СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y=\dfrac{k}{x}$ И ЕЕ ГРАФИК

Определение. Функция $y=\dfrac{k}{x}$ называется обратной пропорциональностью. Здесь $k\neq 0$- действительное число. О переменной y говорят, что она обратно пропорциональна переменной x.

1) Область определения. $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, так как выражение $\dfrac{k}{x}$ определено для любых x, кроме $x=0$.

2) Область значений. $E(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ при любом $k\neq 0$. При изменении x от $-\infty$ до 0 (на интервале $(-\infty;0)$) и $k>0$, выражение $\dfrac{k}{x}$ принимает значения от бесконечно малых отрицательных до $(-\infty)$; т.е. $y\in(-\infty;0)$ при изменении x от 0 до $+\infty$ (на интервале $(0;+\infty)$) выражение $\dfrac{k}{x}$ принимает значения от $+\infty$ до бесконечно малых положительных, т.е. $y\in(0;+\infty)$.
Аналогично проводится анализ при $k<0$.

3) Четность и нечетность. Функция $y=\dfrac{k}{x}$ является нечетной.

Действительно, $y(-x)=\dfrac{k}{(-x)}=-\left(\dfrac{k}{x}\right)=-y(x)$ при $x\neq 0$.

4) Периодичность. Функция $y=\dfrac{k}{x}$ непериодическая. Действительно, допустим что существует $T>0$ такое, что для любого $x\in D(f)$ выполняется равенство $\dfrac{k}{x+T}=\dfrac{k}{x}\Leftrightarrow kT=0$. Но $kT\neq 0$. Поскольку $k\neq 0$ по определению и $T>0$ по предположению.

5) Точки пересечения с координатными осями. График функции $y=\dfrac{k}{x}$ не имеет общих точек с осью OY, поскольку $x=0$ не входит в $D(f)$.
График функции не пересекает и ось OX, так как ни при каких x значение $y(x)$ не обращается в ноль. Таким образом, график функции не пересекает ни одну из координатных осей.

6) Промежутки знакопостоянства. Если $k>0$, то функция $y=\dfrac{k}{x}$ положительна при $x>0$ и отрицательна при $x<0$. Если $k<0$, то функция

$y = \frac{k}{x}$ положительна при $x < 0$ и отрицательна при $x > 0$. Таким образом, график функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ располагается в первой и третьей координатных четвертях, а при $k < 0$ - во второй и четвертой.

7) Интервалы монотонности . При $k > 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ монотонно убывает в каждом из промежутков $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$. Подчеркнем еще раз, что функция убывает на промежутке $(-\infty;0)$ и убывает на промежутке $(0;+\infty)$, но она не является монотонно убывающей на $D(f)$. Утверждение, что функция является убывающей на $D(f)$ - достаточно распространенная ошибка.

Докажем, что функция $y = \frac{k}{x}$ монотонно убывает при $k > 0$ и $x \in (-\infty;0)$. Пусть $x_1 \in (-\infty;0)$ и $x_2 \in (-\infty;0)$, при этом $x_1 < x_2$.

Покажем, что $y_1 > y_2$, где $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_2)$.

Имеем $y_1 - y_2 = \frac{k}{x_1} - \frac{k}{x_2} = \frac{k(x_2 - x_1)}{x_2 x_1}$.

Так как $x_1 x_2 > 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, $k > 0$, то $y_1 - y_2 > 0$, т.е. $y_1 > y_2$.

Аналогично доказывается монотонное убывание функции $y = \frac{k}{x}$ на интервале $(0;+\infty)$.

При $k < 0$ функция $y = \frac{k}{x}$ монотонно возрастает в каждом из промежутков $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$. Доказательство этого утверждения проводится также аналогично.

Точек экстремума нет, поскольку функция $y = \frac{k}{x}$ является монотонно убывающей при $k > 0$ и монотонно возрастающей при $k < 0$ в каждом из промежутков $(-\infty;0)$ и $(0;+\infty)$.

8) График функции. Свойства 1) - 8) позволяют построить график функции $y = \frac{k}{x}$ (рис. 2.1, рис. 2.2).

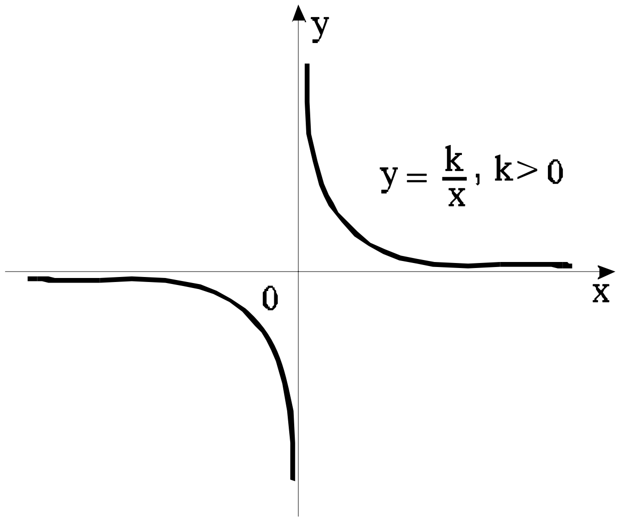

Рис. 2.1

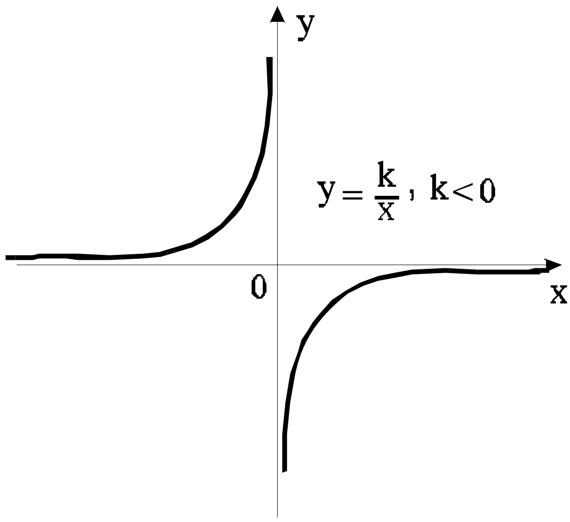

Рис. 2.2

График функции $y = \frac{k}{x}$ представляет собой кривую, состоящую из двух ветвей. Эта кривая называется гиперболой.

Заметим, что $\frac{k}{x} \to 0$ при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$, т.е. на бесконечности ($x \to -\infty$ и $x \to +\infty$) график функции $y = \frac{k}{x}$ неограниченно приближается к оси OX. Если $x \to 0$, то отношение $\frac{k}{x}$ становится неограниченно большим, т.е. $\frac{k}{x} \to +\infty$ или $\frac{k}{x} \to -\infty$. При этом знак определяется знаком отношения $\frac{k}{x}$ (см. рис. 2.1, рис. 2.2). Таким образом, при $x \to 0$ график функции $y = \frac{k}{x}$ неограниченно приближается к оси OY.

Литература

1. Математика: Пособие для поступающих в РГРТА /А.И. Новиков, И.П. Карасев, А.В. Лоскутов, Л.В. Артемкина, А.И. Сюсюкалов; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2003. 164 с. ISBN 5-7722-0156-5.