ВЫДЕЛЕНИЕ КВАДРАТА ДВУЧЛЕНА ИЗ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА (ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО КВАДРАТА). РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

Определение 1. Квадратным трехчленом называется многочлен второй степени $ax^2 + bx + c$, где x - переменная; a, b, c - действительные числа, причем $a \neq 0$.

Определение 2. Квадратный трехчлен $x^2 \pm 2dx + d^2 = (x \pm d)^2$, $d \in R$ называется полным квадратом.

Выделить полный квадрат из квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ означает представить его в виде $a(x \pm d)^2 + p$, где коэффициенты d и p определяются через коэффициенты a, b, c квадратного трехчлена.

Утверждение. Для любых a, b, c $(a \neq 0)$ справедливо тождество $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$, где $D = b^2 - 4ac$.

Доказательство.

$$ax^2 + bx + c =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}.+$$

Таким образом, $d = \frac{b}{2a}$; $p = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Преобразования, использованные при доказательстве утверждения, составляют содержание процедуры выделения полного квадрата.

Пример.

$$2x^2 + 3x + 5 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\left(x^2 + 2\cdot\frac{3}{4}x + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{16} + \frac{5}{2}\right) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{8}.$$

Теорема (о разложении квадратного трехчлена на линейные множители)

Если $D = b^2 - 4ac \geq 0$, то квадратный трехчлен можно представить в виде $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),\ x \in R$, где $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Доказательство. Преобразуем квадратный трехчлен к виду

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2\right).$$

Имеем далее с учетом формулы $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) =$$

$$= a\left(x - \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Здесь введены обозначения $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$. +

Замечание 1). Если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ и $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

2). Если $D < 0$, то разложение квадратного трехчлена на линейные множители с действительными x_1 и x_2 не существует.

Литература

1. Математика: Пособие для поступающих в РГРТА /А.И. Новиков, И.П. Карасев, А.В. Лоскутов, Л.В. Артемкина, А.И. Сюсюкалов; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2003. 164 с. ISBN 5-7722-0156-5.