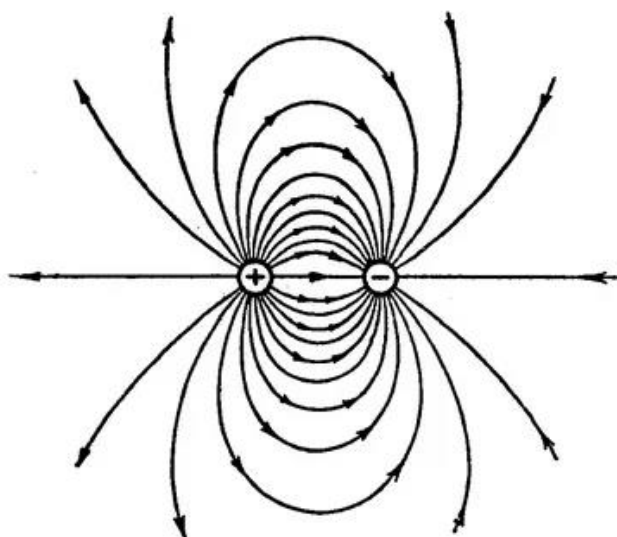


**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. В. Ф. УТКИНА**

**М. А. БУРОБИН, А. С. ИВАНИКОВ, А. Б. МАНОШКИН,
А. В. НИКОЛАЕВ, Ю. В. ЧЕРКАСОВА**

ЭЛЕКТРОСТАТИКА



Рязань 2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Рязанский государственный радиотехнический университет
им. В. Ф. Уткина

М. А. БУРОБИН, А. С. ИВАНИКОВ, А. Б. МАНОШКИН,
А. В. НИКОЛАЕВ, Ю. В. ЧЕРКАСОВА

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Учебное пособие

РЕКОМЕНДОВАНО
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИМ СОВЕТОМ
ФГБОУ ВО «РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.Ф. УТКИНА»
В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВЫСШИХ
УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ ОЧНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ
ВСЕХ ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ
(УРОВЕНЬ: БАКАЛАВРИАТ, СПЕЦИАЛИТЕТ)
И НАПРАВЛЕНИЯ 38.03.02 «МЕНЕДЖМЕНТ» (УРОВЕНЬ: БАКАЛАВРИАТ)

Рязань 2024

УДК 530.1

Электростатика: учеб. пособие / М. А. Буробин, А. С. Иваников, А. Б. Маношкин, А. В. Николаев, Ю. В. Черкасова; Рязан. гос. радиотехн. ун-т им. В. Ф. Уткина. Рязань, 2024. 80 с.

Рассмотрены электростатическое поле в вакууме и в диэлектрике, процессы заряда и разряда конденсатора, основные законы электростатики. Приведено описание четырех лабораторных работ, включающее в себя метод эксперимента, порядок выполнения работ и итоговые контрольные вопросы.

Предназначено для студентов всех направлений подготовки бакалавров и специальностей, изучающих дисциплины «Физика» и «Научные основы инновационных технологий».

Табл. 3. Ил. 39. Библиогр.: 4 назв.

Напряженность и потенциал электрического поля, теорема Гаусса, поляризация диэлектрика, относительная диэлектрическая проницаемость, конденсатор, электроемкость

Печатается по решению научно-методического совета Рязанского государственного радиотехнического университета имени В. Ф. Уткина.

Рецензенты:

А. А. Трубицын, д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры промышленной электроники ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет имени В. Ф. Уткина»;

Т. Г. Авачева, канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующая кафедрой математики, физики и медицинской информатики ФГБОУ ВО «Рязанский государственный медицинский университет имени академика И. П. Павлова».

Буробин Михаил Анатольевич
Иваников Александр Сергеевич
Маношкин Алексей Борисович
Николаев Артем Владимирович
Черкасова Юлия Вадимовна

Электростатика

Редактор М. Е. Цветкова
Корректор И. В. Черникова

Подписано в печать . Формат бумаги 60×84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 5,0.

Тираж 100 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.

© Рязанский государственный
радиотехнический университет
им. В. Ф. Уткина, 2024

1. Элементы теории

В XVII в. в своей знаменитой работе «Математические начала натуральной философии» И. Ньютон вводит понятие силы как обобщающего описания любого воздействия какого-либо материального тела на другое материальное тело вне зависимости от физической природы этого воздействия. При ближайшем рассмотрении все воздействия (силы) можно разделить на две большие группы:

- силы, возникающие при непосредственном соприкосновении взаимодействующих тел (силы трения, силы упругости и т.д.);
- силы, которые могут проявляться на расстоянии, когда между телами нет никакой видимой передающей среды.

Одним из видов дистантного воздействия одного тела на другое является взаимодействие электризованных тел. Современные представления о природе этого взаимодействия основаны на понятии электрического и магнитного полей, посредством которых оно осуществляется. Электромагнитное поле реально существует независимо от нас и, таким образом, является одним из видов материи, обладающим массой, импульсом, энергией и другими физическими параметрами.

1.1. Электростатическое поле в вакууме

1.1.1. Электрический заряд

Понятие «электрический заряд» является одним из важнейших в учении об электричестве наряду с понятием «электрическое поле». Качественные представления об этой величине сформировались еще с античных времен. «В янтаре, – писал Плутарх, – содержится огненная бестелесная сила, которая выходит из него скрытыми путями, если потереть поверхность янтара, и производит то же действие, что и магнитный камень». Современная же терминология была введена американцем

Б. Франклином, который предложил заряд, скапливающийся на потертой кожей стеклянной палочке, считать «положительным», а заряд, скапливающийся на потертом мехом куске смолы, – «отрицательным».

Количественные же опыты по изучению взаимодействия двух зарядов провел в 1785 г. французский физик Ш. Кулон, по результатам которых был сформулирован следующий закон: *сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей эти заряды, прямо пропорциональна произведению их величин и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.* То есть

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.1)$$

где k – коэффициент, определяемый выбором системы измерения.

В системе СГСЭ $k = 1$; в системе СИ $k = 1/4\pi\epsilon_0$, где ϵ_0 – электрическая постоянная [$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл²/(Н·м²)].

Еще раз подчеркнем, что закон Кулона (1.1) справедлив только для точечных зарядов. Точечным называется заряд, если линейные размеры пространства, на котором он сосредоточен, пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием, на котором регистрируется его воздействие. Кроме того, сила кулоновского взаимодействия является центральной, т. е. она направлена вдоль прямой, соединяющей заряды.

Если взаимодействуют одноименные заряды, то сила F в законе (1.1) – это сила отталкивания, если же заряды разных знаков, то сила F – сила притяжения. В любом случае, если мы проведем радиус-вектор \vec{r}_{12} от первого заряда ко второму, то сила, действующая со стороны первого на второй заряд, может быть записана в векторном виде:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}. \quad (1.2)$$

При этом, если заряды одноименно заряжены, то сила совпадает по направлению с радиусом-вектором, если разноименно – то направлена противоположно ему (рис. 1.1).

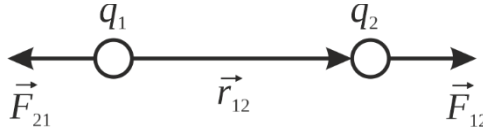


Рис. 1.1

Свойства электрического заряда

1. Заряд инвариантен по отношению к выбору системы отсчета (по аналогии с понятием «масса»). Хотя из специальной теории относительности и следует, что при постоянной массе покоя тела его масса меняется в зависимости от скорости движения тела, но отношение масс двух любых тел при любом изменении скорости движения – постоянно. Аналогичная ситуация имеет место и для зарядов. Заряды могут меняться по абсолютной величине при изменении системы отсчета, однако их отношение будет оставаться неизменным. Тогда, если всегда некий заряд q_0 принимать за единичный, то величина заряда q , измеренная в долях q_0 , будет постоянной.

2. Заряд – величина дискретная, т. е. заряд, полученный телом при электризации, равен: $q = Ne$, где N – целое число, e – элементарный заряд ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл). Материальные носители элементарного заряда: отрицательного – электроны, положительного – протоны.

3. Заряд – величина аддитивная, то есть общий заряд тела определяется алгебраической суммой всех положительных и отрицательных зарядов, находящихся на нем, то есть

$$q_{\Sigma} = \sum q_{+} + \sum q_{-} . \quad (1.3)$$

Тело, суммарный заряд которого равен нулю, называется незаряженным или электронейтральным.

4. Заряд подчиняется закону сохранения – фундаментальному закону природы, который является обобщением опытных фактов и утверждает: *полный заряд системы не может изменяться, если через ее границу не проходят электрически заряженные частицы.*

Это не значит, что сохраняются в отдельности положительные и отрицательные заряды. Могут быть условия, при которых число положительных и отрицательных зарядов меняется. Но если система изолирована, то их сумма будет неизменна.

Для характеристики распределенной системы зарядов вводят понятие плотности зарядов:

- линейная плотность $\tau = dq/dl$ – заряд единицы длины;
- поверхностная плотность $\sigma = dq/dS$ – заряд единицы площади;
- объемная плотность $\rho = dq/dV$ – заряд единицы объема.

1.1.2. Напряженность электрического поля точечного заряда.

Принцип суперпозиции полей

В физике часто используют термин «силовое поле». Силовое поле представляет собой область пространства, в каждой точке которой на тело (материальную точку) действует определенная по величине и направлению сила. В курсе механики мы уже встречали поле силы тяжести.

Электрическое поле проявляет свое присутствие наличием силы, действующей на заряженные тела. Векторная физическая величина \vec{E} , численно равная силе \vec{F} , действующей на единичный ($q=1$ Кл) неподвижный пробный заряд q , называется *напряженностью электрического поля*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1.4)$$

Таким образом, вектор напряженности электрического поля совпадает по величине и по направлению с силой, действующей в данной точке пространства на единичный положительный пробный заряд.

Электрическое поле, создаваемое неподвижными в пространстве и неизменными во времени электрическими зарядами, называют *электростатическим*. Кроме того, различают однородное и неоднородное электрическое поле. Поле считают однородным, если сила, действующая на пробный заряд, одинакова во всех точках пространства, и неоднородным в противном случае.

Например, вектор напряженности электростатического поля точечного заряда q на расстоянии r от него может быть определен по формуле (1.4) с учётом (1.2):

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^3} \vec{r}. \quad (1.5)$$

Из (1.5) видно, что поле точечного заряда неоднородно, а напряженность изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния.

Для наглядного представления электрического поля М. Фарадеем было предложено использовать силовые линии или *линии напряженности*. Эти линии проводят так, чтобы векторы \vec{E} напряженности в любой точке пространства определяли касательную к этой линии. Таким образом, мы определяем направление вектора напряженности. Для задания модуля вектора \vec{E} напряженности в некой точке условно принимают, что число линий, проходящих через единичную площадку, которой принадлежит рассматриваемая точка, расположенную перпендикулярно к этим линиям, должно в заданном масштабе равняться численному значению вектора напряженности поля в окрестности данной точки.

В качестве примера на рис. 1.2 показаны силовые линии поля для одиночных положительного и отрицательного зарядов. Из рисунка можно

сделать вывод о том, что силовые линии электрического поля начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных.

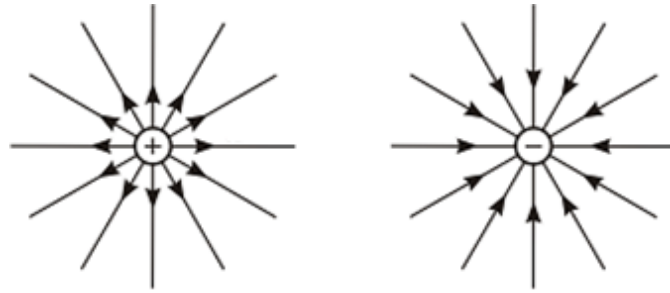


Рис. 1.2

Напряженность электростатического поля для системы из N зарядов определяется в соответствии с принципом суперпозиции: *напряженность электрического поля, создаваемого в любой точке пространства системой зарядов, определяется геометрической суммой напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности в отсутствие других зарядов*, то есть

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i. \quad (1.6)$$

Простой пример применения принципа суперпозиции – это расчет напряженности поля, создаваемого в заданной точке пространства двумя точечными зарядами. Рассмотрим положительные точечные заряды q_1 и q_2 , расположенные на расстоянии d друг от друга.

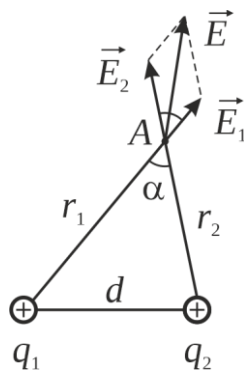


Рис. 1.3

Определим напряженность E поля в точке A , находящейся на расстоянии r_1 от заряда q_1 и на расстоянии r_2 от заряда q_2 (рис. 1.3).

Согласно принципу суперпозиции напряженность результирующего поля в точке A равна

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

где \vec{E}_1 и \vec{E}_2 – напряженности полей, создаваемых зарядами q_1 и q_2 соответственно отдельно друг от друга.

Напряжённости поля каждого из зарядов q_1 и q_2 в отдельности соответственно равны

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1|}{r_1^2}, \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_2|}{r_2^2}.$$

Используя теорему косинусов, определим модуль напряженности результирующего поля по формуле:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \alpha}.$$

В этой формуле $\cos \alpha$ также можно определить по теореме косинусов для треугольника со сторонами d , r_1 , r_2 :

$$\cos \alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{-2r_1r_2}.$$

В итоге модуль напряженности результирующего поля равен

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\left(\frac{q_1}{r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{r_2^2}\right)^2 + 2\frac{|q_1||q_2|}{r_1^2r_2^2} \cos \alpha}.$$

Принцип суперпозиции полей для распределенного заряда продемонстрируем на примере расчета напряженности электрического поля бесконечной заряженной нити. Пусть нить равномерно заряжена с линейной плотностью заряда τ . Определим напряженность поля в точке, отстоящей от нити на расстоянии x (рис. 1.4).

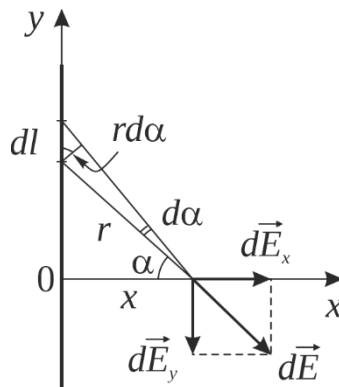


Рис. 1.4

Разобьем заряженную нить на множество элементарных отрезков dl , каждый из которых будет иметь заряд $dq=\tau dl$ и создавать в рассматриваемой точке поле, напряженность которого равна

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dl}{r^2},$$

где r – расстояние от элемента dl до рассматриваемой точки.

Разложим вектор $d\vec{E}$ на ортогональные составляющие:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y.$$

Тогда, согласно принципу суперпозиции полей результирующая напряженность поля в рассматриваемой точке будет равна

$$\vec{E} = \int_L d\vec{E} = \int_L d\vec{E}_x + \int_L d\vec{E}_y.$$

Здесь в силу симметрии $\int d\vec{E}_y = 0$. Составляющую электрического поля $d\vec{E}_x$, направленную перпендикулярно к нити, определим как

$$dE_x = dE \cos \alpha.$$

Кроме того, из прямоугольного треугольника следует, что $\cos \alpha = x/r$. Длину элемента проводника dl также можно найти из прямоугольного треугольника:

$$dl = \frac{r d\alpha}{\cos \alpha}.$$

Тогда напряженность dE поля, создаваемого элементом dl нити, будет равна

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dl}{r^2} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 x} d\alpha.$$

Результирующая напряженность будет определяться как

$$E = \int_L dE \cos \alpha = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 x} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha.$$

Пределы интегрирования по углу α в случае, когда длина L нити много больше расстояния x , будут равны $\alpha_1 = -\pi/2$, $\alpha_2 = \pi/2$. В итоге:

$$E = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 x} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 x} \sin \alpha \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 x} (1 - (-1)) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 x}.$$

1.1.3. Поток вектора напряженности электрического поля.

Теорема Гаусса

Понятие *потока вектора* является одной из важнейших характеристик любого векторного поля. Первоначально это понятие было введено в гидродинамике для описания протекания жидкости через какое-либо сечение. Математически поток жидкости описывается как

$$\Phi = \int_S \vec{v} d\vec{S}. \quad (1.7)$$

Выражение типа $\int \vec{v} d\vec{S}$ встречается в самых различных областях физики и математики, при этом вместо вектора \vec{v} может стоять любой другой вектор. Такие интегралы называются потоком соответствующего вектора через поверхность S . В нашем случае будем рассматривать интеграл

$$\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S}, \quad (1.8)$$

который называется *поток вектора \vec{E} напряженности электрического поля* через заданную поверхность S .

Так как напряженность \vec{E} определяется по принципу суперпозиции (1.6), то правая часть (1.8) примет вид

$$\int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S \sum_i \vec{E}_i d\vec{S}. \quad (1.9)$$

Поскольку поток – величина аддитивная, то общий поток определяется алгебраической суммой отдельных потоков, которые по отдельности могут быть как положительными, так и отрицательными:

$$\Phi = \sum_i \left(\int_S \vec{E}_i d\vec{S} \right) = \sum_i \Phi_i. \quad (1.10)$$

Одним из основных законов электродинамики, а в частности электростатики, является теорема, сформулированная в середине XIX века немецким математиком, физиком и астрономом К. Ф. Гауссом. Русский математик М. В. Остроградский вывел формулу, предложенную Гауссом, в общем виде для любого векторного поля.

Теорема Гаусса (теорема Остроградского – Гаусса): *поток вектора \vec{E} напряженности электростатического поля через любую замкнутую поверхность площадью S прямо пропорционален алгебраической сумме находящихся внутри данной поверхности зарядов:*

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i. \quad (1.11)$$

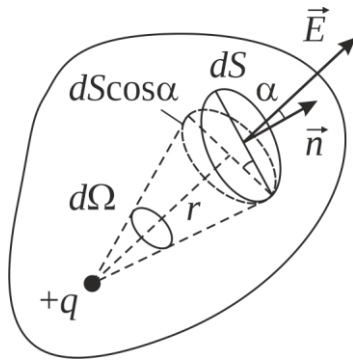


Рис. 1.5

Доказательство теоремы. Рассмотрим поле изолированного точечного заряда q . Окружим этот заряд произвольной поверхностью S и найдем поток вектора \vec{E} сквозь элементарную площадку dS (рис. 1.5):

$$d\Phi = E dS \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS \cos \alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega,$$

где $d\Omega = \frac{\cos \alpha}{r^2} dS$ – телесный угол, опирающийся

на элемент поверхности dS .

Определим поток вектора \vec{E} через всю поверхность S путем интегрирования в пределах полного телесного угла от 0 до 4π стерадиан:

$$\Phi = \int d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.12)$$

Если заряд q расположен за пределами замкнутой поверхности, то при интегрировании по S внешняя сторона S будет видна из точки q под углом $\Omega > 0$, а внутренняя – под углом $\Omega < 0$ (оба угла по модулю равны). Следовательно, $\Phi = 0$. Это означает, что сколько линий напряженности входит в объем, ограниченный поверхностью S , столько и выходит из него.

Если электрическое поле создается системой точечных зарядов q_1, q_2, \dots , то согласно (1.10)

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i.$$

Теорема доказана.

Существует и дифференциальная форма теоремы Гаусса, которая связывает значение напряженности поля в окрестности заданной точки с объемной плотностью заряда ρ в окрестности той же точки.

Рассмотрим заряд q , охватываемый замкнутой поверхностью S объемом V , как $q = \langle \rho \rangle V$, где $\langle \rho \rangle$ – среднее по объему значение плотности заряда. Подставим это выражение в сформулированную ранее теорему Гаусса (1.11), разделив обе части уравнения на V :

$$\frac{1}{V} \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0}. \quad (1.13)$$

Устремим рассматриваемый объем V к нулю. При этом величина $\langle \rho \rangle$ будет стремиться к значению объемной плотности заряда ρ в данной точке. Получаем:

$$\lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V} \oint_S \vec{E} d\vec{S} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.14)$$

Выражение в левой части (1.14) называют *дивергенцией* электрического поля и обозначают как $\operatorname{div} \vec{E}$.

Таким образом, *теорема Гаусса в дифференциальной форме* записывается так:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.15)$$

дивергенция напряженности электрического поля в данной точке зависит только от объемной плотности электрического заряда в этой точке.

Выражение для дивергенции будет зависеть от выбора системы координат. В декартовой системе координат дивергенцию можно представить в виде:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{E}. \quad (1.16)$$

Здесь ∇ – векторный дифференциальный оператор набла (оператор Гамильтона):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Тогда выражение (1.16) можно переписать как

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (1.17)$$

Физический смысл теоремы Гаусса в дифференциальной форме состоит в следующем. В тех точках поля, где дивергенция положительна, существуют источники поля (положительные заряды), а в тех точках, где она отрицательна, – стоки (отрицательные заряды). Линии напряженности начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных. Если в данной точке нет зарядов, то дивергенция поля равна нулю.

Основная проблема при использовании теоремы Гаусса на практике – вычисление потока вектора напряженности электрического поля. Наиболее просто это осуществляется в случае симметричных систем распределения заряда. При использовании теоремы в этом случае поверх-

ность, окружающая заряды, должна иметь тот же характер симметрии, что и система зарядов.

1.1.4. Потенциальность электростатического поля.

Теорема о циркуляции вектора \vec{E}

Ранее мы рассматривали электростатическое поле с точки зрения силы, которая действует со стороны этого поля на заряд. Однако в механике мы использовали и другой подход к исследованию свойств системы – энергетический. При этом мы рассматривали энергию, которой обладает система, и характер ее изменения при совершении работы. Попробуем применить подобный подход и в случае рассмотрения электростатического поля.

Пусть неподвижный точечный заряд q создает в вакууме на расстоянии r электрическое поле с напряженностью

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r,$$

где \vec{e}_r – орт-вектор.

В этом поле по некой траектории движется заряд q' , переходя из точки 1 в точку 2 (рис. 1.6). Работа A_{1-2} , совершаемая силами поля по перемещению заряда q' , определяется как

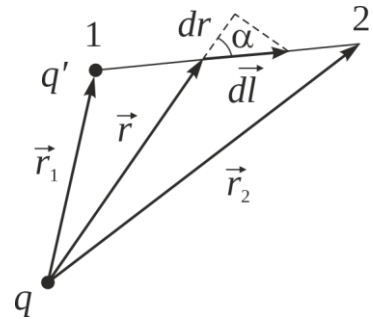


Рис. 1.6

$$A_{1-2} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{1}{r^2} \vec{e}_r d\vec{l} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (1.18)$$

где r_1 и r_2 – модули радиус-векторов точек 1 и 2 соответственно.

Таким образом, работа сил электростатического поля не зависит от вида траектории, а определяется лишь начальным и конечным значениями некой скалярной функции от положения рассматриваемых точек. Такие силы называются *консервативными (потенциальными)*.

Так как любую систему зарядов можно представить в виде элементарных точечных зарядов, то поле, создаваемое этой системой, также будет консервативным (потенциальным).

Теперь допустим, что какой-то заряд движется в электрическом поле по замкнутой траектории. Поскольку электростатическое поле потенциально, то работа сил поля по перемещению заряда по замкнутой траектории равна нулю. С другой стороны, эта работа определяется как

$$A = \oint \vec{F} d\vec{l} = \oint q \vec{E} d\vec{l} = q \oint \vec{E} d\vec{l} = 0.$$

Так как $q \neq 0$, то

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (1.19)$$

Интеграл, стоящий в левой части (1.19), называется *циркуляцией* вектора \vec{E} по замкнутому контуру, а само выражение – запись *теоремы о циркуляции* вектора напряженности электрического поля, которая является еще одной формой определения потенциальности поля: *векторное поле называется потенциальным, если циркуляция вектора по любому замкнутому контуру равна нулю.*

Кроме того, из этой же теоремы следует, что силовые линии электростатического поля не могут быть замкнутыми: они должны где-то обязательно начинаться и заканчиваться, то есть должны существовать источники поля (электрические заряды). Действительно, если бы силовые линии были замкнуты, то обход вдоль силовой линии в положительном (или отрицательном) направлении дал бы суммарную работу при таком перемещении, отличную от нуля, что противоречило бы теореме о циркуляции.

1.1.5. Потенциал электростатического поля

Как было показано ранее, для поля, создаваемого точечным зарядом q , работа по перемещению пробного заряда q' определяется выражением

(1.18). Так как электростатическое поле консервативно (потенциально), то применима теорема о потенциальной энергии, согласно которой работа поля осуществляется за счет убыли потенциальной энергии:

$$A = -\Delta W_p. \quad (1.20)$$

Физическая величина φ , равная отношению потенциальной энергии W_p точечного пробного заряда q' , помещенного в данную точку поля, к величине этого заряда, называется потенциалом электростатического поля:

$$\varphi = \frac{W_p}{q'}. \quad (1.21)$$

Тогда работа по перемещению пробного заряда из точки 1 в точку 2 будет равна

$$A_{12} = q'(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (1.22)$$

где φ_1 и φ_2 – потенциал в точках 1 и 2 соответственно.

Величину $U = \varphi_1 - \varphi_2$ называют *разностью потенциалов* или *электрическим напряжением*. Сравнивая выражения (1.18) и (1.22), получаем, что потенциал поля точечного заряда равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + C, \quad (1.23)$$

где C – постоянная, определяемая выбором системы отсчета. Обычно на практике система отсчета выбирается таким образом, чтобы $C = 0$.

Если же мы имеем не один точечный заряд, а систему зарядов q_1, q_2, \dots, q_N , то потенциал поля, создаваемого такой системой, равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i, \quad (1.24)$$

где φ_i – потенциал, создаваемый в данной точке поля i -м зарядом.

1.1.6. Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом

На практике при описании поля использование потенциала осуществляется чаще, чем напряженности. Это происходит по нескольким причинам:

- описание с помощью потенциала гораздо проще, чем при использовании напряженности. Напряженность – вектор, и поэтому для каждой точки поля необходимо знать в общем случае три скалярных величины – составляющие вектора напряженности по трем направлениям. Потенциал же – скалярная величина, которая полностью определяется в любой точке своим единственным численным значением;
- на практике гораздо легче измерять разность потенциалов, чем напряженность поля;
- то, что потенциал определяется только с точностью до некоторой постоянной, на практике не играет особой роли, так как во все выражения входит либо разность потенциалов, либо производная от потенциала, которые в любом случае эту постоянную не содержат.

Как бы то ни было, возможно описание одного и того же поля как с помощью вектора напряженности, так и с помощью потенциала. Тогда между этими характеристиками существует взаимосвязь.

Элементарная работа δA , совершаемая электрическим полем по перемещению заряда q' , определяется соотношением

$$\delta A = \vec{F} d\vec{l} = q' \vec{E} d\vec{l} = q' E_l dl, \quad (1.25)$$

где E_l – проекция вектора \vec{E} на направление перемещения $d\vec{l}$.

С другой стороны, в случае потенциального поля справедливы соотношения (1.20) и (1.21). Тогда элементарная работа будет равна

$$\delta A = -q' d\varphi. \quad (1.26)$$

Приравнивая правые части выражений (1.25) и (1.26), получаем:

$$q'E_l dl = -q'd\varphi. \quad (1.27)$$

Отсюда

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}. \quad (1.28)$$

Перемещение $d\vec{l}$ можно взять в любом направлении, в частности вдоль координатных осей x, y, z , тогда

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (1.29)$$

В векторном виде выражение (1.29) примет вид:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) = -\text{grad } \varphi = -\nabla\varphi. \quad (1.30)$$

Соотношение (1.30) показывает, что напряженность электрического поля в данной точке направлена в сторону максимального убывания потенциала (от большего – к меньшему).

Для графического представления электрического поля, наряду с силовыми линиями, используются и *эквипотенциальные поверхности* – воображаемые поверхности, все точки которых имеют одинаковый потенциал.

Свойства эквипотенциальных поверхностей:

1) при перемещении вдоль эквипотенциальной поверхности потенциал не изменяется ($d\varphi/dl = 0$), следовательно, касательная составляющая E_l вектора \vec{E} равна нулю, значит, вектор \vec{E} в каждой точке ортогонален к эквипотенциальной поверхности (рис. 1.7);

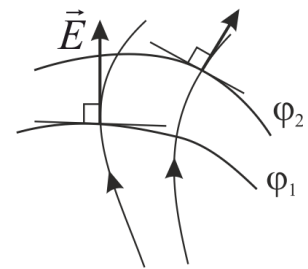


Рис. 1.7

2) если эквипотенциальные поверхности проводить с постоянным шагом по потенциалу, то в той области поля, где соседние эквипотенциальные поверхности наиболее близко подходят друг к другу, напряжен-

ность поля больше, и наоборот, в местах, где расстояние между эквипотенциальными поверхностями больше, – напряженность поля меньше.

1.1.7. Примеры расчета электрических полей

Пример 1. Поле бесконечной плоскости, равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ .

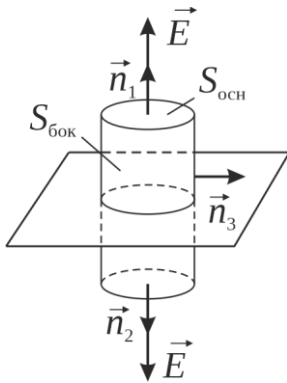


Рис. 1.8

Поверхность, через которую будем искать поток вектора \vec{E} , выберем в форме полого цилиндра, основания которого параллельны рассматриваемой плоскости (рис. 1.8). Из соображений симметрии ясно, что линии напряженности выходят из заряженной плоскости и уходят в бесконечность перпендикулярно к ее поверхности. Так как заряд по плоскости распределен равномерно, то и плотность силовых линий постоянна.

Поток вектора напряженности через выбранную поверхность можно представить в виде:

$$\Phi = E_{n1}S_{\text{осн}} + E_{n2}S_{\text{осн}} + E_{n3}S_{\text{бок}},$$

где $S_{\text{осн}}$ – площадь основания цилиндра, $S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности цилиндра.

Так как вектор \vec{E} параллелен боковой поверхности цилиндра, то $E_{n3} = 0$, а $E_{n1} = E_{n2} = E_n$. Тогда:

$$\Phi = E_n S_{\text{осн}} + E_n S_{\text{осн}} = 2E_n S_{\text{осн}}.$$

Заряд, охватываемый цилиндрической поверхностью, равен $q = \sigma S_{\text{осн}}$. Согласно теореме Гаусса $\Phi = q/\epsilon_0$. В нашем случае

$$2E_n S_{\text{осн}} = \frac{\sigma S_{\text{осн}}}{\epsilon_0},$$

откуда

$$E_n = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (1.31)$$

Используя связь между напряженностью и потенциалом в виде (1.28), найдем разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях x_1 и x_2 от плоскости:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E_n dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} (x_2 - x_1). \quad (1.32)$$

Пример 2. Поле сферы радиусом R , по поверхности которой равномерно распределен заряд q .

Электрическое поле сферы центрально-симметричное, т. е. вектор \vec{E} в каждой точке перпендикулярен к поверхности, а модуль вектора \vec{E} зависит только от расстояния r до центра сферы (рис. 1.9, а).

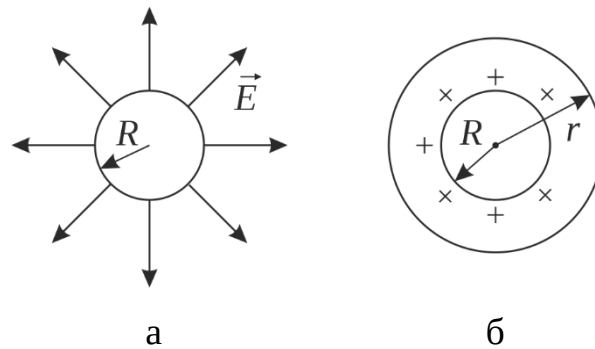


Рис. 1.9

Определим напряженность электрического поля на расстоянии от центра $r < R$. Поскольку заряды распределены по поверхности сферы, любая произвольно выбранная замкнутая поверхность, расположенная внутри сферы, охватывать заряды не будет. Тогда согласно теореме Гаусса поток \vec{E} через эту поверхность равен нулю, а следовательно, $E = 0$.

Теперь рассмотрим случай $r \geq R$. Выберем произвольную замкнутую поверхность в форме сферы радиусом r , концентричную с рассматриваемой сферой (рис. 1.9, б). Поток вектора \vec{E} через поверхность сферы радиусом r равен

$$\Phi = E(r)S = E(r)4\pi r^2.$$

Согласно теореме Гаусса $\Phi = q/\varepsilon_0$. Тогда

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \quad (1.33)$$

Таким образом, функция $E(r)$ зависимости напряженности от расстояния от центра сферы имеет вид:

$$E(r) = \begin{cases} 0, & r \leq R, \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r > R. \end{cases} \quad (1.34)$$

Найдем разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 ($R \leq r_1 < r_2$) от центра сферы, по формуле:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (1.35)$$

Поскольку внутри сферы (при $r \leq R$) электрическое поле отсутствует, то потенциал постоянен и равен потенциалу на поверхности:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}. \quad (1.36)$$

А за пределами сферы (при $r > R$) потенциал убывает обратно пропорционально величине r . Таким образом, функция $\varphi(r)$ зависимости потенциала от расстояния от центра сферы имеет вид:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}, & r \leq R, \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r > R. \end{cases} \quad (1.37)$$

Зависимости напряженности E и потенциала φ электрического поля от расстояния r от центра равномерно заряженной сферы показаны на рис. 1.10.

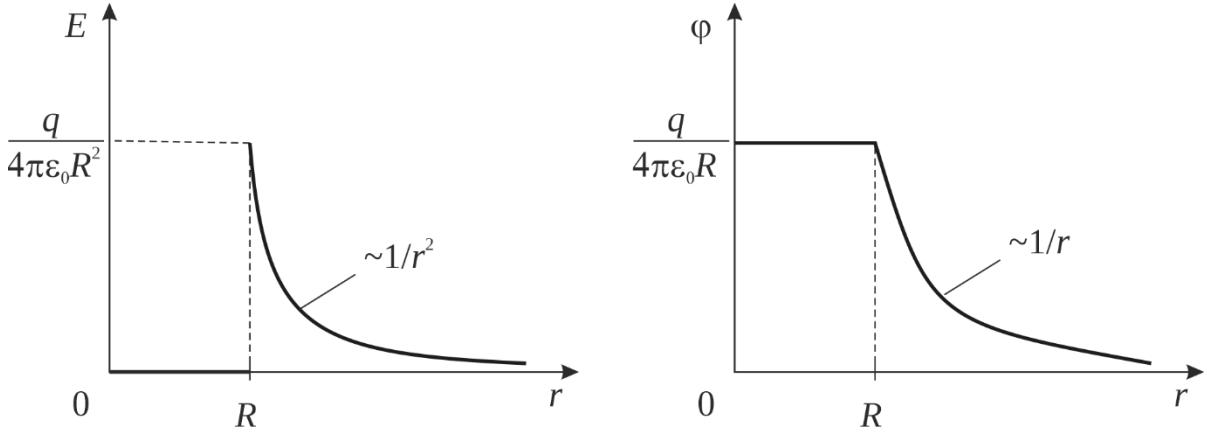


Рис. 1.10

Пример 3. Поле шара радиусом R , по объему которого равномерно распределен заряд q .

Поле шара так же, как и сферы, будет центрально-симметричным. Определим напряженность электрического поля внутри шара на расстоянии от центра $r \leq R$. В качестве замкнутой поверхности выберем концентрическую сферу радиусом r . Поток вектора \vec{E} через поверхность сферы радиусом r равен

$$\Phi = E(r)S = E(r)4\pi r^2.$$

По теореме Гаусса поток \vec{E} через поверхность S равен $\Phi = q'/\epsilon_0$. Здесь $q' = \rho V'$, где ρ – объемная плотность заряда, $V' = (4/3)\pi r^3$ – объем, заключенный внутри выбранной сферической поверхности. Тогда

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0}. \quad (1.38)$$

Учитывая, что объемная плотность заряда равна

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{3q}{4\pi R^3},$$

получаем:

$$E(r) = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (1.39)$$

Электрическое поле вне шара ($r > R$) идентично полю сферы:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.40)$$

Найдем разность потенциалов между точками, лежащими внутри шара на расстояниях r_1 и r_2 ($r_1 < r_2 < R$) от центра, по формуле:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} (r_2^2 - r_1^2). \quad (1.41)$$

Из формулы (1.41) видно, что потенциал внутри шара (при $r < R$) в зависимости от расстояния r растет, как функция r^2 . А за пределами шара (при $r > R$) так же, как у сферы, потенциал убывает обратно пропорционально величине r . Таким образом, функция $\varphi(r)$ зависимости потенциала от расстояния от центра шара имеет вид:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{qr^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}, & r \leq R, \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R. \end{cases} \quad (1.42)$$

Зависимости напряженности и потенциала электрического поля от расстояния от центра равномерно заряженного шара показаны на рис. 1.11.

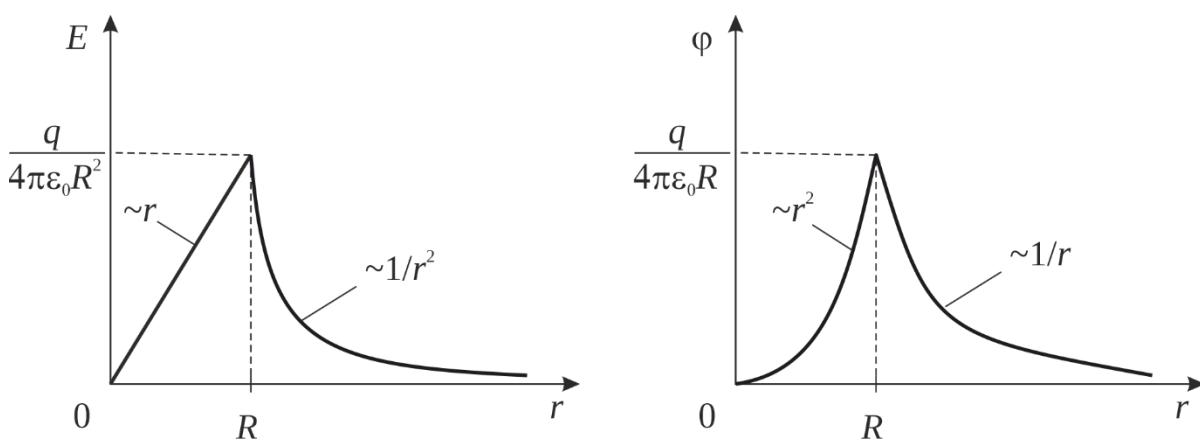


Рис. 1.11

1.2. Электрическое поле в веществе

1.2.1. Электростатическая индукция

Ранее было рассмотрено, каким образом можно описать электростатическое поле в вакууме. Однако на практике мы обычно имеем дело с различного рода средами, и с этой точки зрения более важно определение характеристик поля в веществе.

Это можно сделать на основании уже известных нам принципов, так как с точки зрения классической электронной теории вещества оно представляет собой вакуум, «испорченный» электрическими зарядами частиц, причем на долю заряженных тел приходится ничтожная ($\approx 10^{-15}$) часть всего объема, занимаемого телом. При помещении вещества в электрическое поле заряды вещества начинают смещаться: «отрицательные» – против поля; «положительные» – по полю. В результате в отдельных областях вещества появляются нескомпенсированные макроскопические заряды различных знаков. Это явление называется *электростатической индукцией* (наведением), а заряды, появившиеся в результате, – *индукционными зарядами*. К возникновению индукционных зарядов с точки зрения классической электронной теории и сводится влияние вещества на электрическое поле.

Индукцированные заряды создают собственное электрическое поле, которое согласно принципу суперпозиции накладывается на поле первичных зарядов. Однако образование индуцированных зарядов в материалах с различными электрическими свойствами (проводниках и диэлектриках) происходит по-разному. Таким образом, различна и степень влияния вещества на внешнее поле.

1.2.2. Электрическое поле в диэлектриках

Диэлектриками (изоляторами) называются тела, в которых отсутствуют свободные заряды, способные к перемещению по объему. В принципе на практике во всех телах в той или иной мере такие заряды имеются, однако их концентрация в диэлектриках в 10^{15} - 10^{20} раз меньше, чем в проводниках.

Так как и диэлектрики, и проводники состоят из атомов и молекул, то, естественно, сами по себе заряды в диэлектриках существуют: положительно заряженные ядра атомов и отрицательно заряженные электроны. В каждом атоме или молекуле эти заряды связаны между собой так, что в целом атомы и молекулы электронейтральны. Однако под действием электрического поля центр тяжести зарядов может несколько смещаться относительно положения равновесия. Это смещение будет происходить до тех пор, пока сила, действующая со стороны внешнего электрического поля, не уравнивается силой связи частиц в атоме или молекуле. В этом случае частица превращается в *диполь*, ориентированный вдоль направления внешнего поля. Таким образом, поле в диэлектрике определяется суперпозицией внешнего поля и полей диполей.

Электрический диполь – это система двух одинаковых по модулю разноименных точечных зарядов $+q$ и $-q$, находящихся на некотором расстоянии l друг от друга (рис. 1.12).

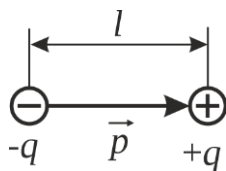


Рис. 1.12

Расстояние l называют *плечом диполя*. Диполь считают точечным, если расстояние r от диполя до рассматриваемых точек поля значительно больше плеча l диполя. Электрический диполь создает вокруг себя электрическое поле и взаимодействует с внешним полем. Основная характеристика диполя – *дипольный момент*:

$$\vec{p} = |q|\vec{l} \quad (1.43)$$

вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному.

Электрическое поле диполя. Определим потенциал поля в произвольной точке, находящейся на расстоянии r от точечного диполя (рис. 1.13, а):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_{(+)}} - \frac{q}{r_{(-)}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r_{(-)} - r_{(+)})}{r_{(+)}r_{(-)}}.$$

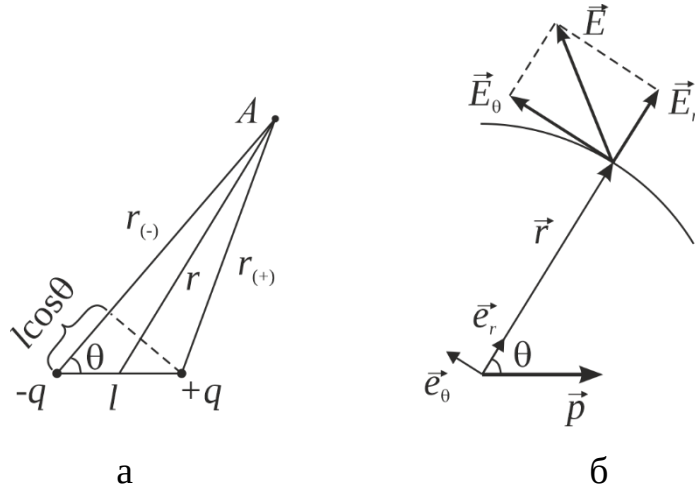


Рис. 1.13

Так как $r \gg l$, то $r_{(-)} - r_{(+)} \approx l \cos \theta$ и $r_{(+)}r_{(-)} \approx r^2$. В итоге получаем:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}. \quad (1.44)$$

Теперь определим напряженность поля диполя. Для этого выберем полярную систему координат. Представим вектор \vec{E} как векторную сумму двух составляющих:

$$\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta,$$

где \vec{E}_r – радиальная составляющая, заданная орт-вектором \vec{e}_r ; \vec{E}_θ – азимутальная составляющая, заданная орт-вектором \vec{e}_θ (рис. 1.13, б).

Используя выражение для градиента потенциала в полярной системе координат, учитывая (1.44), получаем выражения для модулей составляющих E_r и E_θ :

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3},$$

$$E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}.$$

Отсюда модуль вектора \vec{E} равен

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}. \quad (1.45)$$

Таким образом, электрическое поле диполя является симметричным относительно его оси, а также относительно прямой, проходящей через центр диполя перпендикулярно к оси. На рис. 1.14 изображены линии напряженности и эквипотенциали электрического поля диполя.

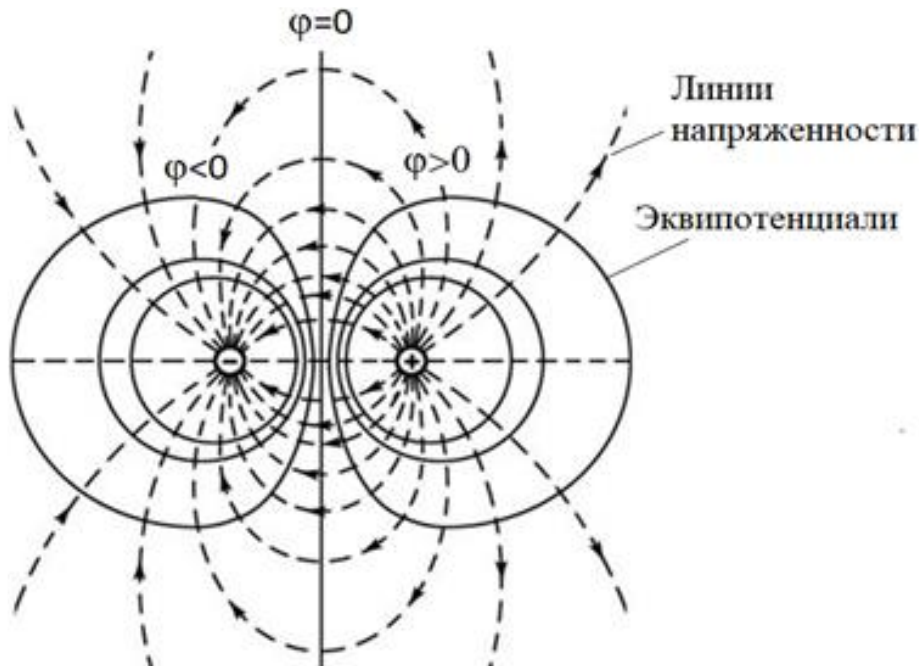


Рис. 1.14

Момент сил, действующих на диполь. Если поместить диполь в однородное электрическое поле, то заряды $+q$ и $-q$ окажутся под действи-

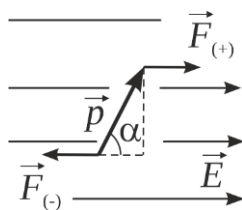


Рис. 1.15

ем равных по величине, но противоположных по направлению сил $\vec{F}_{(+)}$ и $\vec{F}_{(-)}$ (рис. 1.15). Эти силы образуют пару, плечо которой равно $l \sin \alpha$. Модуль каждой силы равен qE . В результате момент сил,

действующих на диполь, $M = qEl \sin \alpha$ или в векторной форме

$$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}] . \quad (1.46)$$

Энергия диполя в электрическом поле. Под действием момента сил происходит поворот диполя в электростатическом поле, при этом совершается работа:

$$A = \int_{\alpha} M d\alpha = \int_{\alpha} pE \sin \alpha d\alpha = -pE \cos \alpha , \quad (1.47)$$

где α – угол между векторами \vec{p} и \vec{E} (см. рис. 1.15).

С другой стороны, эта работа происходит за счет убыли потенциальной энергии диполя, находящегося в электрическом поле, $A = -\Delta W_p$. Следовательно, диполь, находясь в электрическом поле, обладает энергией

$$W_p = -pE \cos \alpha + const . \quad (1.48)$$

Выбор $const$ осуществляется следующим образом:

- если $\alpha = \pi / 2$, то $W_p = 0$;
- если $\alpha = 0$, то $W_p = -pE$ (положение устойчивого равновесия);
- если $\alpha = \pi$, то $W_p = pE$ (положение неустойчивого равновесия).

В общем случае можно записать, что потенциальная энергия диполя в электрическом поле равна

$$W_p = -\vec{p} \vec{E} . \quad (1.49)$$

Сила, действующая на диполь в неоднородном поле. Если поместить диполь во внешнее неоднородное электрическое поле, то силы, действующие на положительный и отрицательный заряды диполя, будут неодинаковы и по направлению, и по величине. В простейшем случае электрическое поле неоднородно только вдоль одной оси (рис. 1.16). Тогда диполь не только

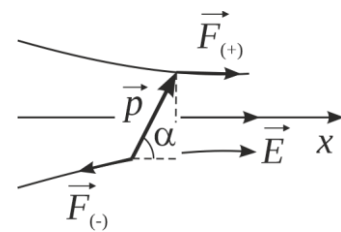


Рис. 1.16

поворачивается под действием момента сил (1.46), но и втягивается в область более сильного поля под действием силы

$$\vec{F} = -\nabla W_p.$$

Проекция этой силы на ось x равна

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x}(-pE \cos \alpha) = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha. \quad (1.50)$$

1.2.3. Поляризация диэлектриков. Вектор поляризации.

Связанные и сторонние заряды

Описанное ранее явление электростатической индукции в диэлектрике приводит к появлению в некоторых макроскопических областях диэлектрика нескомпенсированных электрических зарядов. По механизму их образования все диэлектрики делятся на *полярные* и *неполярные*. К неполярным относятся вещества (H_2 , O_2 , N_2 и т.п.), у которых в отсутствие внешнего электрического поля дипольный момент каждой частицы равен нулю, а под действием электрического поля происходит образование диполей с дипольным моментом \vec{p} , ориентированным в направлении вектора напряженности; к полярным – вещества (CO , NH , HCl и т.п.) с отличным от нуля исходным дипольным моментом частиц. Без внешнего электрического поля вследствие теплового движения отдельные дипольные моменты ориентированы хаотически, а внесение диэлектрика во внешнее электрическое поле приводит к их упорядоченной ориентации. В обоих случаях любой элементарный объем диэлектрика имеет во внешнем электрическом поле не равный нулю суммарный дипольный момент. Такой диэлектрик называется *поляризованным*, а процесс возникновения такого состояния диэлектрика – *поляризацией*.

Иначе поляризованным называется диэлектрик, имеющий в любом макрообъеме не равный нулю суммарный дипольный момент $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$, где \vec{p}_i – дипольный момент отдельной частицы.

Так как тела, состоящие из одного и того же материала, имеют различную массу, а таким образом, и размеры, то для их однообразного количественного описания вводят понятие *вектора поляризации* \vec{P} , который определяется как дипольный момент единицы объема:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_i, \quad (1.51)$$

где ΔV – физически бесконечно малый объем вещества.

Вектор поляризации обширного класса изотропных диэлектриков связан с напряженностью поля в диэлектрике соотношением

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}, \quad (1.52)$$

где χ – *диэлектрическая восприимчивость* диэлектрика (безразмерная величина, характеризующая свойства диэлектрика).

Однако существуют отдельные виды диэлектриков, для которых соотношение (1.52) не применимо. Это ионные кристаллы, электреты и сегнетоэлектрики. У последних зависимость \vec{P} от \vec{E} нелинейная и \vec{P} зависит от предшествующих значений \vec{E} , т. е. наблюдается явление *гистерезиса*.

Как было сказано ранее, действие электрического поля на диэлектрик сводится к смещению зарядов, имеющих в нем, относительно положения равновесия. Заряды, входящие в состав молекул диэлектрика, называются *связанными*. Под действием электрического поля связанные заряды немного смещаются относительно положения равновесия, не покидая пределов молекулы. Заряды, находящиеся внутри диэлектрика, но не входящие в состав молекул, называются *сторонними* или *свободными*.

К сторонним относятся также заряды, расположенные за пределами диэлектрика.

Таким образом, электрическое поле в диэлектрике является суперпозицией поля \vec{E}_0 сторонних зарядов и поля \vec{E}' связанных зарядов:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'. \quad (1.53)$$

Если однородный диэлектрик находится в электрическом поле, то он остается нейтральным в объеме благодаря взаимной компенсации положительных и отрицательных зарядов, расположенных друг возле друга. Иначе дело обстоит в тонком приповерхностном слое диэлектрика. При поляризации у той грани диэлектрика, в которую входят силовые линии поля, образуется избыток отрицательных зарядов, у противоположной – избыток положительных. Эти заряды распределяются по поверхности диэлектрика с поверхностной плотностью σ' . Кроме связанных зарядов на поверхности могут располагаться сторонние заряды с поверхностной плотностью σ .

Между модулем вектора поляризации и поверхностной плотностью связанных зарядов σ' имеется простая связь. Выделим в поляризованном диэлектрике косой цилиндр длиной l , с площадью оснований ΔS (рис. 1.17). Вектор напряженности \vec{E} поля образует с вектором нормали \vec{n} к основанию цилиндра угол α . Объем такого цилиндра $\Delta V = l\Delta S \cos \alpha$.

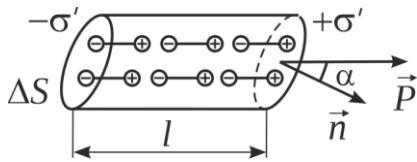


Рис. 1.17

Суммарный дипольный момент молекул внутри цилиндра равен

$$\sum_i p_i = q'l = \sigma' \Delta S l.$$

Согласно формуле (1.51) поляриза-

ция будет равна

$$P = \frac{1}{\Delta V} \sum_i p_i = \frac{\sigma' l \Delta S}{l \Delta S \cos \alpha} = \frac{\sigma'}{\cos \alpha},$$

откуда $P \cos \alpha = \sigma'$. Здесь $P \cos \alpha = P_n$ – нормальная составляющая вектора \vec{P} . В итоге получаем:

$$P_n = \sigma'. \quad (1.54)$$

1.2.4. Диэлектрическая проницаемость вещества

На практике для характеристики диэлектрических свойств вещества чаще используют *относительную диэлектрическую проницаемость*, определяемую как

$$\varepsilon = 1 + \chi. \quad (1.55)$$

Чтобы понять смысл диэлектрической проницаемости, рассмотрим пластину из изотропного диэлектрика, помещенную в однородное электрическое поле напряженностью \vec{E}_0 (рис. 1.18). При поляризации диэлектрика на его поверхности возникнет нескомпенсированный связанный заряд σ' , который создаст в диэлектрике электрическое поле напряженностью $E' = \sigma' / \varepsilon_0$. Напряженность суммарного поля будет определяться формулой (1.53), которая в проекции на нормаль \vec{n} к поверхности примет вид:

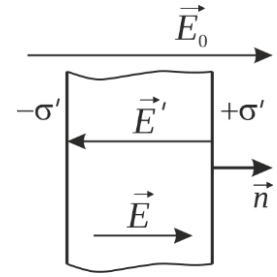


Рис. 1.18

$$E = E_0 - E' = E_0 - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \quad (1.56)$$

Как было показано, $\sigma' = P_n$. С другой стороны, $P_n = \chi \varepsilon_0 E_n = \chi \varepsilon_0 E$. Тогда

$$E = E_0 - \frac{\chi \varepsilon_0 E}{\varepsilon_0} = E_0 - \chi E.$$

Отсюда $E = E_0 / (1 + \chi)$. В итоге с учетом (1.55) получаем:

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}. \quad (1.57)$$

Таким образом, относительная диэлектрическая проницаемость среды показывает, во сколько раз напряженность внешнего электрического поля больше напряженности поля внутри диэлектрика.

1.2.5. Теорема Гаусса для диэлектрической среды. Вектор электрического смещения

Для нахождения напряженности электрического поля в диэлектрике может быть использована теорема Гаусса

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q_\Sigma. \quad (1.58)$$

Под q_Σ следует понимать алгебраическую сумму всех сторонних (q) и связанных (q') зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью S :

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (q + q'). \quad (1.59)$$

Необходимо отметить, что использование этого соотношения на практике для расчета поля затруднено, так как заранее неизвестно, каким образом будут располагаться связанные заряды во внешнем поле. Ситуацию можно поправить, если учесть, что сами по себе молекулы, образующие диполи, электрически нейтральны и вклад в суммарный поток вектора \vec{E} в диэлектрике дают только те диполи, которые «разрезаются» поверхностью S .

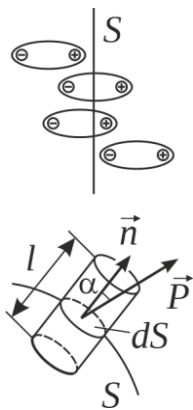


Рис. 1.19

Рассмотрим элементарный участок поверхности dS (рис. 1.19), который наклонен к силовым линиям поля под углом α . Эта поверхность «разрезает» dN диполей, лежащих внутри объема, образованного косым цилиндром с площадью основания dS и образующей l , равной длине молекулы-диполя:

$$dN = n l dS \cos \alpha,$$

где n – концентрация молекул диэлектрика.

Заряд, оставшийся внутри диэлектрика при «разрезании» dN диполей, равен

$$dq' = -q_0 dN = -nq_0 l dS \cos \alpha,$$

где q_0 – заряд диполя.

С учетом того, что $\vec{P} \uparrow \uparrow \vec{E}$, модуль вектора \vec{P} равен $P = nq_0 l$ ($q_0 l$ – дипольный момент молекулы). Тогда

$$dq' = -P dS \cos \alpha = -\vec{P} d\vec{S}.$$

Проинтегрировав это выражение по всей поверхности, найдем q' :

$$q' = \oint dq' = -\oint_s \vec{P} d\vec{S}. \quad (1.60)$$

Подставляя (1.60) в теорему Гаусса (1.59), получаем:

$$\oint_s \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(q - \oint_s \vec{P} d\vec{S} \right) \quad (1.61)$$

или

$$\oint_s (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = q. \quad (1.62)$$

Вектор

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1.63)$$

называется *вектором электрического смещения или электрической индукцией*.

С учетом соотношения (1.52) формулу (1.63) перепишем в виде:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi \epsilon_0 \vec{E} = (1 + \chi) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}. \quad (1.64)$$

В итоге *теорема Гаусса* может быть записана в виде:

$$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = q - \quad (1.65)$$

поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью.

Если заряд q распределен по объему V , ограниченному поверхностью S , то величина этого заряда определяется как $q = \int_V \rho dV$. В результате выражение (1.65) примет вид:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV. \quad (1.66)$$

Перейдем к дифференциальной форме записи данной теоремы, используя тот же подход, что и при выводе формулы (1.15). Устремив рассматриваемый объем V к нулю, получим *теорему Гаусса для \vec{D} в дифференциальной форме*:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (1.67)$$

или в операторном виде:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho. \quad (1.68)$$

Согласно данному выражению источниками электрического смещения являются только сторонние заряды: только на них могут начинаться и заканчиваться линии вектора \vec{D} , в то время как источниками поля \vec{E} являются и связанные, и сторонние заряды. Таким образом, вектор \vec{D} является вспомогательным и значительно упрощает решение ряда задач по определению поля в диэлектрике.

1.2.6. Условия для векторов \vec{E} и \vec{D} на границе раздела двух диэлектриков

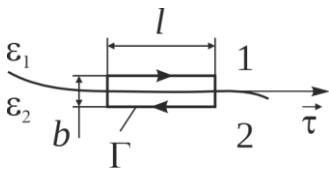


Рис. 1.20

Рассмотрим границу раздела двух однородных изотропных диэлектриков (рис. 1.20). Напряженность поля вблизи границы диэлектрика 1 обозначим как \vec{E}_1 , вблизи границы ди-

электрика 2 – \vec{E}_2 . Возьмем прямоугольный контур Γ , ориентируя его так, чтобы стороны, параллельные границе раздела, имели длину l . Эта длина должна быть такой, чтобы в ее пределах поле можно было считать неизменным, а остальные две стороны должны быть пренебрежимо малыми. Согласно теореме о циркуляции вектора \vec{E}

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (1.69)$$

Учитывая, что вблизи границы электрическое поле с каждой стороны однородно, выражение (1.69) перепишем в виде:

$$E_{2\tau}l - E_{1\tau}l = 0,$$

где $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ – проекции вектора \vec{E} на орт $\vec{\tau}$ в диэлектриках 1 и 2 соответственно.

Отсюда следует, что для тангенциальных составляющих вектора \vec{E} справедливо соотношение

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (1.70)$$

Для того, чтобы установить соотношение между тангенциальными составляющими вектора \vec{D} , воспользуемся формулой (1.64):

$$D_{1\tau} = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_{1\tau},$$

$$D_{2\tau} = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_{2\tau}.$$

В итоге получаем граничное условие для вектора \vec{D} :

$$\varepsilon_2 D_{1\tau} = \varepsilon_1 D_{2\tau}. \quad (1.71)$$

Теперь перейдем к рассмотрению граничных условий для нормальных составляющих векторов \vec{E} и \vec{D} . Пусть на границе раздела двух диэлектриков находится поверхностный сторонний заряд q . Выберем цилиндрическую замкнутую поверхность, расположенную на границе раздела (рис. 1.21). Площадь оснований ΔS цилиндра должна быть такой, чтобы в его пределах вектор \vec{D} не изменялся, а

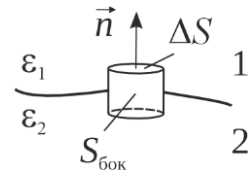


Рис. 1.21

высота цилиндра должна стремиться к нулю. Согласно теореме Гаусса для вектора \vec{D}

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q.$$

В нашем случае получаем:

$$D_{2n}\Delta S - D_{1n}\Delta S = \sigma\Delta S, \quad (1.72)$$

где σ – поверхностная плотность стороннего заряда на границе раздела.

Отсюда следует, что

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \quad (1.73)$$

Из формулы (1.73) видно, что нормальная составляющая вектора \vec{D} претерпевает скачок при переходе границы раздела. В отсутствие сторонних зарядов на границе раздела диэлектриков ($\sigma = 0$) получаем:

$$D_{2n} = D_{1n}. \quad (1.74)$$

В этом случае нормальная составляющая вектора \vec{D} скачка не испытывает. Для того чтобы установить соотношение между нормальными составляющими вектора \vec{E} , снова воспользуемся формулой (1.64):

$$D_{1n} = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_{1n},$$

$$D_{2n} = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_{2n}.$$

В итоге получаем граничное условие для вектора \vec{E} :

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}. \quad (1.75)$$

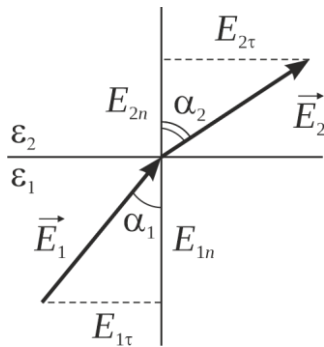


Рис. 1.22

Полученные выражения свидетельствуют о том, что линии векторов \vec{E} и \vec{D} испытывают на границе раздела диэлектриков излом или преломляются (рис. 1.22). Покажем это на примере вектора \vec{E} . Из выражений (1.70) и (1.75) следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{E_{1\tau}}{E_{1n}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}}.$$

В итоге получаем закон преломления линии вектора \vec{E} :

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (1.76)$$

1.2.7. Сегнетоэлектрики

Сегнетоэлектрики – кристаллические вещества, обладающие спонтанной поляризованностью в отсутствие электрического поля. Свое название они получили от сегнетовой соли, электрические свойства которой впервые исследовали советские физики под руководством И.В. Курчатова. Помимо сегнетовой соли ($\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$), к сегнетоэлектрикам относятся титанат бария (BaTiO_3), дигидрофосфат калия (KH_2PO_4) и др.

Взаимодействие частиц в таких кристаллах приводит к тому, что их дипольные моменты спонтанно устанавливаются параллельно друг другу. В результате возникают микроскопические области с различными направлениями поляризации, называемые *доменами* (рис. 1.23). В результате суммарный электрический дипольный момент образца практически отсутствует. Равновесная доменная структура сегнетоэлектрика отвечает минимуму свободной энергии кристалла, а также определяется природой и характером распределения его дефектов, симметрией кристаллической решетки и историей образца.

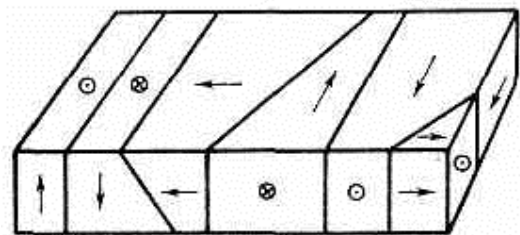


Рис. 1.23

Под действием электрического поля доменные границы смещаются так, что объёмы доменов, поляризованных по полю, увеличиваются за счёт доменов, поляризованных против поля. Это приводит к тому, что в сильном поле кристаллический образец становится однодоменным. После

выключения поля в течение длительного времени образец остаётся поляризованным, т.е. обладает остаточной поляризацией P_r . Для того чтобы суммарные объёмы доменов противоположного знака сравнялись, необходимо приложить достаточно сильное поле E_c противоположного направления (*коэрцитивное поле*). В результате этого P зависит не только от величины E в данный момент, но и от предшествующих состояний диэлектрика. Это явление называется *диэлектрическим гистерезисом* («запаздывание» – греч.). При периодическом изменении напряженности электрического поля зависимость поляризации P от напряжённости электрического поля E нелинейная и имеет вид *петли гистерезиса* (рис. 1.24).

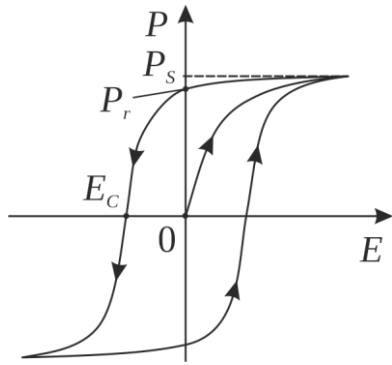


Рис. 1.24

Резкое изменение поляризации образца под действием электрического поля за счёт смещения доменных границ обуславливает большую величину диэлектрической проницаемости ϵ сегнетоэлектрика ($\sim 10^4$ – 10^5). Величина ϵ существенно зависит от напряжённости электрического поля. Под действием внешнего электрического поля

домены поворачиваются как единое целое, устанавливаясь по направлению поля.

Спонтанная поляризация в сегнетоэлектриках сохраняется до определенной температуры, называемой *точкой Кюри*. У некоторых веществ, например у сегнетовой соли, их две: 255 К и 297 К. В этом интервале температур диэлектрическая проницаемость ϵ достигает своего максимального значения. За пределами этого интервала сегнетоэлектрик утрачивает свои свойства и становится обычным диэлектриком. Превращение сегнетоэлектрика в обычный полярный диэлектрик, происходящее в точке Кюри, является примером фазового перехода. Выше точки Кюри существует неупорядоченная фаза, причем в отсутствие внешнего поля диэлектрик не

поляризован. Ниже точки Кюри имеется упорядоченная фаза, характеризующаяся наличием спонтанной поляризации в доменах.

Сегнетоэлектрики имеют большое практическое значение в современной электро- и радиотехнике. Их используют для изготовления конденсаторов большой емкости и малых размеров, для модуляции частоты электромагнитных колебаний и т. д.

1.3. Проводники в электрическом поле

1.3.1. Поле внутри проводника и у его поверхности.

Распределение заряда в проводнике

Как уже отмечалось, к проводникам относятся вещества, в которых имеется большое количество свободных электрических зарядов, способных перемещаться в пределах тела. При помещении проводника в электрическое поле под действием электростатической силы свободные заряды придут в движение. В результате в различных областях проводника возникнут нескомпенсированные положительные и отрицательные заряды (рис. 1.25), то есть аналогично диэлектрикам будет наблюдаться явление электростатической индукции.

Так как в данном случае это явление связано с перераспределением свободных зарядов, то в отличие от диэлектриков поле в проводниках обладает следующими особенностями.

1. Перераспределение зарядов будет продолжаться до тех пор, пока поле внутри проводника не станет равным нулю:

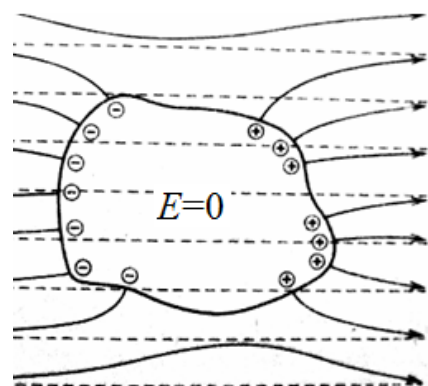


Рис. 1.25

$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$, то есть внешнее поле \vec{E}_0 не будет скомпенсировано внутренним полем индуцированных зарядов \vec{E}' .

2. Так как в объеме проводника отсутствует электрическое поле, то согласно теореме Остроградского - Гаусса суммарный заряд в нем будет равным нулю. В связи с этим весь заряд в проводнике, находящемся в электрическом поле, распределен только по поверхности проводника.

3. Из отсутствия поля внутри проводника следует, что потенциал внутри проводника должен быть постоянен, и тогда поверхность проводника является эквипотенциальной.

4. Из взаимосвязи напряженности и потенциала следует, что силовые линии внешнего поля вблизи поверхности проводника должны быть перпендикулярны к ней. Наличие касательной составляющей вектора \vec{E} привело бы к движению зарядов по поверхности, т. е. равновесие было бы невозможным. Таким образом, нейтральный проводник, внесенный в электрическое поле, разрывает линии напряженности, проходящие через него (см. рис. 1.25).

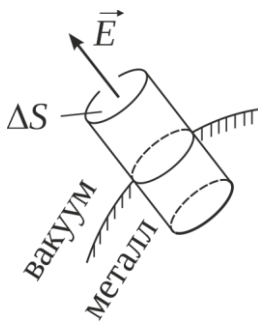


Рис. 1.26

Рассмотрим участок поверхности проводника на границе с вакуумом (рис. 1.26). Определим поток вектора \vec{E} через цилиндрическую поверхность с основанием ΔS , расположенную симметрично относительно границы раздела. Поток через часть поверхности, находящуюся внутри проводника, будет равен нулю, так как поле там отсутствует. Нулю будет равен также поток через боковую часть наружной поверхности, так как вектор \vec{E} направлен параллельно боковой поверхности. Отличным от нуля будет только поток через наружное основание цилиндра $E_n \Delta S = \sigma \Delta S / \epsilon_0$, где σ – поверхностная плотность заряда в пределах ΔS .

Следовательно, напряженность поля вблизи поверхности проводника равна

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (1.77)$$

При этом поверхностная плотность заряда σ будет больше на участках с минимальным положительным радиусом кривизны (выступающих наружу) и меньше на участках с отрицательным радиусом кривизны (вогнутых внутрь). Предельный случай вогнутости – полость в объеме проводника, в которой поле будет отсутствовать. Этот факт широко используется для защиты устройств электронной техники от внешнего электромагнитного воздействия (экранировка электрического поля).

1.3.2. Емкость уединенного проводника

Рассмотрим *уединенный проводник*, т.е. проводник, удаленный от других проводников, тел и зарядов. Если этому проводнику сообщить заряд q , то он распределится по поверхности так, чтобы поле внутри проводника было равным нулю. При сообщении проводнику еще такого же заряда q он распределится по поверхности таким же образом. Следовательно, отношение плотностей заряда в двух произвольных точках проводника при любой величине заряда будет одним и тем же. Тогда потенциал уединенного проводника пропорционален величине заряда на его поверхности, т. е.

$$q = C\varphi. \quad (1.78)$$

Коэффициент C зависит от размеров и формы проводника, а также от свойств среды, в которой находится проводник. Он называется *емкостью* (или просто *емкостью*) уединенного проводника. За единицу емкости принимают емкость такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при изменении его заряда на 1 Кл. Эта величина называется *фарадом* (Ф).

Для нахождения емкости определенного проводника необходимо получить распределение потенциала поля, создаваемого этим проводником: $\varphi = f(q)$. Коэффициент, стоящий в распределении при q , будет при подстановке размеров проводника давать соотношение, обратное значению емкости.

Необходимо заметить, что понятие «уединенный проводник» – абсолютизированное понятие. В реальности расстояние между любыми телами конечно, и, таким образом, заряженные тела воздействуют друг на друга посредством электрического поля, наводя индуцированные заряды, которые, в свою очередь, изменяют распределение напряженности и потенциала исходного поля. В связи с этим на практике в подавляющем большинстве случаев рассматриваются системы, состоящие минимум из двух проводников, разделенных непроводящей средой.

1.3.3. Взаимная емкость проводников. Конденсаторы

Если вблизи первого проводника поместить другие незаряженные проводники, то емкость такой системы увеличится по сравнению с емкостью первоначального уединенного проводника. Это объясняется тем, что при сообщении проводнику заряда q на окружающих его проводниках возникнут индуцированные заряды, причем ближайшими к проводнику

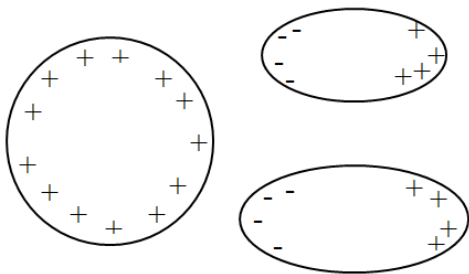


Рис. 1.27

будут заряды противоположного по отношению к q знака (см. рис. 1.27). Индуцированные заряды ослабляют поле проводника и тем самым снижают значение его потенциала, что способствует увеличению емкости согласно соотношению (1.78).

Если один из проводников (наружный) полностью окружает другой (внутренний) или хотя бы очень близко прилегает к нему, то:

1) поле между проводниками не будет зависеть от внешних электрических полей;

2) заряды q на проводниках будут равны по величине и противоположны по знаку и располагаться на обращенных друг к другу поверхностях проводников;

3) разность потенциалов этих проводников $\varphi_1 - \varphi_2$ прямо пропорциональна заряду q , то есть

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{C} q$$

или

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}, \quad (1.79)$$

где C – *взаимная электроемкость (емкость)* двух проводников.

Таким образом, взаимная емкость двух проводников численно определяется зарядом, который необходимо перенести с одного проводника на другой для изменения разности потенциалов между ними на единицу. Такая система двух проводников, разноименно заряженных равными по величине зарядами, локализирующая электрическое поле в ограниченном объеме пространства, называется *конденсатором*. Проводники, образующие конденсатор, называются *обкладками конденсатора*. Величина емкости конденсатора зависит от формы и размеров обкладок, а также от диэлектрической проницаемости среды между ними.

Рассмотрим плоский конденсатор, состоящий из двух параллельных пластин (обкладок), расположенных на некотором расстоянии d друг от друга (рис. 1.28). Расстояние должно быть настолько малым, чтобы поле между обкладками было однородным.

Используя соотношение (1.77), определяем напряженность поля между

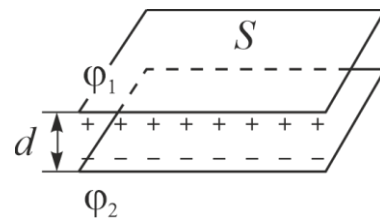


Рис. 1.28

обкладками по формуле $E = \sigma/(\epsilon\epsilon_0)$, где ϵ – диэлектрическая проницаемость среды между обкладками. Если площадь каждой обкладки S , заряд на ней q , то $q = \sigma S$. Разность потенциалов между пластинами определим как

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S} \int_0^d dx = \frac{qd}{\epsilon\epsilon_0 S}.$$

В итоге получим емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}. \quad (1.80)$$

Аналогичным образом можно получить выражение для емкости сферического конденсатора, представляющего собой две концентрические сферы радиусами R_1 и R_2 , пространство между которыми заполнено диэлектриком. Напряженность электрического поля между обкладками конденсатора определим по формуле (1.33):

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}, \text{ при } R_1 < r < R_2.$$

Разность потенциалов между обкладками равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

В итоге емкость сферического конденсатора равна:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}. \quad (1.81)$$

В случае цилиндрического конденсатора с радиусами внутренней и внешней обкладок R_1 и R_2 соответственно напряженность электрического поля между обкладками определяется как

$$E(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r l}, \text{ при } R_1 < r < R_2,$$

где l – длина конденсатора.

Разность потенциалов между обкладками равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

В итоге емкость цилиндрического конденсатора равна:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (1.82)$$

При практическом использовании конденсаторы соединяют в батареи. Простейшими способами соединения являются *последовательное* и *параллельное* соединения. При последовательном соединении N конденсаторов емкость C батареи выражается из формулы

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}, \quad (1.83)$$

при параллельном –

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_N = \sum_{i=1}^N C_i. \quad (1.84)$$

1.4. Энергия электрического поля

1.4.1. Энергия взаимодействия системы зарядов

Рассмотрим систему точечных зарядов q_1, q_2, \dots, q_N . Выберем пару зарядов q_1 и q_2 . Работа по перемещению заряда 1 в поле заряда 2 может быть найдена как $\delta A_{12} = -dW_{12}$. Здесь величина W_{12} зависит только от расстояния между зарядами. Если рассмотреть систему в целом, то для каждой пары взаимодействий будет справедливо равенство

$$\delta A_{i,k} = -dW_{i,k}.$$

Поскольку $W_{i,k} = W_{k,i}$, каждое слагаемое $W_{i,k}$ можно представить в симметричном виде:

$$W_{i,k} = \frac{1}{2}(W_{i,k} + W_{k,i}).$$

Тогда для системы из 3-х зарядов будет справедливо выражение

$$W = \frac{1}{2}(W_{12} + W_{21} + W_{13} + W_{31} + W_{23} + W_{32}).$$

Сгруппируем члены с одинаковыми первыми индексами:

$$W = \frac{1}{2}[(W_{12} + W_{13}) + (W_{21} + W_{23}) + (W_{31} + W_{32})].$$

Здесь выражения в круглых скобках – это энергия W_i взаимодействия i -го заряда со всеми остальными. Тогда для системы из произвольного числа зарядов справедливо соотношение

$$W = \frac{1}{2} \sum_i W_i. \quad (1.85)$$

Имея в виду, что $W_i = q_i \varphi_i$, переписываем (1.85) в следующем виде:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i, \quad (1.86)$$

где $\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^N \frac{q_k}{r_{ik}}$ – потенциал, создаваемый всеми k -ми зарядами, кроме

$k=i$, в точке, где расположен заряд q_i ; r_{ik} – расстояние между зарядами q_i и q_k .

Если заряд q распределен по поверхности уединенного проводника, то, поскольку поверхность проводника является эквипотенциальной, потенциалы всех его точек, в которых находятся точечные заряды Δq , будут одинаковы и равны φ . Используя формулу для энергии взаимодействия системы зарядов, получаем:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \varphi \sum_{i=1}^N \Delta q_i = \frac{q\varphi}{2}. \quad (1.87)$$

Если заряды распределены непрерывно с объемной плотностью ρ , то данную систему можно представить как совокупность элементарных

зарядов $dq = \rho dV$. Переходя от суммирования к интегрированию, получаем:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV, \quad (1.88)$$

где φ – потенциал, создаваемый всеми зарядами в объеме dV .

1.4.2. Энергия конденсатора

Пусть q и $-q$ – заряды на обкладках конденсатора, а φ_1 и φ_2 – потенциалы положительно заряженной и отрицательно заряженной обкладок соответственно. Тогда энергию конденсатора можно определить как

$$W = \frac{1}{2} (q\varphi_1 + (-q)\varphi_2) = \frac{1}{2} q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} qU. \quad (1.89)$$

Таким образом, используя выражение (1.79), энергию конденсатора можно определить так:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (1.90)$$

1.4.3. Объемная плотность энергии

Энергию конденсатора логично выразить через величину, характеризующую само электрическое поле, т. е. через напряженность E . Рассмотрим это на примере плоского конденсатора. Энергию плоского конденсатора можно определить как $W = CU^2 / 2$, где емкость $C = \epsilon\epsilon_0 S / d$. Тогда

$$W = \frac{1}{2} \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d} U^2 = \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \left(\frac{U}{d} \right)^2 Sd.$$

Отношение U/d дает напряженность электрического поля E в конденсаторе, а произведение $Sd = V$ – объем пространства между обкладками. В итоге получаем:

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V. \quad (1.91)$$

Поскольку поле в конденсаторе однородно, то заключенная в нем энергия равномерно распределяется в пространстве с *объемной плотностью* ϖ , равной энергии поля, деленной на занимаемый полем объем:

$$\varpi = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2}. \quad (1.92)$$

Если электрическое поле неоднородно, то энергия, заключенная в элементарном объеме dV пространства, будет равна

$$dW = \varpi dV. \quad (1.93)$$

Таким образом, энергия поля определяется как

$$W = \int_V \varpi dV. \quad (1.94)$$

Пример. Точечный заряд находится в центре шарового слоя из однородного диэлектрика с проницаемостью ε . Внутренний и наружный радиусы слоя соответственно равны R_1 и R_2 . Найти энергию электрического поля, заключенного в этом слое.

Выделим в диэлектрике тонкий сферический слой радиусом r и толщиной $r+dr$. Объем этого слоя будет равен $dV = 4\pi r^2 dr$. Напряженность электрического поля, создаваемого на расстоянии r от заряда, равна

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Тогда объемная плотность энергии будет вычисляться как

$$\varpi = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 r^4}.$$

В итоге энергия электрического поля, заключенного в шаровом слое в пределах радиусов от R_1 до R_2 , равна

$$W = \int_V \varpi dV = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

2. Лабораторный практикум

Лабораторная работа 2-3

Изучение электростатического поля электродов сложной конфигурации

Цель работы: исследование электростатического поля, создаваемого электродами различной формы; построение эквипотенциальных поверхностей и линий напряженности электростатического поля.

Приборы и принадлежности: ванна с электродами различной формы, частично заполненная водой; источник питания; цифровой вольтметр; зонд; лист миллиметровой бумаги (или тетрадный лист в клетку) формата А4 (210 x 297 мм).

Метод эксперимента

Для графического изображения электростатических полей используются силовые линии и эквипотенциальные поверхности. Силовая линия электростатического поля – это линия, проведенная таким образом, что вектор \vec{E} напряженности поля в каждой точке линии направлен по касательной. Силовым линиям приписывается такое же направление, как и вектору напряженности. Как уже отмечалось в разделе 1, силовые линии начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах (свободных и связанных) и нигде не пересекаются. Эквипотенциальная поверхность – это поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал. Вектор \vec{E} в каждой точке эквипотенциальной поверхности направлен по нормали к ней.

При изображении электростатического поля с помощью силовых линий и эквипотенциальных поверхностей последние обычно проводятся так, чтобы разность потенциалов между двумя соседними поверхностями была всюду одинаковой. В этом случае по густоте эквипотенциальных

поверхностей и силовых линий можно судить о численном значении напряженности поля в каких-либо его точках. На рис. 2.1 в качестве примера показаны эквипотенциальные поверхности (сплошные линии) и силовые линии (пунктирные линии) полей, создаваемых заряженной сферой (см. рис. 2.1, а) и возникающих между двумя заряженными проводящими электродами произвольной формы (см. рис. 2.1, б).

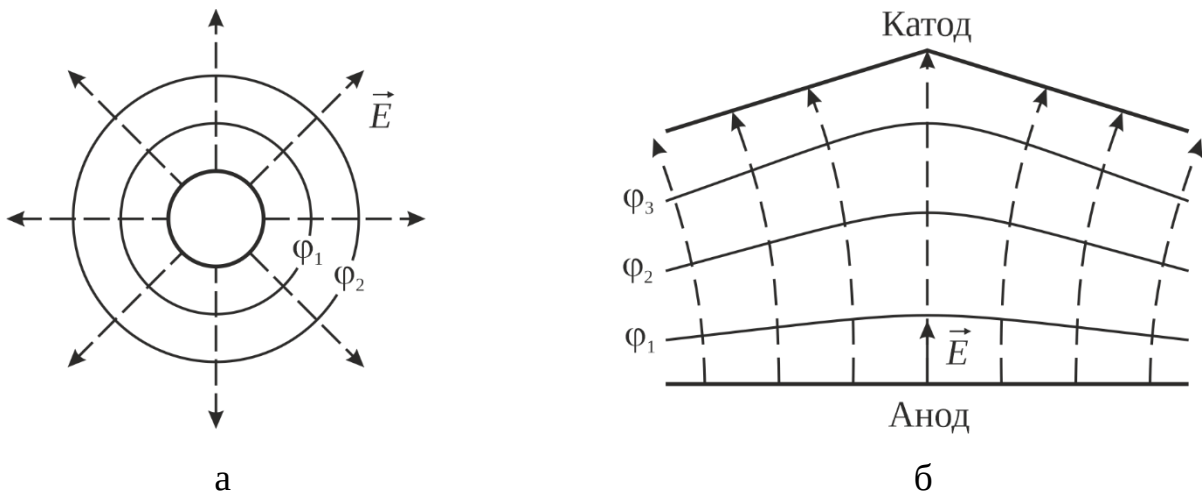


Рис. 2.1

Имея картину силовых линий электростатического поля, можно построить эквипотенциальные поверхности и, наоборот, по известной картине эквипотенциальных поверхностей можно построить силовые линии поля. В данной работе силовые линии поля строятся по эквипотенциальным линиям (линиям пересечения эквипотенциальных поверхностей с плоскостью чертежа).

В основу изучения распределения потенциалов в электростатическом поле положен метод зондов. Сущность этого метода состоит во введении в исследуемую точку поля, создаваемого заряженными проводниками (электродами), специального электрода – зонда, соединенного с прибором, измеряющим приобретенный зондом потенциал относительно какой-либо точки поля, выбранный за начало отсчета. Для электростатических полей, создаваемых неподвижными зарядами в непроводящей среде, передача зонду потенциала той точки поля, в которую он помещен,

сама по себе происходить не может. Для ее осуществления необходимо обеспечить стекание (натекание) зарядов с зонда, что в условиях непроводящей среды невозможно. В этом случае необходимо использовать такие зонды, которые создают местную ионизацию среды, например плазменные зонды. Однако такое исследование осуществить довольно трудно. На практике прямое изучение электростатического поля заменяют изучением его на более удобной модели, представляющей собой электрическое поле постоянного во времени (стационарного) тока в проводящей среде между электродами, форма и взаимное расположение которых такие же, как и в изучаемом электростатическом поле.

В однородной проводящей среде при протекании по ней электрических зарядов поле в пространстве между электродами, к которым приложено постоянное напряжение, имеет ту же конфигурацию, какую оно имело бы в непроводящей среде и в вакууме, если электропроводность проводящей среды во много раз меньше электропроводности электродов. При невыполнении этого условия линии напряженности поля постоянных токов не будут перпендикулярны к поверхностям электродов, т.е. изменится их конфигурация.

Таким образом, электростатическое поле в непроводящей среде (в вакууме или диэлектрике) и поле постоянных токов в однородной слабо проводящей среде практически одинаковы: оба поля потенциальны, а их линии напряженности перпендикулярны к поверхностям заряженных проводников-электродов (вблизи этих поверхностей).

При изучении поля постоянных токов в качестве зонда используется металлический стержень. В проводящей среде заряды будут стекать на зонд, и он примет потенциал той точки поля, в которую помещен. Имея картину распределения в изучаемом поле, можно получить (провести) линии напряженности поля, используя связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля: $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$.

Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка (рис. 2.2) представляет собой ванну, выполненную из материала с хорошими электроизоляционными свойствами (стекло). В ванну помещают электроды (форма их может быть различной), поле между которыми подлежит изучению, и наливают водопроводную воду слоем около 5 мм. Проводимость такого слоя воды составляет $10^{-3} - 10^{-2} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, а проводимость материала электродов – порядка $10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$. При подаче на электроды постоянного напряжения происходит их «поляризация», в результате которой уменьшается сила тока через электролит (воду), изменяется распределение потенциалов изучаемого поля. Поэтому измерения следует проводить, используя переменное напряжение низкой частоты (50 Гц).

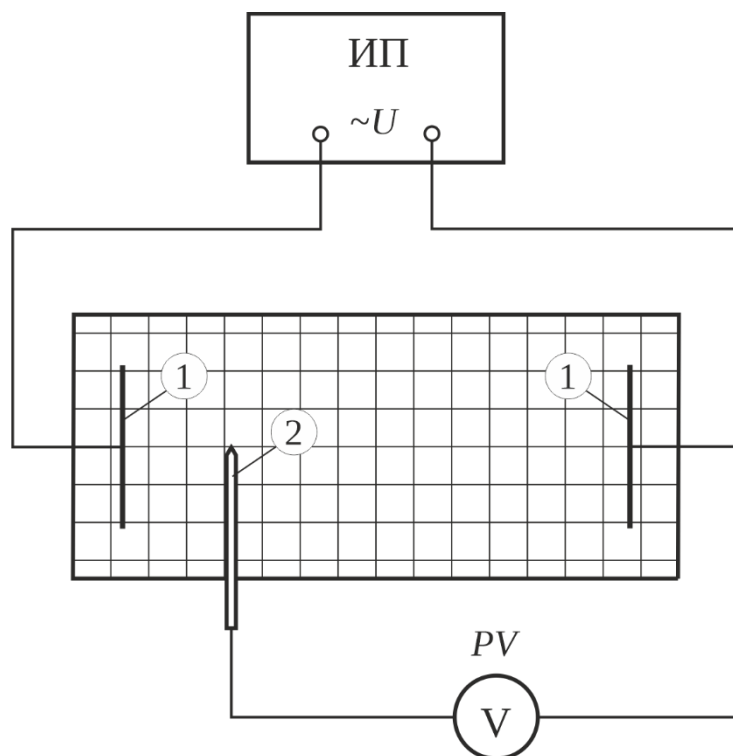


Рис. 2.2

Учитывая, что расстояние между электродами невелико, можно считать, что потенциал во всех точках исследуемого поля изменяется

синхронно и эквипотенциальные поверхности остаются неизменными. Подаваемое на электроды напряжение не превышает 10 В.

В поле между электродами 1 помещают зонд 2, соединенный с вольтметром *PV* переменного напряжения. Дно ванны имеет координатную сетку. Помещая зонд в точки с определенными координатами, с помощью цифрового вольтметра находят потенциалы этих точек относительно одного из электродов.

Порядок выполнения работы

1. Заполните дно ванны слоем воды (если оно сухое).
2. Отметьте на листе миллиметровой бумаги положение электродов и координатных осей.
3. Включите в сеть источник переменного напряжения и цифровой вольтметр, прогрейте их в течение 3 – 5 мин.
4. Поместите зонд в точку, находящуюся вблизи одного из электродов на оси симметрии расположения электродов (координатной оси), измерьте значение потенциала; затем отметьте на листе миллиметровой бумаги эту точку, подписав рядом значение потенциала.
5. Смещая зонд с координатной оси, найдите координаты другой точки, имеющей то же значение потенциала (с точностью до 0,05 В). Найдите координаты еще 4 – 5 точек с таким же потенциалом и расположенных по ту же сторону от координатной оси, а затем найдите аналогичные точки с другой стороны этой координатной оси. Отметьте на бумаге все найденные точки и соответствующие значения потенциала.
6. Повторите измерения по п. 5 для других значений потенциала, выбрав исходную точку на другом расстоянии от электрода. Таким образом, в пространстве между электродами должно получиться не менее семи линий равного потенциала.

7. Изобразите эквипотенциальные линии, соединив между собой точки с одинаковым значением потенциала.

8. На том же рисунке изобразите несколько линий напряженности.

9. Постройте график зависимости $\varphi(r)$ потенциала электрического поля от расстояния между электродами. Значения потенциала выберите для точек, лежащих на оси, соединяющей электроды. Начало отсчета координат совместите с поверхностью электрода, вблизи которого зарегистрирован меньший потенциал.

10. Получите зависимость напряженности E электрического поля от расстояния r методом численного дифференцирования функции $\varphi(r)$. Для этого, выбрав исходное значение r_1 , определите по графику $\varphi(r)$ соответствующее значение φ_1 , а затем значение φ_2 для $r_2 = r_1 + \Delta r$, где $\Delta r = 5$ мм. Вычислите напряженность E поля по формуле:

$$E = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{r_2 - r_1}.$$

Полученное значение E соответствует середине интервала (r_1, r_2) , т. е. значению r , равному

$$r = r_1 + \frac{\Delta r}{2}.$$

Далее, смещаясь по r с шагом $\Delta r = 5$ мм, рассчитать еще 7 – 8 значений напряженности поля E . Результаты расчетов занесите в таблицу 1.

Таблица 1

№ п/п	r_1 , мм	r_2 , мм	φ_1 , В	φ_2 , В	r , мм	E , В/м
1						
2						
...						

11. Постройте график зависимости $E(r)$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Какие поля называются электростатическими?
2. Что называется напряженностью и потенциалом электростатического поля?
3. Какова дифференциальная связь между вектором напряженности электростатического поля и потенциалом?
4. Какова интегральная связь между разностью потенциалов и напряженностью электростатического поля?
5. В чем заключается принцип суперпозиции электрических полей?
6. Что называется силовой линией (линией напряженности) электростатического поля? Что такое эквипотенциальная поверхность?
7. Объяснить взаимное расположение линии напряженности и эквипотенциальных поверхностей для исследуемого поля.
8. Объяснить зондовый метод исследования распределения потенциала электростатического поля.
9. Потенциал поля в точке, удаленной от точечного положительного заряда на расстояние $r=25$ см, равен $\varphi=50$ В. Определить величину и направление градиента $\text{grad } \varphi$ потенциала в этой точке.
10. Найти напряженность \vec{E} электрического поля, потенциал которого имеет вид:
 - а) $\varphi(x, y) = -axy$, где a – постоянная;
 - б) $\varphi(\vec{r}) = -\vec{a} \cdot \vec{r}$, где \vec{a} – постоянный вектор, \vec{r} – радиус-вектор интересующей нас точки поля.

Лабораторная работа 2-6

Изучение электрических свойств сегнетоэлектриков

Цель работы: ознакомиться с методом измерения основных характеристик сегнетоэлектриков с помощью электронного осциллографа, исследовать зависимость диэлектрической проницаемости сегнетоэлектрика от напряженности электрического поля.

Приборы и принадлежности: учебная установка ФЭЛ-21, электронный осциллограф.

Метод эксперимента

Лабораторная работа по исследованию явления диэлектрического гистерезиса в сегнетоэлектриках выполняется на учебной установке ФЭЛ-21, принципиальная схема которой приведена на рис. 2.3.

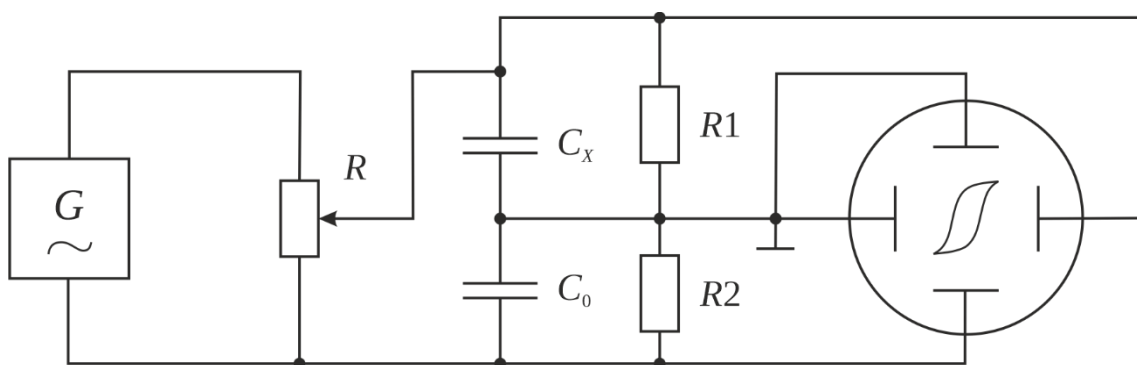


Рис. 2.3

К источнику переменного напряжения, генератору G , частота которого может регулироваться, через резистивный делитель R , предназначенный для регулировки амплитуды напряжения, подключены два последовательно соединенных конденсатора C_x и C_0 . Между обкладками плоского конденсатора C_x помещен сегнетоэлектрик. Конденсатор C_0 – линейный (слюдяной), и его емкость постоянна. Напряжение U_y с конденсатора C_0 подается на пластины вертикального отклонения луча осциллографа, а напряжение U_x подается с конденсатора C_x на пластины

горизонтального отклонения луча осциллографа. Емкости конденсаторов подобраны так, что $C_0 \gg C_X$ и практически всё приложенное напряжение падает на сегнетоэлектрическом конденсаторе C_X , так как $U \sim 1/C$. Нетрудно убедиться, что напряжение U_X пропорционально напряженности E электрического поля в сегнетоэлектрике, а напряжение U_Y пропорционально электрическому смещению D .

Поскольку конденсаторы C_X и C_0 соединены последовательно, то заряды q на их обкладках одинаковы и по модулю равны

$$q = C_X U_X = C_0 U_Y.$$

Тогда напряжение на конденсаторе C_X равно

$$U_X = \frac{q}{C_X}. \quad (2.1)$$

Как известно, для плоского конденсатора модуль вектора электрического смещения D равен поверхностной плотности заряда σ на обкладках:

$$D = \sigma = \frac{q}{S_X}, \quad (2.2)$$

где S_X – площадь обкладки конденсатора C_X .

Учитывая, что $D = \epsilon \epsilon_0 E$, легко найти напряженность электрического поля E , прикладываемого к сегнетоэлектрическому конденсатору C_X :

$$E = \frac{D}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0 S_X}. \quad (2.3)$$

Исследуемый образец сегнетоэлектрика размещен между обкладками плоского конденсатора, емкость которого определяется как

$$C_X = \frac{\epsilon \epsilon_0 S_X}{d}, \quad (2.4)$$

где d – расстояние между обкладками, равное толщине слоя сегнетоэлектрика.

Подставив выражение (2.4) в (2.3), найдем напряженность внешнего электрического поля по формуле:

$$E = \frac{q}{C_X d}. \quad (2.5)$$

С учетом (2.1) получаем связь между напряжением U_X и напряжённостью E в виде:

$$U_X = Ed. \quad (2.6)$$

Напряжение U_Y на линейном конденсаторе C_0 равно

$$U_Y = \frac{q}{C_0}. \quad (2.7)$$

Из формулы (2.2) следует, что величина заряда на обкладках обоих конденсаторов может быть определена как

$$q = DS_X. \quad (2.8)$$

В итоге напряжение U_Y связано с электрическим смещением D соотношением:

$$U_Y = \frac{DS_X}{C_0}. \quad (2.9)$$

Таким образом, из выражения (2.6) видно, что если напряжение U_X подать на вход X осциллографа, то отклонение электронного луча по горизонтальной оси будет пропорционально напряженности E внешнего электрического поля. А из выражения (2.9) следует, что если напряжение U_Y подать на вход Y осциллографа, то отклонение электронного луча по вертикальной оси будет пропорционально электрическому смещению D . В итоге за один период изменения синусоидального напряжения электронный луч на экране осциллографа опишет полную петлю гистерезиса и за каждый последующий период в точности повторит её. Поэтому на экране будет наблюдаться неподвижная петля, т. е. зависимость $D = f(E)$.

Петля гистерезиса сегнетоэлектрика изображается на экране в некотором масштабе в координатах (X, Y) , причем:

$$\begin{aligned} U_X &= K_X X, \\ U_Y &= K_Y Y, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где K_X и K_Y – коэффициенты чувствительности осциллографа по оси X и Y соответственно; X и Y – смещение электронного луча по соответствующей оси (измеряется в делениях шкалы экрана осциллографа, причем 1 деление равно 1 клетке).

Следует учесть, что коэффициент чувствительности K_X определяется экспериментально путем калибровки оси X с использованием цифрового вольтметра, встроенного в лабораторную установку. Он рассчитывается по формуле $K_X = 2U_0/l_X$, где $U_0 = 140 - 150$ В – оптимальное для калибровки напряжение генератора; l_X – длина горизонтальной линии в делениях шкалы при заземлении оси Y осциллографа.

Для вычисления напряженности внешнего электрического поля перепишем выражение (2.6) с учетом (2.10) в виде:

$$E = \frac{U_X}{d} = \frac{K_X X}{d}. \quad (2.11)$$

На вход Y сигнал подается также через резистивный делитель, но встроенный в осциллограф. В данном случае значения коэффициента чувствительности K_Y оси Y задаются с помощью ручки «ВОЛЬТ/ДЕЛ».

Для вычисления электрического смещения перепишем выражение (2.9) с учетом (2.10) в виде:

$$D = \frac{U_Y C_0}{S_X} = \frac{K_Y Y C_0}{S_X}. \quad (2.12)$$

Порядок выполнения работы

1. Включить лабораторный модуль ФЭЛ-21 и осциллограф в сеть ~220 В. Дать приборам прогреться не менее 5 минут.

2. Подключить входы X и Y осциллографа соединительными проводами с разъемами типа RCA (в просторечии «тюльпан») к соответствующим

щим выходам учебной установки. Для измерения напряжения на исследуемом сегнетоэлектрическом конденсаторе C_X клемма $XS1$ подключается к входу X осциллографа, а для измерения напряжения на линейном конденсаторе C_0 клемма $XS2$ подключается к входу Y осциллографа.

3. Кнопкой «ЧАСТОТА» на лицевой панели модуля ФЭЛ-21 установить частоту синусоидального напряжения в диапазоне 300 – 600 Гц. Значение частоты индуцируется на ЖК-дисплее. Для надежного срабатывания кнопки необходимо удерживать ее нажатой в течение ~2 секунд.

4. С помощью ручки «АМПЛИТУДА» установить амплитуду напряжения на выходе генератора 140 – 150 В (также индицируется на ЖК-дисплее). Измерение значения амплитуды возможно *только при отключенном генераторе*. Генератор включается и отключается кнопкой «ГЕНЕРАТОР ВКЛ/ВЫКЛ».

5. Включить генератор и перевести осциллограф в режим сложения колебаний, для чего установить переключатель «ВРЕМЯ/ДЕЛ» в положение «X-Y».

6. Ручкой «ВОЛЬТ/ДЕЛ» установить чувствительность осциллографа по оси Y , обеспечивающую наилучший масштаб для наблюдения петли гистерезиса (рекомендуемое значение 0,5 – 1 В/дел). Ручка «ПЛАВНО» при этом должна быть повернута до упора по часовой стрелке. Записать значение K_Y .

7. Вращением ручки «УСИЛЕНИЕ X» на лицевой панели модуля ФЭЛ-21, а также ручек « \updownarrow » и « \leftrightarrow » осциллографа установить изображение петли таким образом, чтобы оно занимало $\frac{3}{4}$ экрана и располагалось строго по центру.

8. Получить изображение предельной петли гистерезиса при насыщении сегнетоэлектрика. Признаком насыщения являются «усы» на петле, и её площадь при росте напряжения не увеличивается. Проверить симметричность изображения относительно центра экрана.

9. Измерить по масштабной сетке экрана осциллографа координаты точек X_C , Y_R , X_{\max} и Y_{\max} петли гистерезиса (рис. 2.4).

10. Изменяя напряжение на выходе генератора ручкой «АМПЛИТУДА», получить на экране осциллографа частные циклы гистерезиса (не менее 7 – 9 циклов) и выполнить измерения координат X_{\max} и Y_{\max} вершины петли. Результаты измерений занести в табл. 2.

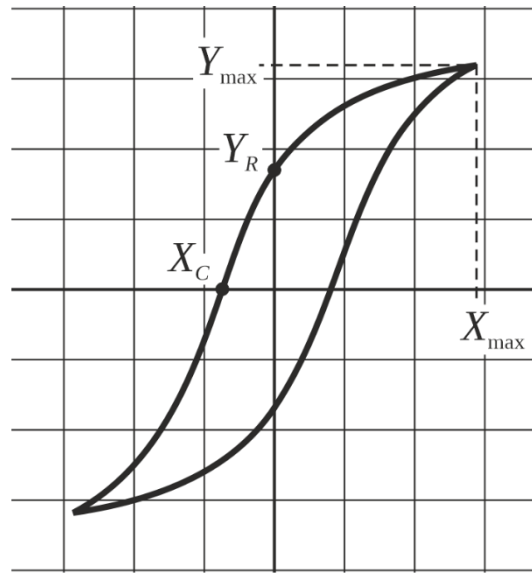


Рис. 2.4

Таблица 2

X_C , дел. _____ Y_R , дел. _____
 E_C , В/м _____ D_R , Кл/м² _____

№ п/п	X_{\max} , дел	Y_{\max} , дел	E_{\max} , В/м	D_{\max} , Кл/м ²	ε
1					
2					
...					

11. По окончании работы выключить блок ФЭЛ-21 и осциллограф.

12. По формулам (2.11) и (2.12) рассчитать коэрцитивную силу E_C , остаточное электрическое смещение D_R , а также значения E_{\max} и D_{\max} , соответствующие вершине петли гистерезиса. Вычислить относительную диэлектрическую проницаемость ε сегнетоэлектрика как

$$\varepsilon = \frac{D_{\max}}{\varepsilon_0 E_{\max}}.$$

Исходные данные для расчетов: $K_X=35$ В/дел; $C_0=10$ мкФ; $S_X=1,23 \cdot 10^{-3}$ м²; $d=3 \cdot 10^{-4}$ м. Величину K_Y определить по осциллографу. Результаты расчетов также занести в таблицу.

13. Построить графики зависимостей $D_{\max} = f(E_{\max})$ и $\varepsilon = f(E_{\max})$.

Контрольные вопросы

1. Охарактеризовать сегнетоэлектрики.
2. Что такое электрический дипольный момент и поляризованность?
3. Как определяется вектор электрического смещения? Что он характеризует?
4. Каков физический смысл диэлектрической проницаемости?
5. В чём заключается явление диэлектрического гистерезиса?
6. Объяснить осциллографический метод исследования зависимости $D = D(E)$.

Лабораторная работа 2-15

Измерение емкости электролитического конденсатора

Цель работы: практическое подтверждение экспоненциального характера заряда и разряда конденсатора и ознакомление с методом измерения электроемкости путем разряда через эталонный резистор.

Приборы и принадлежности: экспериментальный макет, электронный миллисекундомер Ф209, электронный (или цифровой) осциллограф.

Метод эксперимента

Получим зависимость напряжения на конденсаторе при его заряде от времени в схеме, показанной на рис. 2.5. Для этого воспользуемся законом Ома для неоднородного участка цепи:

$$I(t) = \frac{\varphi_1(t) - \varphi_2(t) + E_0}{R}, \quad (2.13)$$

где $I(t)$ – сила тока в цепи; $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – потенциалы обкладок конденсатора C ; E_0 – ЭДС источника тока; R – сопротивление резистора.

Разность потенциалов $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ представляет собой напряжение на конденсаторе $U_C(t)$. Замыкание тока проводимости между обкладками конденсатора происходит через линии тока смещения. Существование тока

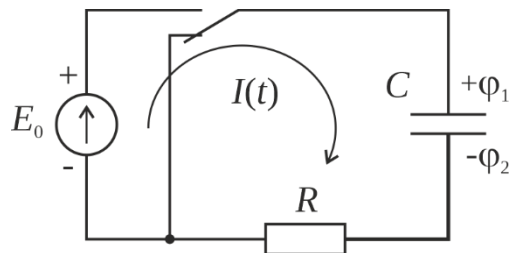


Рис. 2.5

смещения было доказано Максвеллом. По существу, ток смещения – это изменяющееся во времени электрическое поле. Из всех физических свойств, присущих действительному току, ток смещения обладает лишь одним – способностью создавать магнитное поле.

Напряжение $U_C(t)$, заряд $q(t)$ и емкость C конденсатора связаны между собой соотношением

$$q(t) = CU_C(t).$$

Следовательно,

$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt. \quad (2.14)$$

Из выражений (2.13) и (2.14) следует, что

$$I(t) = \frac{-U_C(t) + E_0}{R} = -\frac{1}{RC} \int_0^t I(t) dt + \frac{E_0}{R}. \quad (2.15)$$

Знак «минус» перед напряжением $U_C(t)$ в выражении (2.15) следует из второго правила Кирхгофа и обусловлен тем, что при обходе контура E_0 - R - C по часовой стрелке напряжение $U_C(t)$ создает ток против направления обхода. Продифференцируем обе части полученного равенства:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} I(t).$$

Разделение переменных в данном дифференциальном уравнении приведет его к следующему виду:

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = -\frac{1}{RC} dt.$$

Проинтегрировав обе части уравнения, получим:

$$\ln(I(t)) = -\frac{1}{RC} t + \ln(I_0),$$

где I_0 – произвольная постоянная интегрирования. После потенцирования уравнения получим зависимость силы тока в контуре от времени:

$$I(t) = I_0 e^{-t/(RC)}. \quad (2.16)$$

Для нахождения постоянной интегрирования I_0 воспользуемся начальным условием $q(t_0) = 0$ (в момент замыкания цепи конденсатор разряжен). Следовательно, напряжение на конденсаторе в этот момент времени также равно нулю. Подставив $U_C(t_0) = 0$ в уравнение (2.13), получим:

$$I_0 = \frac{E_0}{R}. \quad (2.17)$$

Подставив выражения (2.17) и (2.16) в (2.14), получим зависимость напряжения на конденсаторе при его заряде от времени:

$$U_C(t) = \frac{E_0}{RC} \int_0^t e^{-t/(RC)} dt = E_0 \left(1 - e^{-t/(RC)}\right) = E_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad (2.18)$$

где

$$\tau = RC \quad (2.19)$$

постоянная времени заряда и разряда конденсатора.

Из выражения (2.18) следует, что τ – это время, за которое напряжение U_C на конденсаторе при его заряде достигает величины, на E_0/e меньшей, чем максимальное значение E_0 ($e \approx 2,72$ – экспонента).

Подобным образом можно получить зависимость $U_C(t)$ при разряде конденсатора:

$$U_C(t) = RI(t) = E_0 e^{-t/\tau}. \quad (2.20)$$

Первая часть работы посвящена экспериментальному подтверждению экспоненциального характера процессов заряда и разряда конденсатора, определению постоянной времени τ и расчету величины сопротивления R разрядного резистора. Для этого исследуется зависимость $U_C(t)$ с помощью установки, схема которой показана на рис. 2.6. Установка состоит из генератора прямоугольных импульсов, конденсатора C , резистора R и электронного осциллографа.

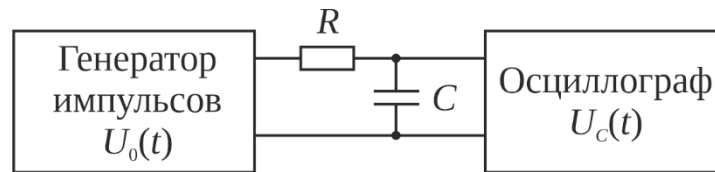


Рис. 2.6

Напряжение конденсатора подается на вход осциллографа, работающего в режиме развертки. В этом случае вертикальная шкала осциллографа – это ось напряжения, горизонтальная – ось времени. На рис. 2.7 показаны синхронизированные по времени осциллограммы напряжения

на клеммах генератора прямоугольных импульсов (верхний рисунок) и напряжения $U_C(t)$ на конденсаторе (нижний рисунок).

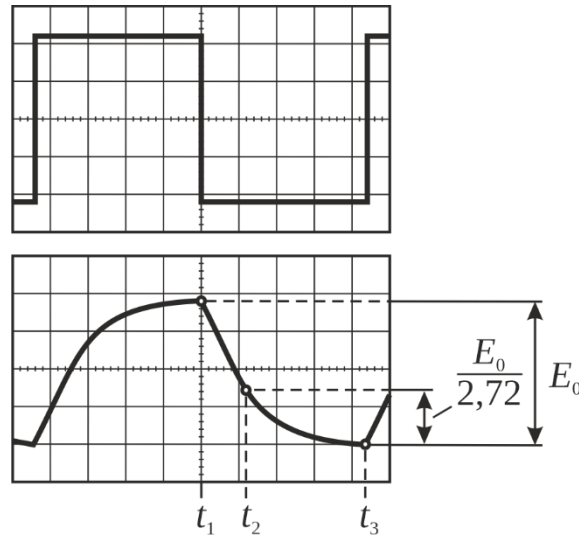


Рис. 2.7

Постоянная времени τ измеряется графически по кривой $U_C(t)$. Выберем, например, участок осциллограммы, соответствующий разряду конденсатора. Момент времени t_1 – начало процесса разряда, t_3 – полный разряд конденсатора. За время τ напряжение на конденсаторе уменьшится в e раз. В нашем случае напряжение E_0 на конденсаторе в момент времени t_1 равно 3,8 деления (1 деление – 1 клетка), тогда напряжение $E_0/e = 3,8/2,72 = 1,4$ деления, что соответствует моменту времени t_2 . В итоге постоянная времени $\tau = t_2 - t_1 = 1,2$ деления. Если выбран масштаб шкалы времени 50 мкс/дел, то $\tau = 1,2 \cdot 50 = 60$ мкс.

Таким образом, определив τ , зная емкость C конденсатора, можно вычислить сопротивление R разрядного резистора, используя формулу (2.19).

Вторая часть работы посвящена измерению емкости конденсатора путем разряда его через эталонный резистор с помощью установки, схема которой показана на рис. 2.8. Она состоит из источника опорного напряжения E_0 , устройства сравнения напряжений (компаратора), миллисекундомера, делителя напряжения на резисторах R_1 и R_2 , кнопки «Заряд», эта-

лонного резистора R_0 и исследуемого конденсатора C .

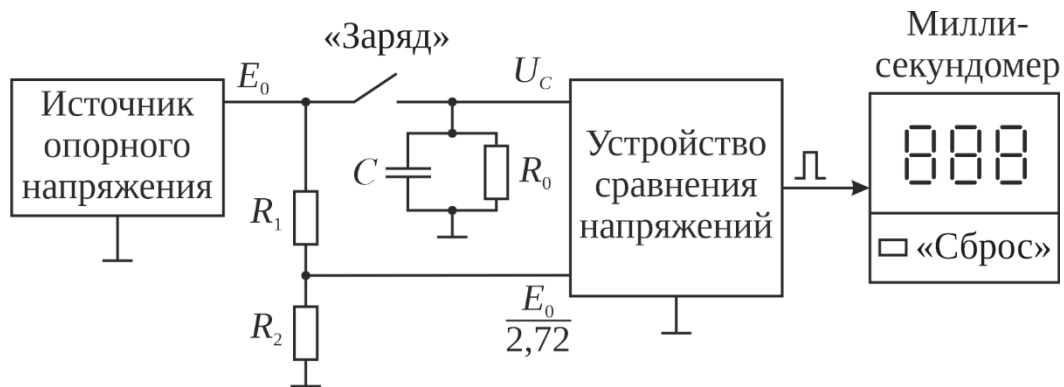


Рис. 2.8

Установка работает следующим образом. При нажатии кнопки «Заряд» и кнопки «Сброс» миллисекундомера происходят заряд конденсатора C до напряжения E_0 и сброс показаний времени. После одновременного отпускания этих кнопок начинается экспоненциальный разряд конденсатора через эталонный резистор R_0 , миллисекундомер при этом отсчитывает время. Напряжение U_C с конденсатора подается на один из входов устройства сравнения. На другой его вход подается постоянное напряжение с делителя R_1 - R_2 , которое составляет $E_0/2,72$. В момент равенства этих напряжений устройство сравнения выдает сигнал, останавливающий отсчет времени. Таким образом, измеренное миллисекундомером время является постоянной τ . Зная величину эталонного сопротивления R_0 , нужно определить емкость C конденсатора по формуле (2.19).

Преимуществами данного способа перед другими (мостовым, генераторным, частотным) являются быстрота измерений, простота автоматизации. Информация о величине емкости выводится на внешний разъем миллисекундомера. Недостатком является относительно низкая точность измерения. Ее можно повысить путем проведения серии измерений с последующей статистической обработкой результатов.

Порядок выполнения работы

Задание 1

1. Проверьте положения переключателей на экспериментальном макете: «Режим работы 1» – вкл., «Вибрация» – вкл., «Пуск» – верхнее положение, переключатель рода работ – «Экспонента».

2. Включите экспериментальный макет и осциллограф в сеть, прогрейте их в течение 3 – 5 мин.

3. Получите устойчивую осциллограмму, зарисуйте ее, соблюдая масштаб. Рекомендуемые значения чувствительности осциллографа: по напряжению: 2 – 5 В/дел; по времени: 20 – 50 мкс/дел.

4. Измерьте по осциллограмме постоянную времени τ .

5. Рассчитайте сопротивление R резистора, используя формулу (2.19) при $C = 3000$ пФ.

6. Выключите осциллограф.

Задание 2

1. Установите переключатель рода работ в одно из положений « C_1 »– « C_5 » (по указанию преподавателя).

2. Произведите 20 измерений постоянной времени τ для выбранного конденсатора. Для этого нажмите кнопку «Заряд» и кнопку «Сброс». Удерживайте их в течение 5 – 10 с, а затем одновременно отпустите. Считайте показания миллисекундомера.

3. Определите среднеарифметическое значение $\langle \tau \rangle$, а затем емкость C конденсатора, снова используя формулу (2.19) при $R_0 = 10$ кОм.

4. Оцените погрешность результата измерения емкости конденсатора.

Контрольные вопросы

1. Что называется электроемкостью? В каких единицах она измеряется в системе СИ?
2. Что такое конденсатор? По каким признакам классифицируют конденсаторы?
3. Выведите закон уменьшения (или увеличения) заряда на обкладках конденсатора.
4. Что такое постоянная времени заряда и разряда конденсатора? Как ее определить теоретически и экспериментально?
5. Из каких соображений выбирают длительность рабочего импульса в первом эксперименте?
6. Могут ли кривые нарастания и спада напряжения на конденсаторе в первом эксперименте характеризоваться различными значениями постоянной времени τ ?
7. Если заряженный конденсатор отключить от внешней цепи, то будет ли напряжение на его обкладках изменяться во времени? Если будет, то в чем причина этого?

Лабораторная работа 2-22

Определение ёмкости плоского конденсатора

Цель работы: определение ёмкости плоского воздушного конденсатора, определение диэлектрической проницаемости диэлектрика.

Приборы и принадлежности: планшет с двумя плоскими металлическими пластинами, генератор сигналов функциональный ГСФ-1, набор диэлектрических пластин, электронный (или цифровой) осциллограф.

Метод эксперимента

В данной лабораторной работе для измерения емкости плоского конденсатора используется электрическая схема, изображенная на рис. 2.9. Плоский конденсатор C включается последовательно с резистором R в цепь переменного тока. Вольтметр $V1$ измеряет входное напряжение U цепи, вольтметр $V2$ – напряжение U_R на резисторе.

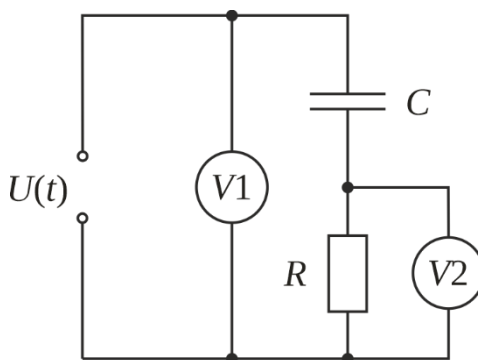


Рис. 2.9

По закону Ома для участка цепи переменного тока амплитудное значение силы тока I_m прямо пропорционально амплитудному значению напряжения U_m и обратно пропорционально полному сопротивлению (импедансу) Z цепи:

$$I_m = \frac{U_m}{Z}. \quad (2.21)$$

Для рассматриваемой цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}, \quad (2.22)$$

где ω – циклическая частота переменного напряжения.

При активном сопротивлении цепи в несколько кОм, частоте переменного напряжения порядка 1 кГц и ёмкости конденсатора, не превышающей 1 нФ, получается, что $R^2 \ll 1/(\omega C)^2$, и полное сопротивление цепи будет определяться только ёмкостной составляющей X_C :

$$Z \approx X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (2.23)$$

С учётом этого выражение (2.21) можно переписать в виде:

$$U_m = \frac{I_m}{\omega C}, \quad (2.24)$$

причём напряжение U_m определяется амплитудой напряжения на конденсаторе ($U_m \approx U_{Cm}$).

При последовательном соединении токи во всех элементах цепи одинаковы, так что амплитуду силы I_m тока можно выразить через падение напряжения на резисторе U_{Rm} и сопротивление резистора R :

$$I_m = \frac{U_{Rm}}{R}. \quad (2.25)$$

Из (2.24) и (2.25) с учетом $\omega = 2\pi\nu$, где ν – частота, можем записать:

$$C = \frac{1}{2\pi\nu R} \frac{U_{Rm}}{U_{Cm}}. \quad (2.26)$$

При измерениях напряжений с помощью осциллографа удобнее измерять не амплитуды напряжений, а их удвоенные значения (размах): $\Delta U_1 = 2U_{Cm}$ и $\Delta U_2 = 2U_{Rm}$. Окончательно для определения ёмкости получаем формулу:

$$C = \frac{1}{2\pi\nu R} \frac{\Delta U_2}{\Delta U_1}. \quad (2.27)$$

С другой стороны, исходя из того, что $I = dq/dt$ и $q = CU_C$, с учетом (2.25) ёмкость можно определить по формуле:

$$C = \frac{U_{Rm}}{R \frac{dU_C}{dt}}. \quad (2.28)$$

В случае использования напряжения пилообразной формы (рис. 2.10, а) от бесконечно малых приращений напряжения и времени в (2.28) можно перейти к конечным изменениям, и тогда

$$\frac{dU_C}{dt} = \frac{2U_{Cm}}{T/2} = \frac{4U_{Cm}}{T}, \quad (2.29)$$

где T – период пилообразного напряжения.

Так как согласно (2.28) напряжение на резисторе определяется производной от разности потенциалов на конденсаторе, оно будет представлять собой последовательность прямоугольных импульсов (рис. 2.10, б).

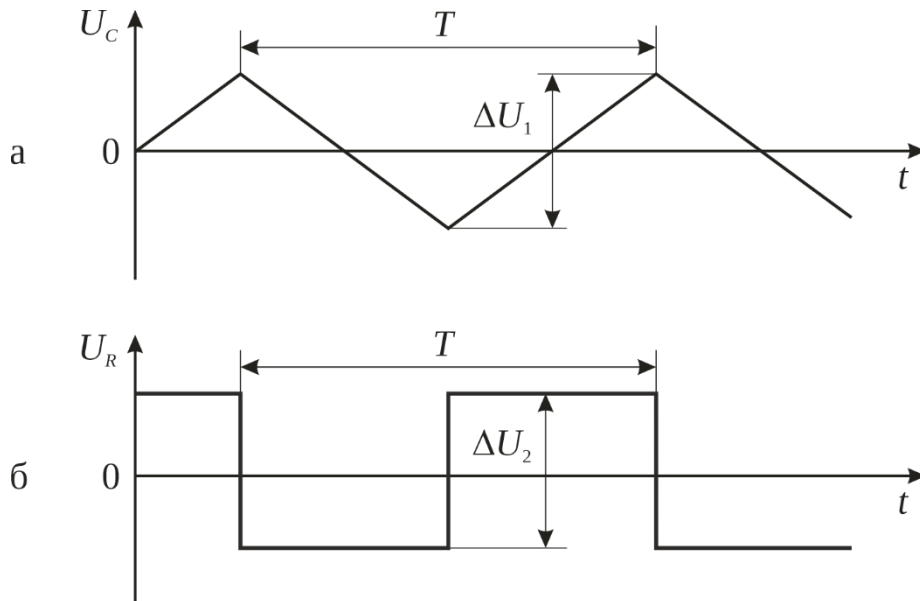


Рис. 2.10

Аналогичным образом при использовании удвоенных значений амплитуд напряжений на ёмкости и сопротивлении соотношение для определения ёмкости принимает следующий вид:

$$C = \frac{1}{4\nu R} \frac{\Delta U_2}{\Delta U_1}. \quad (2.30)$$

Описание экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 2.11.

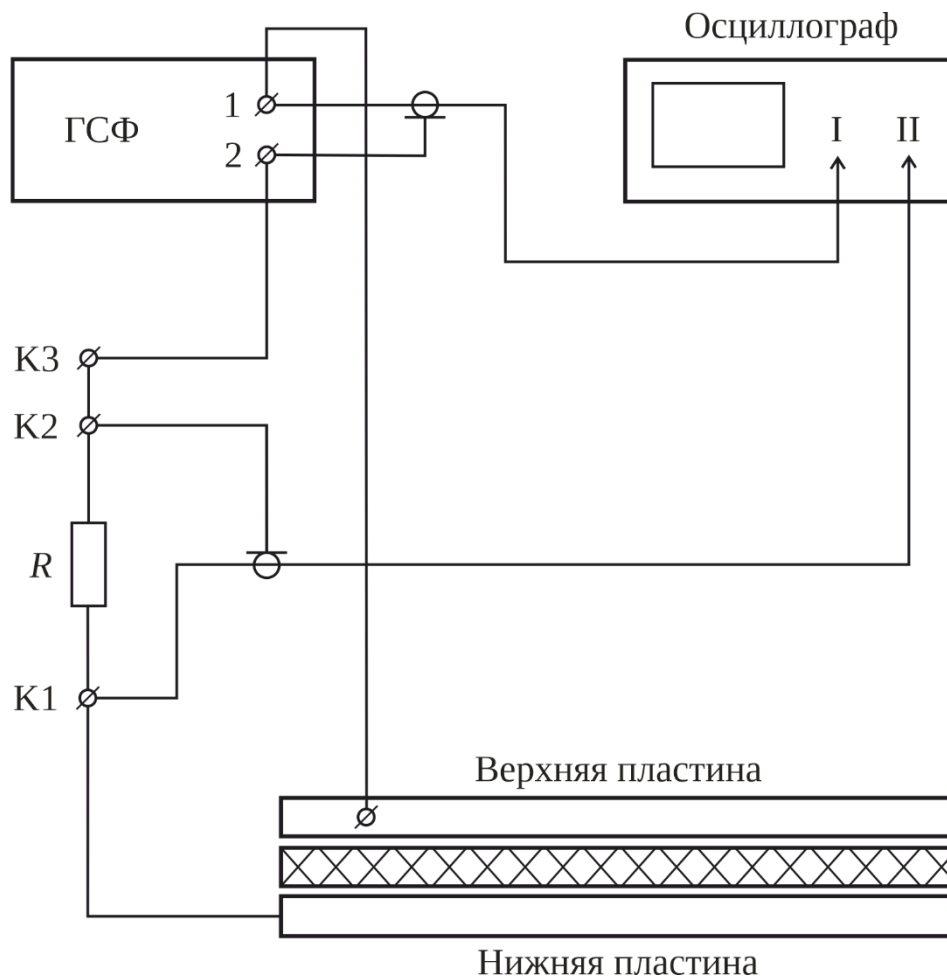


Рис. 2.11

В данной установке используется плоский разборный конденсатор, содержащий нижнюю пластину, подключённую к клемме K1, и съёмную верхнюю пластину, подключённую к клемме 1 блока ГСФ. Между клеммами K1 и K2 включен резистор R . Клеммы K2 и K3, а также клемма 2 ГСФ соединены с экранами коаксиальных кабелей, служащих для подключения осциллографа. Диэлектрическая окантовка в основании разборной системы обеспечивает зазор между верхней и нижней пластинами. Если на нижнюю пластину поместить плоский диэлектрик, то зазор определяется толщиной диэлектрика. Напряжение гармонической или пилообразной формы подаётся на исследуемый конденсатор от генератора ГСФ.

В качестве вольтметров $V1$ и $V2$ (см. рис. 2.9), а также частотометров используется двухканальный электронный или цифровой осциллограф. При этом напряжение, измеряемое вольтметром $V1$, подаётся на вход измерительного канала I, а напряжение, измеряемое вольтметром $V2$, – на вход канала II. Таким образом, на экране одновременно отображаются синхронизированные осциллограммы обоих измеряемых напряжений.

Порядок выполнения работы

Задание 1. Определение ёмкости плоского конденсатора

1. Собрать электрическую схему согласно рис. 2.11.

2. Снять верхнюю пластину конденсатора и с помощью штангенциркуля в 6 точках по периметру измерить зазор d между пластинами конденсатора (высоту уступа диэлектрической окантовки нижней пластины) и определить среднее значение $\langle d \rangle$. Рассчитать ёмкость C_0 воздушного конденсатора:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{\langle d \rangle}, \quad (2.31)$$

где площадь обкладки $S=224 \text{ см}^2$.

3. Поместить верхнюю пластину на диэлектрическую окантовку нижней пластины.

4. Включить генератор сигналов и осциллограф в сеть, прогреть в течение 3 – 5 мин.

5. С помощью кнопок управления на лицевой панели генератора установить гармоническое напряжение частотой в диапазоне 2 – 4 кГц.

6. Измерить период T колебаний, размах входного напряжения ΔU_1 и размах напряжения ΔU_2 на резисторе.

7. Рассчитать частоту ν колебаний ($\nu=1/T$), а также ёмкость C исследуемого конденсатора, пользуясь выражением (2.27). Сопротивление резистора равно $R=3,3 \text{ кОм}$.

8. Измерить величины T , ΔU_1 и ΔU_2 для пилообразного напряжения (см. рис. 2.10) и рассчитать ёмкость C исследуемого конденсатора, пользуясь выражением (2.30).

9. Результаты измерений и расчётов занести в таблицу 3.

Таблица 3

Форма переменного напряжения	T , с	ν , Гц	ΔU_1 , В	ΔU_2 , В	C , пФ
Гармоническая					
Пилообразная					

10. Сравнить значение ёмкости C конденсатора, полученное экспериментально, с расчетным значением C_0 .

Задание 2. Определение диэлектрической проницаемости пластины

1. С помощью штангенциркуля в 6 точках по периметру измерить толщину d диэлектрической пластины (выданной преподавателем или находящейся на рабочем месте) и определить среднее значение $\langle d \rangle$.

2. Снова рассчитать ёмкость C_0 воздушного конденсатора по формуле (2.31), но при расстоянии между обкладками, равном толщине диэлектрической пластины.

3. Поместить диэлектрическую пластину между верхней и нижней пластинами конденсатора.

4. Повторить пп. 5 – 9 задания 1.

5. По результатам измерения ёмкости C для каждой формы переменного напряжения найти диэлектрическую проницаемость пластины:

$$\varepsilon = C/C_0.$$

6. Оценить погрешность измерений.

Контрольные вопросы

1. Что такое электроёмкость уединённого проводника и в каких единицах она измеряется?
2. Вывести формулу ёмкости уединенной заряженной сферы.
3. Как будет изменяться потенциал изолированного заряженного мыльного пузыря при изменении его объёма?
4. Что называется ёмкостью конденсатора и от чего она зависит?
5. Вывести формулы электроёмкости плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов.
6. Вывести формулы последовательного и параллельного соединения конденсаторов.
7. Как, имея конденсаторы ёмкостью 0,25 мкФ, 0,5 мкФ и 1 мкФ, получить батарею конденсаторов ёмкостью 0,7 мкФ и 0,2 мкФ?

Библиографический список

1. Савельев И.В. Курс общей физики: в 4 т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика: учеб. пособие / И.В. Савельев; под общ. ред. В.И. Савельева. 2-е изд., стереотип. М.: КНОРУС, 2012. 576 с.
2. Детлаф А. А. Курс физики: учеб. пособие для студентов высших технических учебных заведений / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – 9-е изд., стереотип. – М.: Академия, 2014. – 720 с.
3. Трофимова Т. И. Курс физики: учеб. пособие для инженерно-технических специальностей вузов / Т. И. Трофимова. – 20-е изд., стереотип. – М.: Академия, 2014. – 560 с.
4. Калашников Н.П., Смондырев М.А. Основы физики: учеб. пособие. Т. 1. – М.: Дрофа, 2001. – 531 с.

Оглавление

1. Элементы теории	3
1.1. Электростатическое поле в вакууме.....	3
1.1.1. Электрический заряд.....	3
1.1.2. Напряженность электрического поля точечного заряда. Принцип суперпозиции полей.	6
1.1.3. Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Гаусса.....	11
1.1.4. Потенциальность электростатического поля. Теорема о циркуляции вектора \vec{E}	15
1.1.5. Потенциал электростатического поля.....	16
1.1.6. Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом.....	18
1.1.7. Примеры расчета электрических полей	20
1.2. Электрическое поле в веществе	25
1.2.1. Электростатическая индукция	25
1.2.2. Электрическое поле в диэлектриках	26
1.2.3. Поляризация диэлектриков. Вектор поляризации. Связанные и сторонние заряды	30
1.2.4. Диэлектрическая проницаемость вещества.....	33
1.2.5. Теорема Гаусса для диэлектрической среды. Вектор электрического смещения.....	34
1.2.6. Условия для векторов \vec{E} и \vec{D} на границе раздела двух диэлектриков	36
1.2.7. Сегнетоэлектрики	39
1.3. Проводники в электрическом поле.....	41
1.3.1. Поле внутри проводника и у его поверхности. Распределение заряда в проводнике	41

1.3.2. Електроемкость уединенного проводника	43
1.3.3. Взаимная емкость проводников. Конденсаторы.....	44
1.4. Энергия электрического поля	47
1.4.1. Энергия взаимодействия системы зарядов.....	47
1.4.2. Энергия конденсатора.....	49
1.4.3. Объемная плотность энергии	49
2. Лабораторный практикум	51
Лабораторная работа 2-3	
Изучение электростатического поля электродов	
сложной конфигурации.....	51
Лабораторная работа 2-6	
Изучение электрических свойств сегнетоэлектриков	58
Лабораторная работа 2-15	
Измерение емкости электролитического конденсатора	65
Лабораторная работа 2-22	
Определение ёмкости плоского конденсатора	72
Библиографический список	78