

5441

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. В. Ф. УТКИНА**

**ИЗУЧЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
КОЛЕБАНИЙ**

Методические указания
к лабораторной работе

Рязань 2019

УДК 57(021)

Изучение вынужденных электромагнитных колебаний: методические указания к лабораторной работе /Рязан. гос. радиотехн. ун-т.; сост.: М. В. Дубков, А. В. Николаев. Рязань, 2019. 8 с.

Приводится теория вынужденных электромагнитных колебаний, дается определение добротности, описание экспериментальной установки.

Предназначены для студентов, изучающих курс “Физика”.

Табл. 1. Ил. 6. Библиогр.: 3 назв.

Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний, электромагнитные колебания, резонанс, добротность, векторные диаграммы

Печатается по решению редакционно-издательского совета Рязанского государственного радиотехнического университета.

Рецензент: кафедра общей и экспериментальной физики РГРТУ (зав. кафедрой доц.. М. В. Дубков)

Изучение вынужденных электромагнитных колебаний

Составители: Д у б к о в Михаил Викторович

Н и к о л а е в Артём Владимирович

Редактор Р. К. Мангутова

Корректор С. В. Макушина

Подписано в печать 17.06.2019 . Формат бумаги 60 × 84 1/16.

Бумага писчая. Печать трафаретная. Усл. печ. л. 0,5.

Тираж 200 экз. Заказ

Рязанский государственный радиотехнический университет.

390005, Рязань, ул. Гагарина, 59/1.

Редакционно-издательский центр РГРТУ.

Цель работы: исследование зависимости силы тока в колебательном контуре от частоты внешней э.д.с., определение резонансной частоты и добротности контура.

Приборы и принадлежности: генератор низкой частоты, электрическая схема, милливольтметр.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ

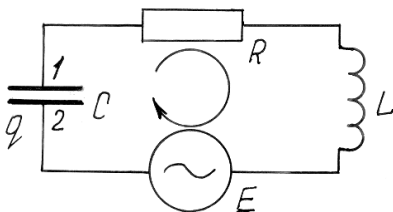


Рис. 1

Пусть в колебательном контуре (рис. 1), состоящем из соединенных последовательно конденсатора C , индуктивности L и активного сопротивления R , действует внешняя э.д.с. E , которая изменяется со временем t по гармоническому закону:

$E = E_m \cos(\omega t)$.

Согласно закону Ома для участка цепи 1- C - L - R - E -2, при указанном направлении обхода контура, имеем:

$$RI = \varphi_1 - \varphi_2 + E_c + E_m \cos(\omega t), \quad (1)$$

где E_c – э.д.с. самоиндукции.

В данном случае $E_c = -L dI/dt$ и $\varphi_2 - \varphi_1 = q/C$, поэтому уравнение (1) можно переписать следующим образом:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = E_m \cos(\omega t). \quad (2)$$

Поскольку $I = dq/dt$, то после деления на L и введения соответствующих обозначений получаем **дифференциальное уравнение вынужденных электрических колебаний** в контуре:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E_m}{L} \cos(\omega t), \quad (3)$$

где $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ – *собственная частота контура*; $\beta = R/2L$ – *коэффициент затухания*.

В интересующем нас случае установившихся колебаний частное *решение дифференциального уравнения* (3) имеет вид:

$$q = q_m \cos(\omega t - \psi), \quad (4)$$

где q_m – амплитуда заряда на конденсаторе; ψ – разность фаз между колебаниями заряда и внешней э.д.с. E .

Чтобы определить *ток в контуре*, достаточно продифференцировать уравнение (4) по времени t . Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} I &= -\omega q_m \sin(\omega t - \psi) = \omega q_m \cos(\omega t - \psi + \pi/2) = \\ &= I_m \cos(\omega t - \phi), \end{aligned} \quad (5)$$

где $I_m = \omega q_m$ – амплитуда тока; $\phi = (\psi - \pi/2)$ – сдвиг по фазе между током и внешней э.д.с. E .

Для нахождения *амплитуды тока* I_m и *фазового сдвига* ϕ воспользуемся тем, что левая часть уравнения (2) представляет собой сумму напряжений на индуктивности L , сопротивлении R и емкости C . При этом в каждый момент времени эта сумма равна внешней э.д.с. E , то есть

$$U_L + U_R + U_C = E_m \cos(\omega t). \quad (6)$$

Здесь, с учетом выражений (4) и (5):

$$U_R = RI = RI_m \cos(\omega t - \phi), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} U_C &= \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega t - \psi) = \\ &= \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$U_R = RI = RI_m \cos(\omega t - \phi),$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = -\omega LI_m \sin(\omega t - \phi) = \omega LI_m \cos(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}). \quad (9)$$

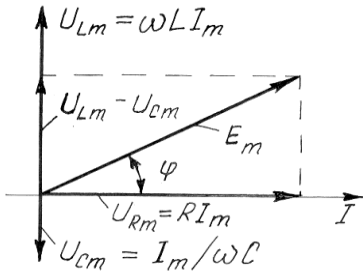


Рис. 2

Как следует из трех последних уравнений, U_R находится **в фазе** со током I , U_C **отстает по фазе** от тока I на $\pi/2$, а U_L **опережает по фазе** ток I на $\pi/2$. Все это наглядно представлено на **векторной диаграмме** (рис. 2), где изображены амплитуды напряжений

$$U_{Rm} = RI_m, \quad U_{Cm} = I_m / \omega C,$$

$$U_{Lm} = \omega L I_m$$

и их векторная сумма, которая согласно уравнению (6) равна значению амплитуды вектора E_m .

Из прямоугольного треугольника векторной диаграммы (рис. 2) несложно получить искомые соотношения для амплитуды тока I_m и фазового сдвига φ . Для этого достаточно воспользоваться теоремой Пифагора и определением тангенса.

Таким образом:

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \quad (10)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \quad (11)$$

Из анализа выражений (10) и (11) следует, что амплитуда тока I_m в контуре и сдвиг фазы φ зависят не только от параметров контура L , R и C , но и от циклической частоты ω внешней э.д.с. E .

Как видно на рис. 3, амплитуда силы тока резко возрастает с приближением частоты ω внешней э.д.с. к собственной частоте контура ω_0 и затем вновь резко убывает при $\omega > \omega_0$. Это явление называется **резонансом напряжений**, а приведенные на рис. 3 зависимости — **резонансными кривыми**.

При $\omega L - 1/\omega C = 0$ сила тока имеет значение $I_m = \frac{E_m}{R}$.

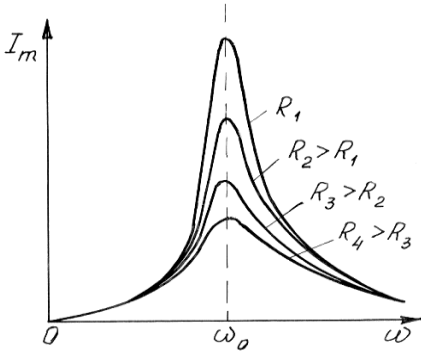


Рис. 3

меньше коэффициент затухания $\beta = R/2L$.

Следует также отметить, что при резонансе сдвиг фазы между током и внешней э.д.с. (рис. 4) равен нулю. При $\omega > \omega_0$ ток отстает по фазе от внешней э.д.с. ($\varphi > 0$) и опережает внешнюю э.д.с. ($\varphi < 0$) при

$$\omega < \omega_0.$$

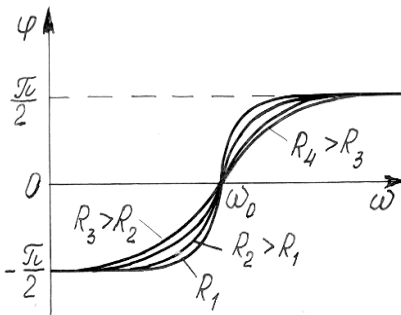


Рис. 4

при резонансе превышает значение амплитуды действующей в контуре внешней э.д.с. E_m :

$$Q = \frac{U_{Cm, \text{рез}}}{E_m} = \frac{1}{\omega_p RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (13)$$

В общем случае добротность Q колебательной системы определяется как величина, обратно пропорциональная **логарифмическому декременту затухания** $\lambda = \beta T$, и оценивается числом колебаний N с периодом T , совершаемых

Следовательно, резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура:

$$\omega_p = \omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad (12)$$

Максимум при резонансе в контуре оказывается тем выше и острее, чем меньше его активное сопротивление R и, следовательно, чем

Резонансные свойства контура характеризуются его **добротностью** Q , которая, в частности, показывает, во сколько раз амплитуда напряжения на конденсаторе U_{Cm} (или на индуктивности U_{Lm})

за время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в $e \approx 2,7$ раза:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N. \quad (14)$$

Существуют и другие определения добротности, например через относительные **потери энергии** в контуре за один период колебаний

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}, \quad (15)$$

где W – энергия, запасенная в контуре; ΔW – уменьшение энергии за один период.

Действительно,

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{W(t) - W(t+T)}{W(t)} = \frac{1 - e^{-2\beta T}}{1} = 1 - e^{-2\beta T}. \quad (16)$$

При незначительном затухании ($\lambda \ll 1$), $e^{-2\lambda} \approx 1 - 2\lambda$. В таком случае:

$$\frac{\Delta W}{W} = 1 - (1 - 2\lambda) = 2\lambda. \quad (17)$$

Далее, после совместного решения уравнений (14) и (17), приходим к уже известному соотношению (15):

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}.$$

Добротность контура связана и с другой важной характеристикой резонансной кривой – ее **шириной** (рис. 5). Оказывается, что при выполнении условия $\beta^2 \ll \omega_0^2$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta \omega}, \quad (18)$$

где $\Delta \omega$ – **ширина резонансной кривой**, измеренная на “высоте”, равной 0,7 от максимальной, то есть на уровне, соответствующем половине мощности в контуре (как известно, мощность пропорциональна квадрату тока, поэтому при токе, составляющем 0,7 от максимального,

$$I_m^2 = (0,7 I_{m,рез})^2 \approx 0,5 I_{m,рез}^2.$$

Чтобы убедиться в справедливости соотношения (18), обратимся вновь к уравнению (10).

При резонансе $\omega L = 1/\omega C$. В этом случае амплитуда тока максимальна и имеет значение $I_{m,рез} = E_m/R$. Поскольку с математической точки зрения уменьшение тока обусловлено ростом знаменателя в уравнении (10), то при $I_m = 0,7 I_{m,рез}$ должно выполняться условие

$$0,7 \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = R,$$

откуда, с учетом того, что $0,7^2 \approx 0,5$, можно получить:

$$\omega L - 1/\omega C = R. \quad (19)$$

Теперь воспользуемся уравнениями (12) и (13), из совместного решения которых

$$L = QR/\omega_0, \quad C = 1/\omega_0 QR. \quad (20)$$

После подстановки выражений для L и C в уравнение (19) и несложных математических преобразований получаем:

$$\frac{(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)}{\omega \omega_0} = \frac{1}{Q}. \quad (21)$$

Далее, с учетом того, что $(\omega - \omega_0) = \Delta\omega/2$, $(\omega + \omega_0) \approx 2\omega_0$ и $\omega \omega_0 \approx \omega_0^2$:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

Однако следует напомнить, что эта формула справедлива лишь при больших Q , то есть в том случае, когда затухание свободных колебаний в контуре невелико.

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

В состав установки (рис. 6) входят: генератор гармонических колебаний, переменное сопротивление R , индуктивности $L1$ и $L2$, емкости $C1$ и $C2$, измерительное сопротивление $R1$, милливольтметр.

Генератор гармонических колебаний вырабатывает перемен-

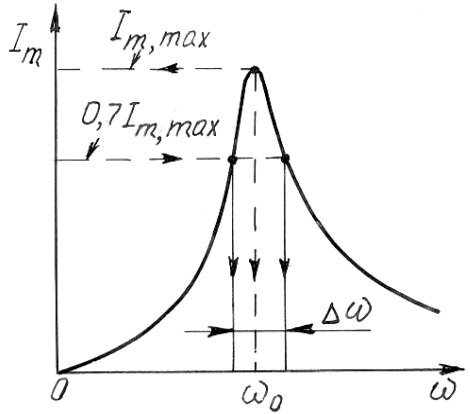


Рис. 5

ное напряжение синусоидальной формы. Частота и амплитуда этого напряжения могут изменяться с помощью регулировок “Частота” и “Амплитуда”, расположенных на передней панели генератора. Переключатели $S1$ и $S2$ на экспериментальном макете позволяют изменять значения индуктивности и емкости контура. Переменное сопротивление R позволяет изменять затухание в колебательном контуре. Милливольтметр предназначен для измерения напряжения на измерительном сопротивлении $R1$. Это напряжение пропорционально току, протекающему в контуре.

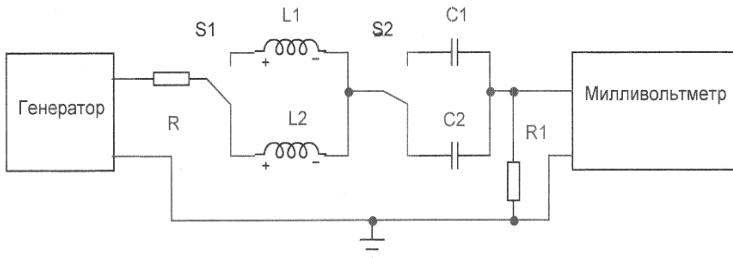


Рис. 6

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Включить генератор и милливольтметр. Дать приборам прогреться в течение 5 минут.
2. Ручкой “Частота” генератора установить значение частоты в диапазоне 6-12 кГц.
3. Переключатель “mV” милливольтметра установить в положение “100 mV”.
4. Установить переключатели $S1$ и $S2$ в положения $L1$ и $C1$ соответственно.
5. Ручкой “Частота” настроить генератор на частоту, соответствующую резонансу в контуре (по максимуму напряжения на сопротивлении $R1$).
6. Установить ручкой “Выход I, II” генератора отклонение стрелки милливольтметра В3-38 в пределах 70-100 мВ.
7. Установить величину сопротивления R в пределах 0-300 Ом.
8. Изменяя частоту генератора в пределах 2-20 кГц с шагом 0,5-1 кГц, получить амплитудно-частотную характеристику колебательного контура

(резонансную кривую).

9. Занести полученные данные в таблицу.

$L1, C1$		$L2, C1$		$L1, C2$		$L2, C2$	
$F, \text{кГц}$	$U, \text{мВ}$	$F, \text{кГц}$	$U, \text{мВ}$	$F, \text{кГц}$	$U, \text{мВ}$	$F, \text{кГц}$	$U, \text{мВ}$

10. По полученным данным построить четыре зависимости тока $I=U_R/R1$ в контуре от частоты F (кГц). Сопротивление $R1=5 \text{ Ом}$.

11. По формуле (18) рассчитать добротность контура Q .

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие колебания называются вынужденными? Приведите примеры.
2. Получите зависимость амплитуды вынужденных колебаний (тока или напряжения) в контуре от частоты внешнего источника.
3. Нарисуйте амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики колебательного контура. Что такое резонанс?
4. Найдите сдвиг по фазе между силой тока в контуре и напряжением внешнего источника графически или аналитически.
5. Получите выражение для резонансной частоты последовательного колебательного контура.
6. Найдите отношение амплитуды напряжения на конденсаторе к амплитуде внешнего источника при резонансе в случае слабого затухания.
7. Почему в цепях переменного тока напряжение и ток не совпадают по фазе?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 2. М.: Наука, 1988.
2. Детлаф А. А., Яворский Б. М. Курс физики. М.: Высш. шк., 2000.
3. Трофимова Т. И. Курс физики. М.: Высш. шк., 2001.