ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; *разность квадратов двух выражений* равна произведению разности этих выражений и их суммы.

Например, $49x^2 - 9y^2 = (7x)^2 - (3y)^2 = (7x - 3y) \cdot (7x + 3y)$.

2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; *квадрат суммы двух выражений* равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения.

Например, $(5 + 3x)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3x + (3x)^2 = 25 + 30x + 9x^2$.

3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; *квадрат разности двух выражений* равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражения плюс квадрат второго выражения.

Например, $(5 - 3x)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3x + (3x)^2 = 25 - 30x + 9x^2$.

4. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

5. $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

Тождества (4) и (5) называют *квадратом трехчлена*.

6. $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$; *сумма кубов двух выражений* равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

<u>*Примечание.*</u> Выражение $a^2 - ab + b^2$ называют *неполным квадратом разности*.

Например, $27x^3 + 8 = (3x)^3 + 2^3 = (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$

7. $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$, *разность кубов двух выражений* равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

Например, $8 - y^3 = (2 - y)(4 + 2y + y^2)$.

Выражение вида $a^2 + ab + b^2$ называют *неполным квадратом суммы*.

8. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Тождество ($8^*$) называют *кубом суммы*.

9. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Тождество ($9^*$) называют *кубом разности.*

Бином Ньютона

Теорема 4.2. $\forall a, b \in \mathbf{R} \quad \forall n \in \mathbf{N}$ *справедлива* ***формула Ньютона***[1]

$$(a+b)^n = C_n^o a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \tag{4.8}$$

Или в компактной форме с использованием знака суммы $\sum$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$

где $C_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$, $k = 1,2,\ldots,n$, (4.9)

– биномиальные коэффициенты, при этом по определению полагают $C_n^o = 1$.

Биномиальные коэффициенты можно находить также по формуле (см. п.4.3.3)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k = 0,1,2,\ldots,n,$$

где по определению $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$, а $0! = 1$.

Справедливость формулы (4.8) – бином Ньютона – доказывается, как правило, методом математической индукции. Предлагаем читателю самостоятельно провести доказательство формулы (4.8) методом математической индукции.

Рассмотрим альтернативный методу математической индукции способ ***вывода*** формулы (4.8).

Поскольку $(a+b)^n = a^n \left(1 + \dfrac{b}{a}\right)^n$ *при* $a \neq 0$ *и* $1^{n-k} = 1$*, то достаточно вывести формулу*

$$(1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k h^k. \tag{4.10}$$

---

[1] Ньютон Исаак (Newton Isaac, 1643 – 1727) – английский физик и математик, разработал наряду с Готфридом Лейбницем основы дифференциального и интегрального исчислений, развил теорию степенных рядов, доказал теорему о биноме Ньютона.

Очевидно, что выражение $(1+h)^n$ *является многочленом* n*-й степени относительно* h. *Введём обозначения*

$$S_n \equiv (1+h)^n = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}h + a_2^{(n)}h^2 + \ldots + a_n^{(n)}h^n, \qquad (4.11)$$

$$S_{n+1} \equiv (1+h)^{n+1} = a_0^{(n+1)} + a_1^{(n+1)}h + a_2^{(n+1)}h^2 + \ldots + a_n^{(n+1)}h^{n+1}.$$

В (4.11) $a_i^{(n)}$ $i = 0,1,\ldots,n$, *и* $a_i^{(n+1)}$ $i = 0,1,\ldots,n,n+1$, *– неопределённые коэффициенты, подлежащие определению.*

Поскольку $S_{n+1} = S_n \cdot (1+h)$, *то с учётом тождеств (4.11) получаем*

$$a_0^{(n+1)} + a_1^{(n+1)}h + a_1^{(n+1)}h^2 + \ldots + a_n^{(n+1)}h^n + a_{n+1}^{(n+1)}h^{n+1} =$$
$$= a_0^{(n)} + \left(a_0^{(n)} + a_1^{(n)}\right)h + \left(a_1^{(n)} + a_2^{(n)}\right)h^2 + \ldots +$$
$$+ \left(a_{n-1}^{(n)} + a_n^{(n)}\right)h^n + a_n^{(n)}h_{n+1}.$$

Отсюда, используя условие равенства двух многочленов (два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях h*), получаем рекуррентные формулы*

$$\begin{aligned}
&h^{n+1}: \ a_{n+1}^{(n+1)} = a_n^{(n)},\\
&h^{n} \ : \ a_n^{(n+1)} = a_{n-1}^{(n)} + a_n^{(n)},\\
&h^{n-1}: \ a_{n-1}^{(n+1)} = a_{n-2}^{(n)} + a_{n-1}^{(n)}, \qquad (4.12)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&h^{2} \ : \ a_2^{(n+1)} = a_1^{(n)} + a_2^{(n)},\\
&h \ : \ a_1^{(n+1)} = a_0^{(n)} + a_1^{(n)},\\
&h^{0} \ : \ a_0^{(n+1)} = a_0^{(n)}.
\end{aligned}$$

При $n = 1$ *имеем* $(1+h)^1 = 1+h$, *и потому* $a_0^{(1)} = 1$, $a_1^{(1)} = 1$.

Теперь находим последовательно по рекуррентным формулам (4.12), двигаясь снизу вверх:

$n = 2$*:* $a_0^{(2)} = a_0^{(1)} = 1$, $a_1^{(2)} = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} = 1+1 = 2$, $a_2^{(2)} = a_1^{(1)} = 1$*;*

$n = 3$*:* $a_0^{(3)} = a_0^{(2)} = 1$, $a_1^{(3)} = a_0^{(2)} + a_1^{(2)} = 1+2 = 3$,

$$a_2^{(3)} = a_1^{(2)} + a_2^{(2)} = 2 + 1 = 3,\ a_3^{(3)} = a_2^{(2)} = 1;$$

$$n = 4:\ a_0^{(4)} = 1,\ a_1^{(4)} = a_0^{(3)} + a_1^{(3)} = 1 + 3 = 4,$$

$$a_2^{(4)} = a_1^{(3)} + a_2^{(3)} = 3 + 3 = 6,\ a_3^{(4)} = a_2^{(3)} + a_3^{(3)} = 3 + 1 = 4,$$

$$a_4^{(4)} = a_3^{(3)} = 1$$

и т.д.

Нетрудно видеть, что для произвольного $n \in \mathbf{N}$ $a_0^{(n)} = 1$*, а каждый последующий коэффициент* $a_k^{(n)}$, $k = 1,2,...,n-1$ *(кроме* $a_n^{(n)}$, $a_n^{(n)} = 1$*), равен сумме двух соседних коэффициентов из предыдущей строки, а именно*

$$a_k^{(n)} = a_{k-1}^{(n-1)} + a_k^{(n-1)},\ k = 1,2,...,n-1. \tag{4.13}$$

Коэффициент $a_n^{(n)}$ *равен* 1 *для любого* $n \in \mathbf{N}$.

Если записать результаты вычисления биномиальных коэффициентов построчно для $n = 0, 1, 2, ...$*, то получим хорошо известную форму представления биномиальных коэффициентов в виде треугольника Паскаля:*

$$\begin{array}{ll}
n = 0: & 1 \\
n = 1: & 1 \quad 1 \\
n = 2: & 1 \quad 2 \quad 1 \\
n = 34: & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
n = 4: & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
n = 5: & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
n = 6: & 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
\end{array}$$

....

Легко проверить, что коэффициенты в каждой строчке треугольника Паскаля совпадают с коэффициентами

C_n^k *,вычисляемыми по формуле (4.9). Например, для* $n=6$ *имеем*

$$C_6^0=1;\;\; C_6^1=\frac{6}{1}=6;\;\; C_6^2=\frac{6\cdot 5}{2!}=15;$$

$$C_6^3=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}=20,$$

$$C_6^4=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=15,\;\; C_6^5=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{5!}=6,\;\; C_6^6=1.$$

Таким образом, коэффициенты $a_k^{(n)}$ *являются биномиальными коэффициентами* C_n^k*, т.е.* $a_k^{(n)}=C_n^k$*. Из формулы (4.12) сразу же получаем известную формулу*

$$C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k. \tag{4.14}$$

Из (4.10) и рекуррентных формул (4.12) с учётом (4.13) и (4.14) получаем окончательно

$$(1+h)^n=1+\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1\right)h+\left(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2\right)h^2+\ldots+$$
$$+\left(C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1}\right)h^{n-1}+1\cdot h^n=$$
$$=1+C_n^1h+C_n^2h^2+\ldots+C_n^{n-1}h^{n-1}+h^n,$$

что и требовалось доказать. ■

Например,

$$(x+y)^5\equiv x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5.$$

Отметим ещё некоторые свойства биномиальных коэффициентов

1) $C_n^k=C_n^{n-k}$. (4.15)

Действительно,

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!},\text{ а } C_n^{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}=\frac{n!}{k!(n-k)!};$$

2) $C_n^o+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$. (4.16)

Это равенство получается моментально из формулы (4.10), если в ней принять $h = 1$:

$$(1+1)^n \equiv 2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k .$$

Литература

1. Элементарная математика: теория чисел, основы комбинаторики, неравенства: учеб. пособие / А.И. Новиков; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. – Рязань, 2010. – 184 с.