ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СВОЙСТВА И ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ $y = \operatorname{tg} x, \quad y = A \operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$

Определение. Тангенсом угла α называется число, равное отношению $\sin\alpha$ к $\cos\alpha$, причем $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z$.

Так как каждому углу α можно поставить в соответствие единственное число $y = \operatorname{tg}\alpha$, то отображение $\alpha \to y$, где $y = \operatorname{tg}\alpha$, $\alpha \in \mathrm{R}$ и $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ является функцией. Далее будем писать $y = \operatorname{tg} x$. Таким образом, по определению

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \tag{1}$$

Рассмотрим свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.

Область определения $D(f) = \mathrm{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Так как $\sin x$ и $\cos x$ определены на R, то область определения $\operatorname{tg} x$ является множество R за исключением точек $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, в которых $\cos x = 0$.

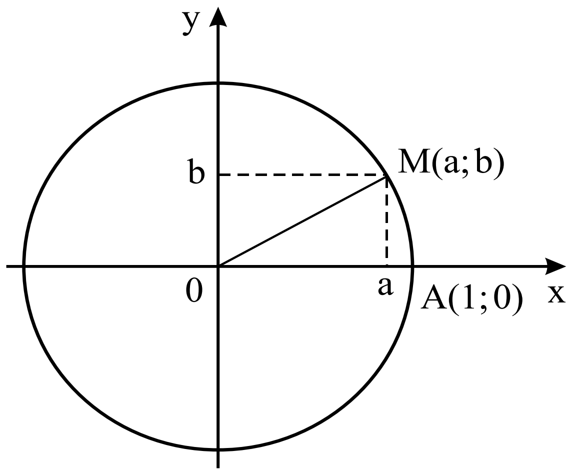

Рис. 13.1

2) Область значений $E(f) = \mathrm{R}$. Возьмем произвольное число $c \in R$ и докажем, что существует угол α, отвечающий точке $M(a, b)$ на единичной окружности (рис.13.1) и такой, что $\operatorname{tg}\alpha = c$. Используем известные формулы

$$|\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}; \quad |\sin\alpha| = \frac{|\operatorname{tg}\alpha|}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}. \tag{2}$$

Положим $\quad a = \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}}; \quad b = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}}$.

Очевидно, что числа a и b принадлежат промежутку $[-1;1]$. Кроме того, выполняется равенство

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{1+c^2} + \frac{c^2}{1+c^2} = \frac{1+c^2}{1+c^2} = 1.$$

Следовательно, точка $M(a, b)$ расположена на единичной окружности, а числа a и b равны соответственно косинусу и синусу некоторого угла α, т.е. $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$. Тангенс угла α равен c: $\operatorname{tg}\alpha = c$. +

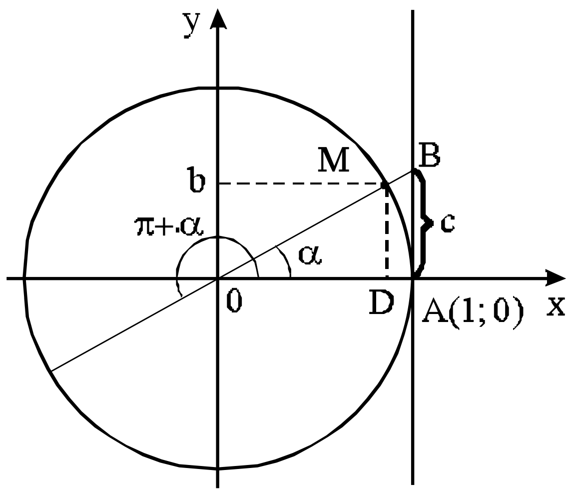

Рис. 13.2

Замечание. Угол α такой, что $\operatorname{tg}\alpha = c$, для каждого числа $c \in \mathbb{R}$ определяется неоднозначно. Это следует, в частности из формулы (2). Например, если $c > 0$, то $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ должны иметь одинаковые знаки.

Одинаковые знаки функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют в первой и третьей четвертях, т.е., если $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ или $\alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$. На рис. 13.2 показано, что заданному числу $c > 0$ отвечают два угла α и $\pi + \alpha$, такие что $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = c$.

Заметим, что доказательство утверждения $E(\operatorname{tg}x) = R$ можно осуществить из геометрических соображений. Через точку $A(1;0)$ проводим прямую перпендикулярную оси OX. Это прямая называется линией тангенсов. Берем произвольную точку $B(1; c)$ на линии тангенсов и соединяем ее с точкой O – центром окружности (рис.13.2).

Из прямоугольного треугольника OAB следует, что $\frac{AB}{OA} = \operatorname{tg}\alpha$. Но $AB = c$, $OA = 1$ и тогда $c = \operatorname{tg}\alpha$. Из подобия прямоугольных треугольников OAB и ODM заключаем, что

$$\frac{AB}{OA} = \frac{DM}{OD} \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

3) <u>Четность и нечетность</u>. Тангенс – нечетная функция. Действительно, для любого $x \in D(\operatorname{tg} x)$ имеем

$$\operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x.$$

4) Периодичность. Функция $\operatorname{tg} x$ - периодическая с наименьшим положительным периодом π. Действительно, для любого $x \in D(\operatorname{tg} x)$ имеем

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Покажем, что π - наименьший период. Пусть $T > 0$ такое, что $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$ для любого $x \in D(\operatorname{tg} x)$. При $x = 0$ имеем $\operatorname{tg} T = \operatorname{tg} 0 = 0$, т.е. $\sin T = 0$. Но $\sin T = 0$ при $T = \pi k$, $k \in Z$. Так как $T > 0$, то T может принимать значение $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$. Наименьшее из этих чисел равно π.

5) Интервалы монотонности. Функция $\operatorname{tg} x$ является монотонно возрастающей на каждом интервале $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$. Простейший способ доказательства этого утверждения основан на использовании производной (теоремы об интервалах монотонности функции).

Так как $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ для всех $x \in R$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, то $\operatorname{tg} x$ - монотонно возрастающая функция на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

Приведем альтернативный способ доказательства – из определений монотонной функции.

Пусть $0 \le x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$. Тогда $0 \le \sin x_1 < \sin x_2$ и $1 \ge \cos x_1 > \cos x_2 > 0$. Из неравенства $1 \ge \cos x_1 > \cos x_2 > 0$ следует , что

$$1 \le \frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}.$$

Перемножая это неравенство и неравенство $0 \le \sin x_1 < \sin x_2$ как неравенства одного знака с неотрицательными числами, получаем

$$0 \le \frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2.$$

Аналогично доказывается монотонное возрастание $\operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Если же $x_1 < x_2$ и $x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $x_2 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\operatorname{tg} x_1 < 0$, а $\operatorname{tg} x_2 > 0$ и как следствие $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$.

6) Точки пересечения с координатными осями и промежутки знакопостоянства. Ось OX график функции $y = \operatorname{tg} x$ пересекает в точках с абсциссами $x = \pi n$, $n \in Z$. Ось OY пересекается ветвью графика функции $y = \operatorname{tg} x$ в точке $O(0;0)$.

Промежутки знакопостоянства:

$$\mathrm{tg}\ x > 0 \quad \text{при} \quad x \in \left(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \ \ n \in Z;$$

$$\mathrm{tg}\ x < 0 \quad \text{при} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n\right), \ \ n \in Z.$$

Действительно, так как $\mathrm{tg}\,x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, то тангенс положителен в первой и третьей четвертях, поскольку в этих четвертях функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют одинаковые знаки. Во второй и четвертой четвертях $\mathrm{tg}\,x$ отрицателен, поскольку в этих четвертях $\sin x$ и $\cos x$ имеют разные знаки.

7) Точек экстремума функция $y = \mathrm{tg}\,x$ не имеет, поскольку является монотонно возрастающей на каждом интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

8) <u>График функции</u>. Приведен на рис.13.3.

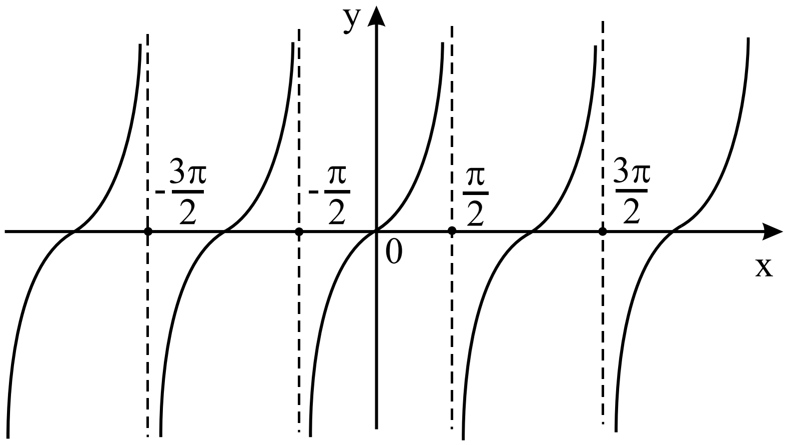

Рис. 13.3

Рассмотрим свойства и построим график функции $y = A\,\mathrm{tg}\,(\omega x + \varphi)$, где A, ω, φ - заданные действительные числа. Будем считать, что $\omega \neq 0$, так как при $\omega = 0$: $y = A\,\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{const}$.

Обозначим $u = \omega x + \varphi$, тогда $y = A\,\mathrm{tg}\,u$. Если x пробегает множество значений $(-\infty;+\infty)$, то $u = \omega x + \varphi$ пробегает это же множество значений при $\omega \neq 0$ (см. свойства линейной функции). Поэтому свойства функции $y = A\,\mathrm{tg}\,(\omega x + \varphi)$ аналогичны свойствам функции $y = \mathrm{tg}\,x$.

Областью определения функции $y = A\,\mathrm{tg}\,(\omega x + \varphi)$ являются все действительные числа x, кроме тех x, при которых $\cos(\omega x + \varphi) = 0$, т.е. $\omega x + \varphi = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Таким образом, $D(f) = R$, $x \neq \dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n - \varphi\right)$, $n \in Z$.

Найдем наименьший положительный период функции $y = A\,\mathrm{tg}\,(\omega x + \varphi)$.

Пусть $\omega > 0$ и пусть $T > 0$ - период функции $A\,\mathrm{tg}\,(\omega x + \varphi)$. Тогда для любого $x \in D(f)$ должно выполняться равенство

$$A\,\mathrm{tg}\,(\omega(x + T) + \varphi) = A\,\mathrm{tg}\,(\omega x + \varphi).$$

Это равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\omega(x + T) + \varphi - (\omega x + \varphi) = \pi n, \quad n \in Z.$$

Откуда $\omega T = \pi n$ и $T = \dfrac{\pi n}{\omega}$.

Так как $T > 0$, то период T может принимать значения $\dfrac{\pi}{\omega}$; $\dfrac{2\pi}{\omega}$; $\dfrac{3\pi}{\omega}$;....

Отсюда следует , что наименьший положительный период равен $\dfrac{\pi}{\omega}$.

Найдем точки пересечения графика функции $y = A\,\mathrm{tg}\,(\omega x + \varphi)$ с осями координат

$$A\,\mathrm{tg}\,(\omega x + \varphi) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega x + \varphi = \pi n, \quad n \in Z.$$

Абсциссы точек пересечения графика с осью OX:

$$x = \frac{\pi n - \varphi}{\omega}, \qquad n \in Z.$$

Ордината точки пересечения ветви графика с осью OY:

$$y(0) = A\,\mathrm{tg}\,(\omega \cdot 0 + \varphi) = A\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

На рис. 13.4 приведен график функции $y = A\,\mathrm{tg}\left(\omega x + \varphi\right)$ при $A > 0$ и $\omega < 0$.

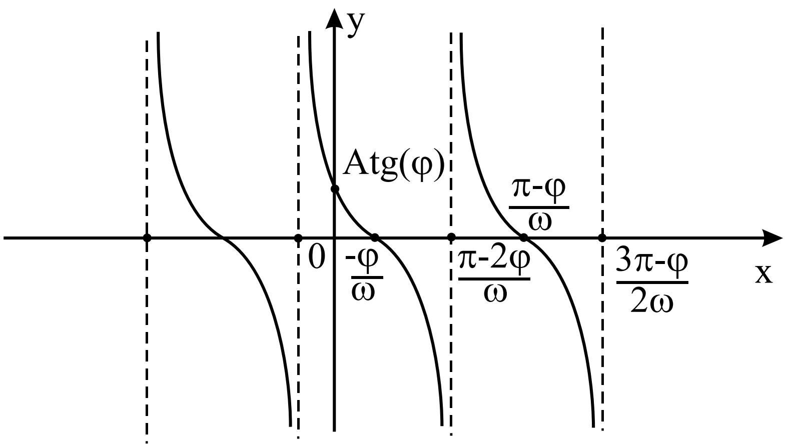

Рис. 13.4

Литература

1. Математика: Пособие для поступающих в РГРТА /А.И. Новиков, И.П. Карасев, А.В. Лоскутов, Л.В. Артемкина, А.И. Сюсюкалов; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2003. 164 с. ISBN 5-7722-0156-5.