

ФУНКЦИИ АРКСИНОС И АРККОСИНОС

На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ непрерывна и строго возрастает. В соответствии с теоремой 3.2 существует обратная функция $f^{-1}(x)$, $x \in [-1; 1]$, которая также будет непрерывной и строго возрастающей. Обозначают эту функцию $\arcsin x$ (арксинус *икс*). Словосочетание $\arcsin x$ «переводится» (читается) как «угол, синус которого равен x » (*arc* – угол, *sin* – синус).

Таким образом, **арксинусом** числа $x \in [-1; 1]$ называется такой угол α , принадлежащий отрезку $[-\pi/2; \pi/2]$, синус которого равен x .

В соответствии со свойствами обратных функций ($f(f^{-1}(y)) = y$; $f^{-1}(f(x)) = x$) имеем тождества

$$\boxed{\sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1; 1]} \quad (3.2)$$

$$\boxed{\arcsin(\sin \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]} \quad (3.3)$$

Заметим, что как выражение $\sin(\arcsin x)$, так и тождество (3.2) имеют смысл только для $x \in [-1; 1]$, тогда как выражение $\arcsin(\sin \alpha)$ имеет смысл для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, но тождество (3.3) верно только для $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Свойства функции $y = \arcsin x$

1. **Область определения:** $D(y) = [-1; 1]$.

2. **Область значений:**

$$E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] : \left(-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \text{ для всех } x \in [-1; 1] \right).$$

3. **Четность:** $\arcsin x$ – нечетная функция. Для любого $x \in [-1; 1]$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

4. **Периодичность:** неперiodическая, так как каждое свое значение она принимает один раз.

5. **Интервалы монотонности:** строго возрастает на всей области определения.

6. **Экстремальные значения:** локальных экстремумов нет.

Наименьшее значение на отрезке $[-1; 1]$:

$$\min_{x \in [-1; 1]} (\arcsin x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Наибольшее: $\max_{x \in [-1; 1]} (\arcsin x) = \frac{\pi}{2}.$

7. **График** функции $y = \arcsin x$, $x \in [-1; 1]$, приведен на рис. 3.10 и 3.11 вместе с графиком функции

$$y = \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], \text{ из которого он получается ото-}$$

бражением относительно прямой $y = x$.

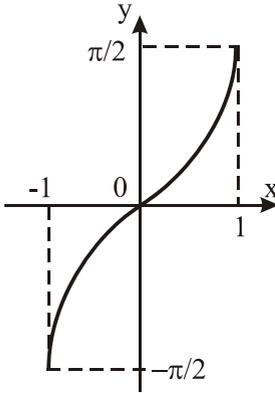


Рис. 3.10.

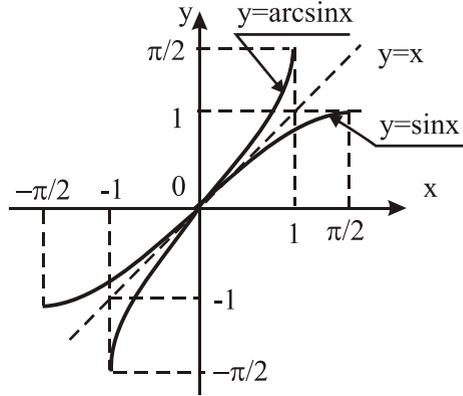
График функции $y = \arcsin x$ 

Рис. 3.11.

Графики функций
 $y = \sin x$ и $y = \arcsin x$

Функция $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ непрерывна и строго убывает. В соответствии с теоремой 3.2 существует обратная функция $f^{-1}(x)$, $x \in [-1; 1]$, которая также будет непрерывной и строго убывающей. Обозначают ее $\arccos x$ (арккосинус), т.е. **арккосинусом числа $x \in [-1; 1]$ называется такой угол α , принадлежащий отрезку $[0; \pi]$, косинус которого равен x :**

$$\boxed{\cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1; 1]} \quad (3.4)$$

Имеет место также тождество

$$\arccos(\cos \alpha) = \alpha, \quad \alpha \in [0; \pi]. \quad (3.5)$$

Выражение $\arccos(\cos \alpha)$ определено для всех $\alpha \in \mathbb{R}$, но тождество (3.5) верно только для $\alpha \in [0; \pi]$.

Свойства функции $y = \arccos x$

1. **Область определения:** $D(y) = [-1; 1]$.
2. **Область значений:**
 $E(y) = [0; \pi]$: ($0 \leq \arccos x \leq \pi$ для всех $x \in [-1; 1]$).
3. **Четность и нечетность:** $\arccos x$ - ни четная, ни нечетная функция. Для всех $x \in [-1; 1]$ справедливо тождество

$$\boxed{\arccos(-x) = \pi - \arccos x} \quad (3.6)$$

4. **Периодичность:** неперiodическая функция.
5. **Интервалы монотонности:** строго убывает на всей области определения.
6. **Экстремальные значения:** локальных экстремумов нет.
 Наименьшее значение на отрезке $[-1; 1]$:

$$\min_{x \in [-1; 1]} (\arccos x) = 0.$$

Наибольшее: $\max_{x \in [-1; 1]} (\arccos x) = \pi.$

7. **График** функции $y = \arccos x$, $x \in [-1; 1]$, приведён на рис. 3.12 и на рис. 3.13 вместе с графиком «прямой» функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$.

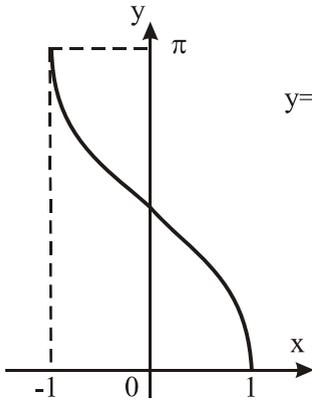


Рис. 3.12.
График функции
 $y = \arccos x$

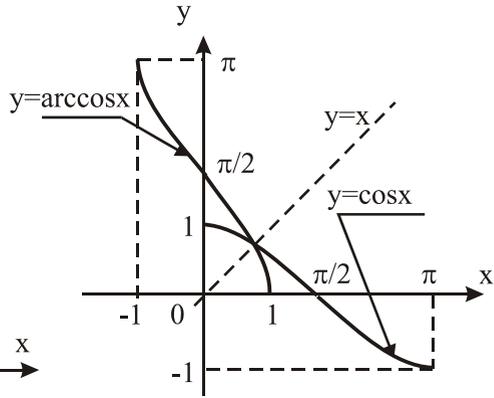


Рис. 3.13.
Графики функции
 $y = \cos x$ и $y = \arccos x$

Литература

1. Тригонометрические функции, уравнения и неравенства: Пособие для поступающих /А.И.Новиков; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2007. 288 с. ISBN 5-7722-0248-0.