

**IX Межрегиональная студенческая физико-математическая
Олимпиада имени Г.Н. Шуппе
(II тур Всероссийской студенческой олимпиады)
Рязанский государственный радиотехнический университет
14 марта 2019 года**

Задача 1. Найти $\prod_{n=3}^{\infty} \frac{(n^3 + 3n)^2}{n^6 - 64}$, где $\prod_{k=3}^n a_k = a_3 a_4 \dots a_n$ и $\prod_{n=3}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=3}^n a_k$

Решение.

Обозначим $a_n = \frac{(n^3 + 3n)^2}{n^6 - 64}$. После преобразований получим:

$$a_n = \left(\frac{n}{n-2} \right) \left(\frac{n}{n+2} \right) \left(\frac{n^2+3}{n^2+2n+4} \right) \left(\frac{n^2+3}{n^2-2n+4} \right) = \left(\frac{n}{n-2} \right) \left(\frac{n}{n+2} \right) \left(\frac{n^2+3}{(n+1)^2+3} \right) \left(\frac{n^2+3}{(n-1)^2+3} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \prod_{k=3}^n a_k &= \prod_{k=3}^n \left(\frac{k}{k-2} \right) \prod_{k=3}^n \left(\frac{k}{k+2} \right) \prod_{k=3}^n \left(\frac{k^2+3}{(k+1)^2+3} \right) \prod_{k=3}^n \left(\frac{k^2+3}{(k-1)^2+3} \right) = \\ &= \left[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \right] \left[\frac{3 \cdot 4}{(n+1)(n+2)} \right] \left[\frac{n^2+3}{2^2+3} \right] \left[\frac{3^2+3}{(n+1)^2+3} \right] = \frac{72}{7} \frac{n(n-1)(n^2+3)}{(n+1)(n+2)[(n+1)^2+3]}. \\ \prod_{n=3}^{\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{72}{7} \frac{n(n-1)(n^2+3)}{(n+1)(n+2)[(n+1)^2+3]} = \frac{72}{7} \end{aligned}$$

Задача 2. Доказать, что трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ делится нацело на 5 для любых целых x , тогда и только тогда, когда его коэффициенты a, b, c делятся нацело на 5.

Решение.

Достаточность очевидна: если a, b, c кратны 5, то и $f(x) = ax^2 + bx + c$ делится нацело на 5 для $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Докажем необходимость. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ делится нацело на 5 для $\forall x \in \mathbb{Z}$. Тогда, положив $x=0$, $x=1$, $x=-1$, получим:

$$f(0) = c, \quad f(-1) = a - b + c, \quad f(1) = a + b + c.$$

Откуда следует, что $f(1) + f(-1) - 2f(0) = 2a$, $f(1) - f(-1) = 2b$ и $f(0) = c$.

То есть, $2a, 2b, c$ делятся на 5.

Задача 3. Найти ранг квадратной матрицы порядка n , элементы которой $a_{ij} = i + j$ для $\forall i, j = 1, \dots, n$.

Решение.

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & \dots & n+2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 3 & \dots & n+1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Задача 4. Найти все многочлены $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, где $a_n \neq 0$ таких, что:
а) коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n$ есть перестановки чисел $0, 1, \dots, n$;

б) все корни уравнения $P_n(x_i) = 0$ - рациональные числа.

Решение.

Уравнение $P_n(x_i) = 0$ не имеет положительных корней, т.к. $P_n(x) > 0$ при $x > 0$.

Пусть $a_0 \neq 0$, то, по условию, есть ровно один $a_k = 0$, где $k = 1, \dots, n-1$. Тогда, по теореме Виета должно быть:

$$x_1 x_2 \dots x_{n-k-1} x_{n-k} + x_1 x_2 \dots x_{n-k-1} x_{n-k+1} + \dots + x_{k+1} x_{k+2} \dots x_{n-1} x_n = \frac{a_k}{a_n} = 0,$$

но это не так, так как

$$x_1 x_2 \dots x_{n-k-1} x_{n-k} + x_1 x_2 \dots x_{n-k-1} x_{n-k+1} + \dots + x_{k+1} x_{k+2} \dots x_{n-1} x_n < 0.$$

Тогда $a_0 = 0$, и пусть $x_n = 0$. Далее рассмотрим

$$Q_{n-1}(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1.$$

Пусть $Q_{n-1}(x_i) = 0$, $i = 1, \dots, n-1$. По теореме Виета, при $n \geq 3$, получим:

$$x_1 x_2 \dots x_{n-1} = \frac{a_1}{a_n} \quad (1)$$

$$x_1 x_2 \dots x_{n-2} + x_1 x_2 \dots x_{n-3} x_{n-1} + \dots + x_2 x_3 \dots x_{n-1} = \frac{a_2}{a_n} \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \quad (3)$$

Делим (2) на (1), получаем

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{a_2}{a_1} \quad (4)$$

Из (3) и (4), используя неравенство для средних

$$\frac{\frac{a_{n-1}}{a_n (n-1)}}{\frac{a_2}{a_1}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \geq \frac{n-1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1}}} = \frac{a_1 (n-1)}{a_2},$$

откуда $\frac{a_2 a_{n-1}}{a_1 a_n} \geq (n-1)^2$. Так как, по условию, $\frac{n^2}{2} > \frac{a_2 a_{n-1}}{a_1 a_n} \geq (n-1)^2$, то $n \leq 3$. Тогда, искомые многочлены,

с учетом рациональности корней:

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + x, \quad P(x) = x^3 + 3x^2 + 2x, \quad P(x) = 2x^2 + x, \quad P(x) = x^2 + 2x, \quad P(x) = x.$$

Задача 5. Сравните $\operatorname{tg}(\sin x)$ и $\sin(\operatorname{tg} x)$ для всех $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

Пусть $f(x) = \operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)$ и $f(0) = 0$.

$$\text{Так как } \operatorname{tg}\left(\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}\right)\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}}\right) > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \text{ то } f(x) > 0 \text{ при } x \in \left[\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ в силу}$$

возрастания на этом промежутке функций $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$.

Докажем, что $f(x) > 0$ при $x \in \left(0, \operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}\right]$. Для этого покажем, что на этом промежутке

$$f'(x) = \frac{\cos^3 x - \cos(\operatorname{tg} x) \cos^2(\sin x)}{\cos^2 x \cos^2(\operatorname{tg} x)} > 0$$

$$\text{По неравенству о средних: } \sqrt[3]{\cos(\operatorname{tg} x) \cos^2(\sin x)} \leq \frac{\cos(\operatorname{tg} x) + 2 \cos(\sin x)}{3}.$$

В силу выпуклости косинуса: $\frac{\cos(\operatorname{tg} x) + 2\cos(\sin x)}{3} \leq \cos\left(\frac{\operatorname{tg} x + 2\sin x}{3}\right)$.

Но $\frac{\operatorname{tg} x + 2\sin x}{3} > x$ при $x \in \left(0, \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2}\right]$, так как

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x + 2\sin x}{3}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x\right) \geq \sqrt[3]{\frac{1}{\cos^2 x} \cos x \cos x} = 1.$$

Тогда $\cos\left(\frac{\operatorname{tg} x + 2\sin x}{3}\right) < \cos x$ и $\sqrt[3]{\cos(\operatorname{tg} x)\cos^2(\sin x)} < \cos x$.

То есть $f'(x) = \frac{\cos^3 x - \cos(\operatorname{tg} x)\cos^2(\sin x)}{\cos^2 x \cos^2(\operatorname{tg} x)} > 0$ и $f(x) > 0$.

Задача 6. Найти $\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\cos x + x^2 \sqrt[3]{x + \frac{1}{8}} \right)^{\frac{3}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}$.

Решение.

Так как $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \sim \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow 0+0$, то $\frac{3}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \sim \frac{3\pi}{2x^3}$ и основание нужно представлять до $o[x^3]$.

Тогда

$$\cos x + x^2 \sqrt[3]{x + \frac{1}{8}} \sim 1 - \frac{x^2}{2} + o[x^3] + \frac{1}{2} x^2 \sqrt[3]{8x+1} \sim 1 - \frac{x^2}{2} + o[x^3] + \frac{1}{2} x^2 \left(1 + \frac{8}{3}x + o[x^3]\right)$$

То есть $\cos x + x^2 \sqrt[3]{x + \frac{1}{8}} \sim 1 + \frac{4}{3}x^3 + o[x^3]$.

Окончательно, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\cos x + x^2 \sqrt[3]{x + \frac{1}{8}} \right)^{\frac{3}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(1 + \frac{4}{3}x^3 \right)^{\frac{3\pi}{2x^3}} = e^{2\pi}$.

Задача 7. Составить уравнения всех алгебраических линий 2-го порядка, проходящих через точки $M_1(-1,0)$, $M_2(1,1)$, $M_3(0,2)$, $M_4(2,0)$, $M_5(3,2)$.

Решение.

1 способ.

Подставим заданные точки в общее уравнение алгебраической линии 2 порядка:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Получим однородную систему относительно a_{ij}

$$\begin{cases} a_{11} + 0a_{12} + 0a_{22} - 2a_{13} + 0a_{23} + a_{33} = 0 \\ a_{11} + 2a_{12} + a_{22} + 2a_{13} + 2a_{23} + a_{33} = 0 \\ 0a_{11} + 0a_{12} + 4a_{22} + 0a_{13} + 4a_{23} + a_{33} = 0, \\ 4a_{11} + 0a_{12} + 0a_{22} + 4a_{13} + 0a_{23} + a_{33} = 0 \\ 9a_{11} + 12a_{12} + 4a_{22} + 6a_{13} + 4a_{23} + a_{33} = 0 \end{cases}$$

с рангом матрицы равным 5. Следовательно, система имеет нетривиальное решение с одной свободной переменной. Тогда линия определяется однозначно до пропорциональности при:

$$a_{11}=1, a_{12}=-\frac{1}{2}, a_{22}=-2, a_{13}=-\frac{1}{2}, a_{23}=\frac{5}{2}, a_{33}=-2$$

Тогда искомое уравнение единственно и имеет вид:

$$x^2 - xy - 2y^2 - x + 5y - 2 = 0.$$

2 способ.

Воспользуемся теоремой о единственности для линий 2-го порядка:

Если на плоскости даны пять различных точек, из которых никакие четыре не лежат на одной прямой, то существует единственная линия второго порядка, проходящая через эти точки.

Из геометрических соображений видно, что единственной линией 2-го порядка будет пара пересекающихся прямых (M_1M_5) и (M_2M_4) определяемых соответственно уравнениями: $x - 2y + 1 = 0$ и $x + y - 2 = 0$.

Тогда искомое уравнение единственно и имеет вид:

$$(x + y - 2)(x - 2y + 1) = x^2 - xy - 2y^2 - x + 5y - 2 = 0.$$

Задача 8. Найти все вторые производные функции $z(x, y)$, если $z = \sqrt{x^2 - y^2} \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

Решение.

Пусть $F(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 - y^2} \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$. Нахождение уже первых производных по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$$

достаточно трудоемкий процесс. Поэтому перепишем исходное уравнение в виде

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0,$$

и его полный дифференциал равен

$$d\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right) - \frac{1}{\cos^2 \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}} d\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right) = 0.$$

Откуда

$$d\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}}\right) = 0, \text{ т.е. } d\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right) = 0.$$

Дифференцируя, получаем

$$d\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right) = \frac{dz}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{(xdx - ydy)z}{(x^2 - y^2)^{3/2}} = 0,$$

$$dz = \frac{(xdx - ydy)z}{(x^2 - y^2)}.$$

$$d^2z = \frac{xdx - ydy}{x^2 - y^2} dz + z \frac{dx^2 - dy^2}{x^2 - y^2} - z(xdx - ydy) \frac{2xdx - 2ydy}{(x^2 - y^2)^2} =$$

$$= -\frac{y^2z}{(x^2 - y^2)^2} dx^2 - \frac{x^2z}{(x^2 - y^2)^2} dy^2 + \frac{xyz}{(x^2 - y^2)^2} dxdy.$$

Откуда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y^2z}{(x^2 - y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2z}{(x^2 - y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xyz}{(x^2 - y^2)^2}.$$

Задача 9.

Найти общее решение дифференциального уравнения $x^2 y'' - x(8x - 1)y' + 4x(4x - 1)y = 0$, $x > 0$, если известно, что $y_1(x) = e^{4x}$ - его частное решение.

Решение.

Для дифференциального уравнения 2-го порядка $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ воспользуемся формулой Остроградского – Лиувилля:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = C \exp \left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx \right],$$

или

$$\frac{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}{(y_1'(x))^2} = \left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \right)' = \frac{C}{(y_1'(x))^2} \exp \left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx \right].$$

Тогда после преобразований, получим:

$$\left(\frac{y(x)}{e^{4x}} \right)' = \frac{C}{e^{8x}} \exp \left[-\int \left(8 - \frac{1}{x} \right) dx \right] = \frac{C}{x}.$$

Откуда $\frac{y(x)}{e^{4x}} = C \int \frac{dx}{x}$ и $y(x) = Ce^{4x} \ln x$. Окончательно, общее решение имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{4x} \ln x + C_2 e^{4x}$$

Задача 10. Найти все решения уравнения $\int_0^{\pi} (1+t)^x \sin t dt = 2 + 4 \arctg \sqrt{x}$ на отрезке $[0,1]$.

Решение.

Обозначим левую часть $f(x)$, правую – $g(x)$. Два корня угадываются:

$$f(0) = \int_0^{\pi} \sin t dt = 2 = g(0), \quad f(1) = 2 + \int_0^{\pi} t \sin t dt = 2 - \int_0^{\pi} t \cdot d(\cos t) = 2 - t \cos t \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos t dt = 2 + \pi = g(1).$$

Осталось убедиться в том, что других корней нет при $x \geq 0$. Используем выпуклость:

$$f'(x) = \int_0^{\pi} \ln(1+t)(1+t)^x \sin t dt, \quad f''(x) = \int_0^{\pi} \ln^2(1+t)(1+t)^x \sin t dt > 0, \quad g'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}(1+x)},$$

$$g''(x) = -\frac{1+3x}{x^{3/2}(1+x)^2} < 0.$$

Таким образом, функция $f(x) - g(x)$ строго выпукла вниз на всей полупрямой $[0, +\infty)$ и не может иметь более двух корней.

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 1$.

Задача 11. Докажите тождество $C_n^{k+m+1} = \sum_{j=k+1}^{n-m} C_{j-1}^k C_{n-j}^m$ при $k+m < n$.

Решение.

Левая часть – число способов положить $k+m+1$ одинаковых шариков в некоторые из ячеек с номерами от 1 до n . Разложив шарики, отсчитаем $k+1$ -ый слева и покрасим его желтым; k шариков слева от него красным, m шариков справа от него – зеленым.



То же число можно сосчитать по-другому: сначала кладем желтый шарик, потом слева от него k красных, а справа m зеленых. Пусть желтый шарик оказался в j -ой ячейке. Очевидно, $k < j < n - m$. Тогда можно C_{j-1}^k способами выбрать ячейки для красных шариков и, независимо от этого, C_{n-j}^m

способами выбрать ячейки для красных шариков. Эти числа способов перемножаются. Осталось просуммировать по всем допустимым j .