение системы (3.30) сводится к решению двух простых систем с треугольными матрицами. В итоге процедура решения состоит из двух этапов.

Прямой ход. Обозначая $Y = UX$, получаем систему $LY = B$. Решая ее, получаем вектор-столбец Y.

Обратный ход. Решая систему $UX = Y$ при известной матрице U и вектор-столбце Y, находим искомый вектор-столбец X.

Так как обе матрицы L, U являются треугольными, то решения обеих систем проводится рекуррентно. Из общего вида элемента произведения $A = LU$, структуры матриц L, U следуют формулы для определения элементов этих матриц:

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{s=1}^{j-1} l_{is} u_{sj}, \quad i \geq j, \tag{3.31}$$

$$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{s=1}^{i-1} l_{is} u_{sj} \right), \quad i < j. \tag{3.32}$$

Заметим, что любую квадратную матрицу A, для которой все угловые миноры отличны от нуля: $\Delta_1 = a_{11} \neq 0$, $\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$, …, $\Delta_n = \det A \neq 0$, можно привести к виду (3.29), причем это представление – единственно. Это условие будет выполнено, если для матрицы A выполняется условие преобладания диагональных элементов:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1, \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(для каждой строки с номером $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ модуль элемента главной диагонали больше, чем сумма модулей остальных элементов этой же строки).

Пример 3.11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

методом LU-разложения.

Решение. 1. Выполним операцию факторизации по формулам (3.31), (3.32). При $i \in \{1, 2, 3\}$, $j = 1$ получаем первый столбец матрицы L: $l_{11} = a_{11} = 2$, $l_{21} = a_{21} = 3$, $l_{31} = a_{31} = 1$.

При $i = 1$, $j \in \{2, 3\}$ получаем первую строку матрицы U:

$$u_{12} = \frac{1}{l_{11}} a_{12} = \frac{1}{2} \cdot 1 = 0{,}5, \quad u_{13} = \frac{1}{l_{11}} a_{13} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

При $i \in \{2, 3\}$, $j = 2$ получаем второй столбец матрицы L:

$$l_{22} = a_{22} - \sum_{s=1}^{2-1} l_{2s} u_{s2} = a_{22} - \sum_{s=1}^{1} l_{2s} u_{s2} = a_{22} - l_{21} u_{12} = -3 \cdot 0{,}5 = 0{,}5,$$

$$l_{32} = a_{32} - \sum_{s=1}^{2-1} l_{3s} u_{s2} = a_{32} - \sum_{s=1}^{1} l_{3s} u_{s2} = a_{32} - l_{31} u_{12} = 3 - 1 \cdot 0{,}5 = 2{,}5.$$

При $i = 2$, $j = 3$ получаем вторую строку матрицы U:

$$u_{23} = \frac{1}{l_{22}} \left(a_{23} - \sum_{s=1}^{2-1} l_{2s} u_{s3} \right) = \frac{1}{l_{22}} \left(a_{23} - l_{21} u_{13} \right) = \frac{1}{0{,}5} (1 - 3 \cdot 2) = -10.$$

При $i = 3$, $j = 3$ получаем третий столбец матрицы L:

$$l_{33} = a_{33} - \sum_{s=1}^{3-1} l_{3s} u_{s3} = a_{33} - l_{31} u_{13} - l_{32} u_{23} = 3 - 1 \cdot 2 - 2{,}5 \cdot (-10) = 26.$$

В результате получаем две треугольные матрицы

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0{,}5 & 0 \\ 1 & 2{,}5 & 26 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 2 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. **Прямой ход**. Решим систему $LY = B$:

$$LY = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0,5 & 0 \\ 1 & 2,5 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y_1 = 16, \\ 3y_1 + 0,5y_2 = 10, \\ y_1 + 2,5y_2 + 26y_3 = 16, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 8, \\ y_2 = -28, \\ y_3 = 3. \end{cases}$$

Обратный ход. Решим систему $UX = Y$:

$$UX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 2 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -28 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 0,5x_2 + 2x_3 = 8, \\ \qquad x_2 - 10x_3 = -28, \\ \qquad\qquad x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

3.10. Метод прогонки

3.10.1. Постановка задачи

Один частный, но очень важный случай представляют СЛАУ $AX = B$, основная матрица A которых имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (3.33)$$

Матрицы A, у которых все или часть элементов на главной диагонали и на части диагоналей, параллельных главной (кодиагонали), отличны от нуля, а остальные элементы равны нулю, называются ***ленточными.***

Общее число диагоналей с отличными от нуля элементами называется ***шириной ленты***. Матрица (3.33) имеет ширину ленты $L = 3$ (трехдиагональная матрица).

Системы уравнений с ленточными матрицами возникают при решении многих прикладных задач. Например, рассматривавшееся выше интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, но с разностным ядром $\int_a^b K(t-\tau)y(\tau)d\tau = f(t)$ порождает при построении дискретного аналога отвечающего ему уравнения Эйлера СЛАУ (3.27) с ленточной матрицей.

Для решения СЛАУ с ленточными матрицами можно использовать те же методы, что и в общем случае: метод Гаусса, метод квадратного корня (если A есть симметричная и положительно определенная матрица), метод итераций и т.д. Если при этом программная реализация алгоритма учитывает ленточность матрицы A, то при $L << n$ (n - порядок СЛАУ) достигается существенный выигрыш в числе вычислительных операций.

Системы уравнений $AX = B$ с трехдиагональной матрицей A возникают при решении разностных уравнений, при разностной аппроксимации дифференциальных уравнений второго порядка и задач на собственные значения.

Пусть, например, решается задача Штурма–Лиувилля на собственные значения: найти λ и отвечающие им нетривиальные решения $y(x)$ дифференциального уравнения второго порядка с граничным условием:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \ a < x < b, \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases} \tag{3.34}$$

Введем на отрезке $[a,b]$ равномерную сетку $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n} = h, \ x_i = x_0 + (i-1)h \ \left(i = \overline{1,n}\right)$. Обозначим $y(x_i) = y_i$ ($i = \overline{1,n-1}$). При этом $y_0 = y_n = 0$ в силу краевых условий. Полагая

$$y''(x_i) = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} \ (i = \overline{1,n-1}),$$

получаем разностный аналог задачи (3.34):

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \lambda y_i = 0 \ \left(i = \overline{1,n-1}\right), \\ y_0 = y_n = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{i-1} + \left(\lambda h^2 - 2\right) y_i + y_{i+1} = 0 \ \left(i = \overline{1,n-1}\right), \\ y_0 = y_n = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 + \left(\lambda h^2 - 2\right) y_1 + y_2 = 0, \\ y_1 + \left(\lambda h^2 - 2\right) y_2 + y_3 = 0, \\ y_2 + \left(\lambda h^2 - 2\right) y_3 + y_4 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-2} + \left(\lambda h^2 - 2\right) y_{n-1} + y_n = 0, \\ y_0 = y_n = 0 \end{cases}$$

или в матричной форме записи

$$\left(A + \lambda h^2 E\right) Y = 0, \tag{3.35}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Система линейных алгебраических уравнений (3.35) есть дискретный аналог задачи на собственные значения (3.34). Одновременно при известном λ – это однородная СЛАУ с трехдиагональной матрицей $A' = A + \lambda h^2 E$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} y'' + p(x) y = f(x), \quad a < x < b, \\ y(a) = a_1, \quad y(b) = b_1. \end{cases} \tag{3.36}$$

Ее дискретным аналогом будет система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}+p_iy_i=f_i, & \left(i=\overline{1,n-1}\right) \\ y_0=a_1,\ y_n=b_1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y_{i-1}+\left(p_ih^2-2\right)y_i+y_{i+1}=h^2f_i & \left(i=\overline{1,n-1}\right), \\ y_0=a_1,\ y_n=b_1, \end{cases} \tag{3.37}$$

где обозначено $p_i=p(x_i)$, $f_i=f(x_i)$. В матричной форме система уравнений (3.37) будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2+p_1h^2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2+p_2h^2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2+p_{n-1}h^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ h^2f_1 \\ h^2f_2 \\ \dots \\ h^2f_{n-1} \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

И в первом, и во втором примерах получились СЛАУ с трехдиагональными матрицами. Для решения таких систем уравнений используется эффективный алгоритм, называемый ***методом прогонки*** и являющийся частным случаем метода Гаусса.

3.10.2. Алгоритм метода. Требуемые ресурсы ЭВМ и число операций

Пусть

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ b_n \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

есть система линейных уравнений с трехдиагональной матрицей A.

Прямой ход метода прогонки. Для приведения расширенной матрицы такой СЛАУ к ступенчатой форме на каждом i-м шаге ($i=\overline{1,n-1}$) прямого хода метода Гаусса необходимо пересчитать лишь два элемента $i+1$-й строки расширенной матрицы $\left(A|B\right)$ этой системы. Действительно, элементы нижней кодиагонали после прямого хода должны обратиться в нуль и потому их можно не вычислять, а элементы верхней кодиагонали остаются без изменения. Пересчитать на i-м шаге необходимо лишь элемент $a_{i+1,i+1}$ главной диагонали основной матрицы СЛАУ и свободный член b_{i+1}.

Таким образом, на каждом шаге прямого хода метода прогонки вычисляем:

1) $\alpha_i=\dfrac{a_{i+1,i}}{a'_{ii}}$ – рабочий коэффициент i-го шага,

$$2)\ \begin{cases} a'_{i+1,i+1} = a_{i+1,i+1} - \alpha_i a_{i,i+1}, \\ b'_{i+1} = b_{i+1} - \alpha_i b'_i \ \left(i = \overline{1, n-1}\right). \end{cases} \tag{3.39}$$

При этом на первом шаге полагаем $a'_{11} = a_{11}$, $b'_1 = b_1$.

Обратный ход метода прогонки. После прямого хода метода Гаусса получим равносильную систему уравнений с двухдиагональной треугольной матрицей

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & a_{23} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a'_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ . \\ b'_n \end{pmatrix}.$$

Двигаясь снизу вверх, находим последовательно решения системы уравнений

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b'_n}{a'_{nn}}, \\ x_i = \dfrac{b'_i - a_{i,i+1} x_{i+1}}{a'_{ii}} \ \left(i = n-1, n-2, \dots, 2, 1\right). \end{cases} \tag{3.40}$$

Для хранения элементов матрицы A порядка n необходимо $3n-2$ ячеек. В них же можно записать $2n-1$ элементов a'_{ij} преобразованной матрицы A'. Для хранения элементов вектора-столбца b исходной системы уравнений необходимо еще n ячеек. В итоге для решения на ЭВМ трехдигональной СЛАУ (3.38) достаточно $4n-2$ ячеек ее оперативной памяти.

Оценим число вычислительных операций в методе прогонки. Все вычисления проводятся по формулам (3.39), (3.40). Сохраняя принятые ранее обозначения для арифметических операций, получаем

прямой ход: $N(*) = 2(n-1)$, $N(/) = n-1$, $N(\pm) = 2(n-1)$,

обратный ход: $N(*) = n-1$, $N(/) = n$, $N(\pm) = n-1$.

В результате общее число медленных операций будет равно $5n-4$ а быстрых – $3(n-1)$.

3.11. Примеры решения задач

Пример 3.12. Решить методом прогонки систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10, \\ 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ -2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_4 + x_5 = -3. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему уравнений в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Прямой ход: исходная система уравнений имеет пятый порядок, поэтому прямой ход метода Гаусса в данном примере будет состоять из 4 шагов. В соответствии с формулами (3.39) на каждом шаге вычисляем (при этом считаем $a'_{11} = a_{11} = 2,\ b'_1 = b_1 = 1$):

1-й шаг: $\alpha_1 = \dfrac{a_{21}}{a'_{11}} = \dfrac{4}{2} = 2$, $a'_{22} = a_{22} - \alpha_1 a_{12} = -2 - 2\cdot 1 = -4$, $b'_2 = b_2 - \alpha_1 b'_1 = 10 - 2\cdot 1 = 8$,

2-й шаг:

$\alpha_2 = \dfrac{a_{32}}{a'_{22}} = \dfrac{2}{-4} = -0,5$, $a'_{33} = a_{33} - \alpha_2 a_{23} = 3 + 0,5\cdot 2 = 4$, $b'_3 = b_3 - \alpha_2 b'_2 = 2 + 0,5\cdot 8 = 6$,

3-й шаг:

$\alpha_3 = \dfrac{a_{43}}{a'_{33}} = \dfrac{-2}{4} = -0,5$, $a'_{44} = a_{44} - \alpha_3 a_{34} = 1 + 0,5\cdot 1 = 1,5$, $b'_4 = b_4 - \alpha_3 b'_3 = 0 + 0,5\cdot 6 = 3$,

4-й шаг:

$\alpha_4 = \dfrac{a_{54}}{a'_{44}} = \dfrac{3}{1,5} = 2$, $a'_{55} = a_{55} - \alpha_4 a_{45} = 1 - 2\cdot 2 = -3$, $b'_5 = b_5 - \alpha_4 b'_4 = -3 - 2\cdot 3 = -9$.

После прямого хода система уравнений, равносильная исходной СЛАУ, будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Это верхняя треугольная матрица с двумя ненулевыми диагоналями. Решение такой СЛАУ находится в результате обратного хода метода Гаусса.

Обратный ход: двигаясь снизу вверх, последовательно находим решение полученной треугольной системы уравнений по формулам (3.40):

$$\begin{aligned} x_5 &= -9/(-3) = 3, \\ x_4 &= (3 - 2\cdot 3)/1,5 = -2, \\ x_3 &= (6 - 1\cdot(-2))/4 = 2, \\ x_2 &= (8 - 2\cdot 2)/(-4) = -1, \\ x_1 &= (1 - 1\cdot(-1))/2 = 1. \end{aligned}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}^T$.

Пример 3.13. Рассмотрим краевую задачу (3.36):

$$\begin{cases} y'' + p(x)y = f(x), & a < x < b, \\ y(a) = a_1, \quad y(b) = b_1, \end{cases}$$

в которой $p(x)=x^2,\ f(x)=x^2+x+1,\ a=0,\ b=4,\ n=4,\ h=1,\ y(0)=1,\ \ y(4)=2$. Найти приближенное решение краевой задачи, пользуясь методом прогонки.

Решение. Дискретным аналогом краевой задачи является система линейных уравнений вида (3.37) относительно неизвестных $y_1,\ y_2,\ y_3$:

$$\begin{cases} y_{i-1}+\left(p_i h^2-2\right)y_i+y_{i+1}=h^2 f_i \quad \left(i=\overline{1,3}\right), \\ y_0=1,\ y_4=2, \end{cases}$$

где $p_i=p(x_i)=x_i^2,\ \ f_i=f(x_i)=x_i^2+x_i+1,\ x_i=x_0+hi=hi,\ i=\overline{1,4}$. В матричной форме система уравнений (3.37) будет иметь следующий вид:

$$A\cdot X=B\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&p_1h^2-2&1&0&0\\0&1&p_2h^2-2&1&0\\0&0&1&p_3h^2-2&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\\y_3\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\h^2f_1\\h^2f_2\\h^2f_3\\b_1\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&1\cdot1^2-2&1&0&0\\0&1&4\cdot1^2-2&1&0\\0&0&1&9\cdot1^2-2&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\\y_3\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1^2\cdot\left(1^2+1+1\right)\\1^2\cdot\left(2^2+2+1\right)\\1^2\cdot\left(3^2+3+1\right)\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&-1&1&0&0\\0&1&2&1&0\\0&0&1&7&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\\y_3\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\7\\13\\2\end{pmatrix}.$$

Прямой ход метода прогонки: исходная система уравнений имеет пятый порядок, поэтому прямой ход метода Гаусса в данном примере будет состоять из 4 шагов. В соответствии с формулами (3.39) на каждом шаге вычисляем коэффициенты (при этом считаем $a'_{11}=a_{11}=1,\ \ b'_1=b_1=1$):

1-й шаг: $\alpha_1=\dfrac{a_{21}}{a'_{11}}=\dfrac{1}{1}=1,\quad a'_{22}=a_{22}-\alpha_1a_{12}=-1-1\cdot0=-1,\quad b'_2=b_2-\alpha_1b'_1=3-1\cdot1=2$,

2-й шаг:

$$\alpha_2=\frac{a_{32}}{a'_{22}}=\frac{1}{-1}=-1,\quad a'_{33}=a_{33}-\alpha_2a_{23}=2-(-1)\cdot1=3,\quad b'_3=b_3-\alpha_2b'_2=7-(-1)\cdot2=9,$$

3-й шаг: $\alpha_3=\dfrac{a_{43}}{a'_{33}}=\dfrac{1}{3},\quad a'_{44}=a_{44}-\alpha_3a_{34}=7-\dfrac{1}{3}\cdot1=\dfrac{20}{3},\quad b'_4=b_4-\alpha_3b'_3=13-\dfrac{1}{3}\cdot9=10,$

4-й шаг:

$$\alpha_4=\frac{a_{54}}{a'_{44}}=\frac{0}{20/3}=0,\quad a'_{55}=a_{55}-\alpha_4a_{45}=1-0\cdot0=1,\quad b'_5=b_5-\alpha_4b'_4=2-0\cdot10=2.$$

После прямого хода система уравнений, равносильная исходной СЛАУ, будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&-1&1&0&0\\0&0&3&1&0\\0&0&0&\dfrac{20}{3}&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_0\\y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\9\\10\\2\end{pmatrix}.$$

Это верхняя треугольная матрица с двумя ненулевыми диагоналями. Решение такой СЛАУ находится в результате обратного хода метода Гаусса.

Обратный ход метода прогонки: двигаясь снизу вверх, последовательно находим решение полученной треугольной системы по формулам (3.40): $y_4 = 2,\ y_3 = \dfrac{10 - y_4}{20/3} = 3\cdot\dfrac{10-2}{20} = \dfrac{6}{5},\ y_2 = \dfrac{9 - y_3}{3} = \dfrac{9 - \frac{6}{5}}{3} = \dfrac{13}{5},$

$y_1 = y_2 - 2 = \dfrac{13}{5} - 2 = \dfrac{3}{5},\ y_0 = 1.$

3.12. Задания для самостоятельной подготовки

Задание 3.1. Решить системы методом Гаусса с помощью частичного и полного выбора ведущего элемента:

1) $\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 1, \\ 3x + y - 2z = -4, \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$ (ответ $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$); 2) $\begin{cases} x - 3y + z = 2, \\ 2x + y + 3z = 3, \\ 2x - y - 2z = 8 \end{cases}$ (ответ $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$);

3) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2, \\ x - y + 3z = -4, \\ 3x + 5y + z = 4 \end{cases}$ (ответ $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$); 4) $\begin{cases} 4x + 3y - 2z = -1, \\ 3x + y + z = 3, \\ x - 2y - 3z = 8 \end{cases}$ (ответ $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$);

5) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - 6x_3 = -7 \end{cases}$ (ответ $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$); 6) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x + 2y + z = 8, \\ 4x - 3y - 2z = -1 \end{cases}$ (ответ $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$).

Задание 3.2. Решить системы методом Гаусса с помощью частичного и полного выбора ведущего элемента:

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -8, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -7, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ -4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$ (ответ $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$);

2) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$ (ответ $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$);

3) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad = 4, \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$ (ответ $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$);

4) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1, \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5 \end{cases}$ (ответ $X=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$).

Задание 3.3. Дана система линейных уравнений $AX=B$. Найти решение этой системы, число обусловленности матрицы системы. Найти решение соответствующей возмущенной СЛАУ при замене вектор-столбца B на вектор-столбец $B^*=B+\Delta B$:

1) $\begin{cases} 10x_1+9x_2=-8, \\ 111x_1+100x_2=-89, \end{cases}$ $\Delta B=\begin{pmatrix} 0{,}01 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ответ $X=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $condA=25531$, $X^*=\begin{pmatrix} 2 \\ -3{,}11 \end{pmatrix}$);

2) $\begin{cases} 3x_1+100x_2=103, \\ 9x_1+331x_2=340, \end{cases}$ $\Delta B=\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}01 \end{pmatrix}$ (ответ $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $condA=\dfrac{146540}{93}$, $X^*=\begin{pmatrix} 0{,}989 \\ 1{,}000 \end{pmatrix}$);

3) $\begin{cases} 100x_1+101x_2=503, \\ -10x_1-10x_2=-50, \end{cases}$ $\Delta B=\begin{pmatrix} -0{,}01 \\ 0{,}01 \end{pmatrix}$ (ответ $X=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $condA=\dfrac{22311}{10}$, $X^*=\begin{pmatrix} 1{,}909 \\ 3{,}090 \end{pmatrix}$).

Задание 3.4. Показать, что система линейных уравнений $AX=B$ несовместна. Найти квазирешение системы и нормальное решение системы, близкое к заданному вектор-столбцу X_0:

1) $\begin{cases} x_1+2x_2=3, \\ -x_1+x_2=0, \\ 4x_1-x_2=-3, \end{cases}$ $X_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha=0{,}1$;

2) $\begin{cases} 3x_1+x_2=2, \\ -x_1+x_2=0, \\ x_1-3x_2=-3, \end{cases}$ $X_0=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha=1$;

3) $\begin{cases} 2x_1-3x_2=5, \\ 3x_1+4x_2=-1, \\ x_1+x_2=0, \\ 3x_1+5x_2=-1, \end{cases}$ $X_0=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha=-0{,}1$;

4) $\begin{cases} x_1+2x_2=3, \\ -x_1+2x_2=1, \\ 2x_1-x_2=0, \\ x_1-2x_2=-1, \end{cases}$ $X_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha=0{,}2$.

Задание 3.5. Решить методом квадратного корня системы уравнений

1) $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3=16, \\ x_1+x_2+3x_3=12, \\ 4x_1+3x_2+14x_3=52, \end{cases}$ ответ $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=2, \\ -2x_1+2x_2+2x_3=2, \\ x_1+2x_2+12x_3=15, \end{cases}$ ответ $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=7, \\ -x_1+2x_2-2x_3=-13, \\ x_1-2x_2+5x_3=25, \end{cases}$ ответ $X=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{cases} 7x_1+2x_2+4x_3=34, \\ 2x_1+7x_2+5x_3=20, \\ 4x_1+5x_2+6x_3=27, \end{cases}$ ответ $X=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 21, \\ -x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 21, \\ 6x_1 + 4x_3 + 7x_4 = 21, \end{cases}$ ответ $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{cases} 5x_1 + x_3 + 5x_4 = 15, \\ 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 18, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 9x_4 = 31, \end{cases}$ ответ $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Задание 3.6. Решить системы уравнений методом LU-разложения:

1) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1, \end{cases}$ ответ $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -15, \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 13, \end{cases}$ ответ $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -11, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4, \end{cases}$ ответ $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 = 13, \\ -x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -28, \end{cases}$ ответ $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1, \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -4, \end{cases}$ ответ $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = -14, \\ -6x_2 + x_3 + 2x_4 = -14, \\ -x_3 - 2x_4 = 2, \end{cases}$ ответ $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -5, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0, \\ 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -21, \\ -3x_3 + 2x_4 = 9, \end{cases}$ ответ $X = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Задание 3.7. Решить методом прогонки системы уравнений

1) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 8, \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 10, \\ x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_3 - 3x_4 = -2, \end{cases}$ (ответ $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$);

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_3 + x_4 = 7, \end{cases}$ (ответ $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$);

3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 12, \\ x_3 - x_4 = -4, \end{cases}$ (ответ $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$).

Библиографический список

1. Кострикин, А.И. Линейная алгебра и геометрия : учеб. пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. - 4-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2008. – 304 с.
2. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. М.: Высшая школа, 1979.
3. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: 1973.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учеб. Для вузов - 4-е изд. — М. Наука. Физматлит, 1999 - 296 с.

Оглавление

Предисловие……………………………………………………………….……3
Глава 1. Введение в дисциплину. Элементы алгебры логики. Элементы теории множеств и отношений……………………………………………3
1.1. Понятие высказывания, операции над высказываниями………………3
1.2. Законы теории логики, упрощение высказываний…………….….. 7
1.3. Примеры решения задач…………………………………………..… 9
1.4. Задания для самостоятельной работы…………………………….. 13
1.5. Предикаты и кванторы……………………………………..………. 14
1.6. Понятие множества. Операции над множествами………………... 17
1.7. Свойства операций над множествами……………………………….. 20
1.8. Примеры решения задач……………………………………………..22
1.9. Задания для самостоятельной работы……………………………….. 25
1.10. Понятие бинарного отношения…………………………………….27
1.11. Понятие отображения ……………………………………………….. 28
1.12. Композиция отображений. Инъективные функции…………….. 30
1.13. Понятие обратного отображения. Обратные тригонометрические функции……………………………….………. 31
1.14. Отношение эквивалентности……………………..………………. 35
1.15. Примеры решения задач……………..…………………………. 37
1.16. Задания для самостоятельного изучения………….....………….. 41
1.17. Биективные (взаимно-однозначные) отношения…………...……. 43
1.18. Мощность множества. Кардинальные числа………………………. 45
1.19. Счетные и несчетные множества. Мощность множества действительных чисел………………………………………………… ..46
Глава 2. Основные алгебраические структуры: группы, кольца, поля
2.1. Бинарные операции, их виды…………………………………… 50
2.2. Нейтральные, регулярные и симметричные элементы…………… 51
2.3. Понятие алгебры. Изоморфные алгебры……………………….. 53
2.4. Понятие группы. Свойства групп……………………………….. 55
2.5. Циклические группы……………………………………………….. 59
2.6. Примеры решения задач………………………………………… 62
2.7. Задания для самостоятельной работы……………………………. 69
2.8. Определение кольца. Примеры колец……………………………. 70
2.9. Гомоморфизмы колец……………………………………………… 72
2.10. Кольцо целых чисел………………………………………………. 73
2.11. Сравнения. Кольцо классов вычетов……………………………. 75
2.12. Примеры решения задач……………………………………….... 77
2.13. Задания для самостоятельной работы…………………………. 80
2.14. Понятие поля. Простейшие примеры полей…………………….. 81
2.15. Поле комплексных чисел……………………………………… 83
2.16. Примеры решения задач……………………………………….. 85
2.17. Задания для самостоятельной работы………………………… 87

Глава 3. Численные методы решения систем линейных уравнений
3.1. Особенности численных алгоритмов. Общие положения………..88
3.2. Источники погрешности……………………………………….... 94
3.3. Обусловленность систем линейных алгебраических уравнений...96
3.4. Переопределенные системы линейных алгебраических уравнений. 99
3.5. Нормальные СЛАУ………………………………………………. 102
3.6. Примеры решения задач…………………………………………. 102
3.7. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод квадратных корней……………………………..…. 108
3.8. Примеры решения задач……………………………………….... 115
3.9. Метод LU-разложения…………………………………………... 118
3.10. Метод прогонки……………………………………………….... 120
3.11. Примеры решения задач……………………………………….. 123
3.12. Задания для самостоятельной подготовки……………………. 126
Библиографический список……………………………………………129

Новиков Анатолий Иванович
Нелюхин Сергей Александрович

Основные алгебраические структуры.
Численные методы линейной алгебры

Редактор Р.К. Магнутова
Корректор С.В. Макушина
Подписано в печать 28.03.21. Формат бумаги 60x84 1/16.
Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 8,25.
Тираж 30 экз. Заказ
Рязанский государственный радиотехнический университет.
390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.
Редакционно-издательский центр РГРТУ