МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное научное учреждение
ИНСТИТУТ УПРАВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАНИЕМ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ОБРАЗОВАНИЯ

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ФОНД ЭЛЕКТРОННЫХ РЕСУРСОВ "НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ"
(основан в 1991 году)

СВИДЕТЕЛЬСТВО О РЕГИСТРАЦИИ ЭЛЕКТРОННОГО РЕСУРСА

ИУО РАО
ОФЭРНиО

№ 23685

Настоящее свидетельство выдано на электронный ресурс, отвечающий требованиям новизны и приоритетности:

Электронное учебное пособие «Алгебра и теория чисел. Часть 2» направление подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем»

Дата регистрации: **25 июня 2018 года**

Автор: **Султанов С.Р.**

Организация-разработчик: **ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет»**

Директор ФГБНУ ИУО РАО,
доктор экономических наук ____________ С.С. Неустроев

Руководитель ОФЭРНиО, почетный
работник науки и техники России ____________ А.И. Галкина

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РЯЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

СУЛТАНОВ С.Р.

АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

ЧАСТЬ 2

Электронное учебное пособие

Рязань 2017

Данный курс основан на лекциях, которые читались автором студентам факультета вычислительной техники РГРТУ в 2002 – 2005 г.г. Автор выражает свою признательность студентам ФВТ, взявших на себя труд по набору текста лекций, и благодарит доцента кафедры высшей математики РГРТУ Новикова Анатолия Ивановича за ряд ценных замечаний и советов.

Глава 3. Линейные пространства.

§ 12. Линейное пространство и его свойства.

Пусть $(L, +)$ является коммутативной группой. Введем внешнюю операцию умножения элементов группы L на числа (действительные, или комплексные), как отображение $\varphi: R\times L \xrightarrow{в} L$, где R – множество действительных чисел, или $\varphi: C\times L \xrightarrow{в} L$, где C – множество комплексных чисел, причём результат операции будем обозначать $\varphi(\alpha, \overline{x}) = \alpha\overline{x}$, где α – действительное или комплексное число, а $\overline{x}\in L$.

Элементы L будем называть *векторами* и обозначать: $\overline{x}, \overline{y}, \ldots$.

Определение. Группу L с заданной на ней операцией "+" и определённой выше операцией умножения векторов на числа мы назовем *линейным пространством*, если будут выполняться следующие условия:

1. $1\overline{x} = \overline{x}$;
2. $(\alpha\beta)\overline{x} = \alpha(\beta\overline{x})$;
3. $(\alpha+\beta)\overline{x} = \alpha\overline{x} + \beta\overline{x}$;
4. $\alpha(\overline{x}+\overline{y}) = \alpha\overline{x} + \beta\overline{y}$, для всех $\alpha, \beta\in R$ (или С), и для любых $\overline{x}, \overline{y}\in L$.

Если определена операция умножения элементов L на действительные числа, то говорят о *действительном* линейном пространстве, если же данная операция определена для комплексных чисел, то говорят о *комплексном* линейном пространстве. В дальнейшем мы будем изучать действительные линейные пространства, но все полученные результаты переносятся и на случай комплексных линейных пространств.

Приведём некоторые примеры действительных линейных пространств.

Пример 1. Множество V_2 геометрических векторов на плоскости с операциями сложения векторов и умножения векторов на действительные числа.

Пример 2. Множество V_3 геометрических векторов в пространстве с теми же операциями.

Пример 3. Множество $C[a,b]$ всех вещественных, непрерывных на промежутке $[a,b]$ функций.

Сумма функций f и g в множестве $C[a,b]$ определена как функция $\varphi = f+g$ такая, что $\varphi(x) = f(x)+g(x)$, а произведение функции на число - как функция $\alpha\cdot f$ такая, что $(\alpha\cdot f)(x) = \alpha\cdot f(x)$ для всех $x\in[a,b]$.

Пример 4. Множество всех вещественных строк (столбцов) одинаковой размерности n (где $n\in N$), с обычными операциями сложения строк (столбцов), и умножения их на действительные числа. Фактически - это пространство R^n (n*-ая* декартова степень множества действительных чисел).

Пример 5. Множество всех вещественных прямоугольных матриц размера $m\times n$ (где $m, n\in N$), с операциями сложения матриц и умножения матриц на числа. Можно данное пространство рассматривать также как пространство R^{mn} вещественных строк размерности $m\cdot n$.

Приведем некоторые общие свойства линейных пространств.

Свойство 1. $\mathbf{0}\overline{x} = \overline{0}$ ***для всех*** $\overline{x}\in L$.

Действительно, $0\overline{x} = (0+0)\overline{x} = 0\overline{x} + 0\overline{x}$, тогда, прибавляя к обеим частям полученного равенства $0\overline{x} = 0\overline{x} + 0\overline{x}$ обратный элемент для $0\overline{x}$, используя ассоциативность групповой операции "+" получим: $-(0\overline{x}) + 0\overline{x} = (-(0\overline{x}) + 0\overline{x}) + 0\overline{x}$, следовательно, $0\overline{x} + \overline{0} = \overline{0}$, и $0\overline{x} = \overline{0}$.

Свойство 2. $\alpha\,\overline{0}=\overline{0}$ ***для всех*** $\alpha\in R$**.**
Действительно, $\alpha\,\overline{0}=\alpha\,(\overline{0}+\overline{0})\ =\alpha\,\overline{0}+\alpha\,\overline{0}$, тогда прибавляя к обеим частям полученного равенства вектор $-\,(\alpha\,\overline{0})$, получим: $\alpha\,\overline{0}+\ (-(\alpha\,\overline{0}))\ =\ \alpha\,\overline{0}+(\alpha\,\overline{0}+(-(\alpha\,\overline{0})))$, откуда $\overline{0}+\alpha\,\overline{0}=\overline{0}$, и значит $\alpha\,\overline{0}=\overline{0}$.

Свойство 3. $\mathbf{(-1)}\,\overline{x}=-\overline{x}$ ***для всех*** $\overline{x}\in L$**.**
Действительно, $(-1)\,\overline{x}+\overline{x}=(-1)\,\overline{x}+1\,\overline{x}=(-1+1)\,\overline{x}=0\,\overline{x}\ =\ \overline{0}$.

Свойство 4. Определим в линейном пространстве L операцию «*разность векторов»* следующим образом: $\overline{x}-\overline{y}\ =\ \overline{x}+(-\overline{y})$ для всех $\overline{x},\overline{y}\in L$.

Тогда, ***для всех*** $\alpha\in R$***, и для любых*** $\overline{x},\overline{y}\in L$, $\alpha\,(\overline{x}-\overline{y})=\alpha\,\overline{x}\,-\,\alpha\,\overline{y}$**.**
Действительно,
$\alpha\,(\overline{x}-\overline{y})=\alpha\,(\overline{x}\,+\,(-\overline{y}))=\alpha\,\overline{x}\,+\alpha\,(-\overline{y})=\alpha\,\overline{x}\,+\alpha\,((-1)\,\overline{y})=\alpha\,\overline{x}+(-1)(\alpha\,\overline{y})=\alpha\,\overline{x}\,-\alpha\,\overline{y}$.

§ 13. Конечномерные линейные пространства.

Определение. Конечная система векторов $\overline{x}_1,...,\overline{x}_n$ линейного пространства L называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальная нулевая линейная комбинация векторов данной системы, т.е. найдутся коэффициенты $\alpha_1,...,\alpha_n\in R$ такие, что хотя бы один из них отличен от нуля, и при этом $\alpha_1\,\overline{x}_1+\alpha_2\,\overline{x}_2+\,.\,.\,.\,+\alpha_n\,\overline{x}_n\ =\ \overline{0}$. В противном случае данная система векторов $\overline{x}_1,...,\overline{x}_n$ называется *линейно независимой*.

Приведём некоторые достаточно очевидные свойства линейно зависимых систем**.**

1. *Если в конечной системе векторов существует нулевой вектор, то такая система линейно зависима.*

2. *Если в конечной системе векторов есть два одинаковых вектора, то данная система линейно зависима.*

3. *Если в конечной системе векторов найдется линейно зависимая подсистема, то вся система является линейно зависимой.*

Определение. Пусть

$$\{\overline{a_i}\}_{i\in I} \tag{1}$$

– некоторое семейство (система) векторов линейного пространства L. Конечное подмножество $\overline{a}_{i_1},\overline{a}_{i_2}...\overline{a}_{i_n}$ векторов данной системы называется *максимальной линейно независимой* подсистемой системы (1), если выполняются следующие два условия:

1) система $\overline{a}_{i_1},\overline{a}_{i_2},...,\overline{a}_{i_n}$ линейно независима;
2) добавление любого вектора системы (1) к данной конечной системе $\overline{a}_{i_1},\overline{a}_{i_2}...\overline{a}_{i_n}$ приводит к линейно зависимой системе.

Определение. Конечная система векторов

$$\overline{a}_{i_1},\overline{a}_{i_2},...,\overline{a}_{i_n}\,, \tag{1*}$$

входящих в систему (1), называется *базисом системы* (1), если система (1*) линейно независима, и каждый вектор системы (1) можно представить в виде линейной комбинации векторов системы (1*).

Теорема. *Конечная подсистема* (1*) *системы* (1) *векторов линейного пространства L является базисом системы* (1) *тогда и только тогда, когда система* (1*) *является максимальной линейно независимой подсистемой системы (1).*

Доказательство. Пусть система (1*) является максимальной линейно независимой подсистемой системы (1). Возьмем любой вектор $\overline{a}_i$ системы (1) , и добавим его к системе (1*). Тогда мы получим линейно зависимую систему, т. е. найдется нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1,...,\alpha_{n+1}$ (здесь хотя бы один элемент отличен от нуля) такой, что $\alpha_1\bar{a}_{i_1}+...+\alpha_n\bar{a}_{i_n}+\alpha_{n+1}\bar{a}_i=\bar{0}$.

Если предположить, что $\alpha_{n+1}=0$, то отсюда следует, что система (1*) линейно зависима, что противоречит условию, следовательно $\alpha_{n+1}\neq 0$. Тогда нетрудно показать, что $\bar{a}_i=\left(-\alpha_1/\alpha_{n+1}\right)\bar{a}_{i_1}+...+\left(-\alpha_n/\alpha_{n+1}\right)\bar{a}_{i_n}$, т.е. вектор $\bar{a}_i$ представляется в виде линейной комбинации векторов системы (1*), следовательно система (1*) является базисом системы (1).

Обратно, пусть система (1*) является базисом системы (1). Покажем, что (1*) – максимальная линейно независимая подсистема системы (1).

Пусть $\bar{a}_i$ – произвольный вектор системы (1). Добавим его к системе (1*). Тогда найдутся коэффициенты $\alpha_1,...,\alpha_n$ такие, что $\bar{a}_i=\alpha_1\bar{a}_{i_1}+\alpha_2\bar{a}_{i_2}+...+\alpha_n\bar{a}_{i_n}$, откуда следует, что $(-1)\bar{a}_i+\alpha_1\bar{a}_{i_1}+\alpha_2\bar{a}_{i_2}+...+\alpha_n\bar{a}_{i_n}=\bar{0}$.

Таким образом, система $\bar{a}_i,\bar{a}_{i_1},\bar{a}_{i_2},...,\bar{a}_{i_n}$ линейно зависима. Следовательно, система (1*) является максимальной линейно независимой подсистемой системы (1). Теорема доказана.

Замечание. Если в роли системы (1) в последних определениях рассматривается все линейное пространство *L* (т.е. если $L=\{\bar{a}_i\}_{i\in I}$), то говорят о *максимальной линейно независимой системе векторов пространства* L и о *базисе пространства L*. В этом случае из доказанной теоремы следует, что *конечная система векторов линейного пространства является базисом в нем тогда и только тогда, когда она является его максимальной линейно независимой системой.*

Теорема. *Пусть дана некоторая система*

$$\{a_i\}_{i\in I} \qquad (1)$$

векторов линейного пространства L *и пусть каждый вектор* $\bar{a}_i$ *из системы* (1) *можно представить в виде линейной комбинации векторов системы*

$$\bar{b}_1,\bar{b}_2,...,\bar{b}_n \qquad (1)'$$

векторов данного пространства L. Тогда в системе (1) *найдется не более* n *линейно независимых векторов.*

Доказательство. Если система (1) содержит векторов не больше, чем n, то данное утверждение будет выполнено.

Пусть система (1) состоит из большего, чем n числа векторов, и пусть в ней найдется m линейно независимых векторов, причём $m > n$.

Пусть $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_m$ – такая линейно независимая система векторов из системы (1). По условию теоремы найдутся коэффициенты a_{ij} такие, что выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases}\bar{a}_1=a_{11}\bar{b}_1+a_{12}\bar{b}_2+\cdots+a_{1n}\bar{b}_n\\ \bar{a}_2=a_{21}\bar{b}_1+a_{22}\bar{b}_2+\cdots+a_{2n}\bar{b}_n\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \bar{a}_m=a_{m1}\bar{b}_1+a_{m2}\bar{b}_2+\cdots+a_{mn}\bar{b}_n\end{cases},$$

или $\bar{a}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\bar{b}_j$, для каждого $i=\overline{1,m}$.

Рассмотрим матрицу A, состоящую из данных коэффициентов a_{ij}

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Пусть $rg\,A=r$, тогда $r\le n<m$.

По теореме о базисном миноре в матрице A существует r линейно независимых строк, остальные же являются линейными комбинациями данных r строк. Тогда, так как $r < m$, то в матрице A найдется хотя бы одна строка, являющаяся линейной комбинацией всех остальных. Отсюда следует, что существует нетривиальная нулевая линейная комбинация всех строк матрицы A, т.е. существует набор $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ чисел, среди которых хотя бы одно отлично от нуля такой, что выполняется равенство: $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i E_i = (0,0,...,0)$ (где E_i – это i-я строка матрицы A), или, покомпонентно:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_{i1}, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_{i2}, \cdots, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_{in}\right) = (0,0,...,0), \quad \text{откуда} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_{ij} = 0 \quad \text{для каждого} \quad j = \overline{1,n}.$$

Но тогда, умножая каждый вектор $\overline{a}_i$ на α_i, а затем, складывая полученные векторы, получим

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overline{a}_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{b}_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\alpha_i a_{ij}) \overline{b}_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i a_{ij}) \overline{b}_j = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} (\alpha_i a_{ij})) \overline{b}_j = \sum_{j=1}^{n} 0 \overline{b}_j = \sum_{j=1}^{n} \overline{0} = \overline{0}$$

(здесь мы используем свойства дистрибутивности умножения векторов линейного пространства на числа относительно сложения и коммутативности сложения векторов).

Отсюда следует, что система $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_m$ линейно зависима, что противоречит условию. Полученное противоречие завершает доказательство.

Следствие 1. *Если система векторов* (1) *линейного пространства L имеет два различных базиса, то число векторов в них совпадает.*

Доказательство. Пусть системы векторов

$$\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n \tag{3}$$

и

$$\overline{a}'_1, \overline{a}'_2 ..., \overline{a}'_m \tag{4}$$

являются базисами системы (1). Это значит, что любой вектор системы (4) можно представить в виде линейной комбинации векторов системы (3); значит, число линейно независимых векторов в системе (4) не может быть больше n, следовательно, $m \le n$.

Аналогично, каждый вектор системы (3) является линейной комбинацией векторов системы (4), следовательно, $n \le m$. Поэтому $n = m$, и следствие доказано.

Из полученного следствия непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *Все максимальные линейно независимые подсистемы данной системы* (*если они существуют*) *состоят из одного и того же числа векторов.*

Определение. Если мы говорим обо всем линейном пространстве L, то число элементов конечного базиса пространства называют *размерностью пространства* и обозначают dim L, d(L). Если пространство L не обладает конечным базисом, то оно называется пространством *бесконечной размерности* или *бесконечномерным*.

Заметим, что в n-мерном линейном пространстве *любая система, состоящая более чем из n векторов, будет линейно зависимой.*

Также отметим, что *любая линейно независимая система векторов n-мерного линейного пространства содержится в некотором базисе этого пространства.*

Следствие 3. *Для любой вещественной матрицы размера $m \times n$ максимальное число линейно независимых строк равно максимальному числу линейно независимых столбцов и равно рангу матрицы.*

Доказательство. Пусть матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

имеет ранг r.

Рассмотрим строки матрицы A как векторы линейного пространства R^n. Из теоремы о базисном миноре следует, что базис данной системы строк содержит r элементов, следовательно, r – максимальное число линейно независимых строк матрицы A.

Рассматривая столбцы матрицы A как векторы линейного пространства R^m, аналогично получаем, что данная система столбцов имеет базис, состоящий из r столбцов, и следовательно r равно максимальному числу линейно независимых столбцов. Следствие доказано.

Рассмотрим приведённые ранее примеры линейных пространств, установим размерности этих пространств.

Пример 1. Линейное пространство V_2 геометрических векторов на плоскости имеет размерность два, т.е. является *двумерным*.

Пример 2. Линейное пространство V_3 геометрических векторов в пространстве имеет размерность три, т.е. является *трехмерным*.

Пример 3. $C[a,b]$ – бесконечномерное пространство, для любого $n \in N$ система функций $x^0, x^1, \dots, x^n, x^{n+1}$ является линейно независимой. Продолжая эту последовательность, мы будем получать системы линейно независимых векторов пространства $C[a,b]$, содержащие сколь угодно большое число векторов.

Пример 4. Линейное пространство R^n вещественных строк длины n имеет размерность n. Действительно, положим $\bar{e}_1 = (1\ 0\ \dots\ 0)$, $\bar{e}_2 = (0\ 1\ \dots\ 0)$, ... , $\bar{e}_n = (0\ 0\ \dots\ 1)$ (здесь в каждой строке $\bar{e}_i$ на i - ом месте стоит 1, а остальные компоненты – нули). Тогда, если $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i = (0\ 0\ \dots\ 0)$, то отсюда следует, что $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = (0\ 0\ \dots\ 0)$, т.е. $\alpha_i = 0$ для каждого $i = \overline{1,n}$. Таким образом, для векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ существует их единственная нулевая линейная комбинация – тривиальная. Следовательно, данная система векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ линейно независима. Заметим, что для любого вектора $\bar{a} \in R^n$ справедливо равенство $\bar{a} = (a_1 a_2 \dots a_n) = a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + \dots + a_n \bar{e}_n$, и таким образом данная система строк $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ является базисом линейного пространства R^n. Назовем данный базис *каноническим*.

Пример 5. Линейное пространство вещественных прямоугольных матриц размера $m \times n$ имеет, очевидно, размерность mn.

Пример 6. Множество многочленов n-ой степени с вещественными коэффициентами вида $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, где $a_i \in R$, является линейным пространством. Напомним, что два многочлена $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ и $Q_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$ считаются равными тогда и только тогда, когда для всех $i = \overline{1,n}$ коэффициенты $a_i = b_i$. Сумма многочленов $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ определяется как многочлен $G_n(x) = P_n(x) + Q_n(x)$ такой, что $G_n(x) = (a_0 + b_0)x^n + (a_1 + b_1)x^{n-1} + \dots + (a_n + b_n)$. Произведение многочлена $P_n(x)$ на число α определяется как многочлен $\alpha P_n(x) = (\alpha a_0)x^n + (\alpha a_1)x^{n-1} + \dots + \alpha a_n$.

Данное пространство имеет размерность $(n+1)$, так как система многочленов: $1, x, x^2, \dots, x^n$ – линейно независима для каждого $n \in N$, и любой многочлен $P_n(x)$ очевидным образом представляется в виде линейной комбинации векторов данной системы.

Определение. Пусть L – n-мерное линейное пространство, и пусть система векторов

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n \tag{2}$$

образует базис в L, причем порядок следования векторов в базисе будем считать фиксированным. Пусть $\bar{x}$ – произвольный вектор пространства L. Тогда упорядоченный набор $(x_1, x_2 \dots, x_n)$ коэффициентов представления вектора $\bar{x}$ в виде линейной комбинации векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ называется *координатами* вектора $\bar{x}$ в данном базисе (2). Другими словами, если $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$, то упорядоченный набор $(x_1, x_2 \dots, x_n)$ – это координаты вектора $\bar{x}$ в базисе (2). Очевидно, вектор $\bar{x}$ однозначно определен своими координатами. Верно и обратное утверждение.

Теорема. *Каждый вектор n-мерного линейного пространства имеет единственное представление в данном базисе.*

Доказательство. Пусть вектор $\bar{x} \in L$ имеет два представления в базисе (2), т.е. $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n$, и $\bar{x} = x_1'\bar{e}_1 + x_2'\bar{e}_2 + ... + x_n'\bar{e}_n$, тогда $\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i'\bar{e}_i$, откуда $\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e}_i - \sum_{i=1}^{n} x_i'\bar{e}_i = \bar{0}$, следовательно $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i')\bar{e}_i = \bar{0}$, и, в силу линейной независимости системы (2), коэффициенты $x_i = x_i'$ для всех $i = \overline{1,n}$. Теорема доказана.

Данная теорема позволяет нам установить взаимно однозначное соответствие между векторами n-мерного линейного пространства L и элементами пространства R^n (при некотором фиксированном базисе пространства L), когда мы каждому вектору из L ставим в соответствие его координаты в данном базисе. Заметим, что *данное соответствие сохраняется при сложении векторов и умножении их на числа*. Действительно, если $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + ... + x_n\bar{e}_n$, $\bar{y} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + ... + y_n\bar{e}_n$, то $\bar{x} + \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e}_i + \sum_{i=1}^{n} y_i\bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)\bar{e}_i$ в силу коммутативности сложения векторов и дистрибутивности умножения их на числа относительно сложения, аналогично $\alpha\bar{x} = \alpha\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i)\bar{e}_i$, и таким образом, если вектору $\bar{x}$ соответствуют координаты $(x_1,..., x_n)$ а вектору $\bar{y}$ соответствуют координаты $(y_1,..., y_n)$, то вектору $\bar{x} + \bar{y}$ соответствует сумма строк $(x_1,..., x_n) + (y_1,..., y_n)$, а вектору $\alpha\bar{x}$ соответствует произведение $\alpha(x_1,..., x_n)$.

Полученное свойство приводит нас к понятию *изоморфизма* линейных пространств.

Определение. Рассмотрим два линейных пространства L и L' с операциями сложения “+” и “$\oplus$” соответственно. Пусть существует взаимно однозначное соответствие φ между элементами множеств L и L' (т.е. существует взаимно однозначное отображение $\varphi\colon L \xrightarrow{на} L'$), и пусть φ обладает следующими свойствами:

1) для любых $\bar{a}, \bar{b} \in L$, $\varphi(\bar{a} + \bar{b}) = \varphi(\bar{a}) \oplus \varphi(\bar{b})$;

2) для каждого $\alpha \in R$, $\varphi(\alpha\bar{a}) = \alpha\varphi(\bar{a})$.

Тогда пространства L и L' называют *изоморфными*, а данное отображение φ – *изоморфизмом* пространства L на пространство L'. Таким образом, изоморфизм φ линейных пространств – это взаимно однозначное соответствие между элементами данных пространств, сохраняющееся при выполнении операций в линейных пространствах, то есть, если $\bar{a} \xleftrightarrow{\varphi} \bar{a}'$ и $\bar{b} \xleftrightarrow{\varphi} \bar{b}'$, то $(\bar{a} + \bar{b}) \xleftrightarrow{\varphi} (\bar{a}' \oplus \bar{b}')$, и $\alpha\bar{a} \xleftrightarrow{\varphi} \alpha\bar{a}'$.

Изоморфные линейные пространства являются неразличимыми с точки зрения свойств операций в данных пространствах, поэтому их можно отождествить. Заметим, что как было выше показано, *все n-мерные линейные пространства изоморфны* R^n, и таким образом изучение свойств n-мерного линейного пространства сводится к изучению пространства R^n.

Замечание. Отметим, что в ходе приведенных выше рассуждений мы получили известное свойство для векторов любого линейного пространства: при некотором фиксированном базисе пространства *при сложении (вычитании) векторов складываются (вычитаются) их соответствующие координаты, при умножении вектора на число каждая его координата умножается на данное число.*

§ 14. Переход к другому базису (изменение базиса).

14.1 Матрица перехода к другому базису.

Пусть $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_m$ - система векторов линейного пространства L. Договоримся обозначать линейную комбинацию $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overline{a}_i$ данной системы векторов следующим образом

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overline{a}_i = \alpha_1 \overline{a}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + \ldots + \alpha_m \overline{a}_m = (\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m) * \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_m \end{pmatrix},$$

и для любой вещественной матрицы $A = (\alpha_{ij})_{m \times k}$ определим упорядоченную систему векторов

$(\overline{c}_1, \overline{c}_2 \cdots, \overline{c}_k)$, где $\overline{c}_j = (\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m) * \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$ для всех $j = 1, 2, \ldots, k$, запишем ее в виде

$$(\overline{c}_1, \overline{c}_2 \cdots, \overline{c}_k) = (\overline{a}_1, \overline{a}_2 \cdots, \overline{a}_m) * A$$

Заметим при этом, что фактически $(\overline{a}_1, \overline{a}_2 \cdots, \overline{a}_m) * A = [\, A^T \begin{pmatrix} \overline{a}_1 \\ \overline{a}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \overline{a}_n \end{pmatrix} \,]^T$

Нетрудно видеть, что при таком обозначении для любой системы векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_m$ линейного пространства и любых вещественных матриц $A = (\alpha_{ij})_{m \times k}$ и B, для которых определено произведение матриц AB, будет справедливо равенство

$$((\overline{a}_1, \overline{a}_2 \cdots, \overline{a}_m) * A) * B = (\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_m) * (AB) \quad ,$$

и для любых вещественных матриц C и D одинакового размера $m \times k$

$$(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_m) * (C + D) = (\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_m) * C + (\overline{a}_1, \overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_m) * D \quad .$$

Пусть L – линейное пространство размерности n, и система векторов

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n \qquad (1)$$

является базисом в L.

Пусть в пространстве L существует также базис

$$\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, ..., \bar{e}'_n. \qquad (2)$$

Тогда каждый вектор системы (2) можно представить в виде линейной комбинации векторов системы (1), т. е. найдутся коэффициенты a_{ij} такие, что будет справедлива следующая система равенств:

$$\begin{cases} \bar{e}'_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + \cdots + a_{n1}\bar{e}_n \\ \bar{e}'_2 = a_{12}\bar{e}_1 + a_{22}\bar{e}_2 + \cdots + a_{n2}\bar{e}_n \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{e}'_n = a_{1n}\bar{e}_1 + a_{2n}\bar{e}_2 + \cdots + a_{nn}\bar{e}_n \end{cases} \qquad (3)$$

Рассмотрим матрицу A, столбцы которой составлены из координат векторов базиса (2) в разложении их по базису (1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрицу A назовём *матрицей перехода* от базиса (1) к базису (2).

Тогда поскольку из системы (3) следует, что

$$\bar{e}'_j = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n) * \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{nj} \\ \end{pmatrix}$$

для всех $j = 1, 2, ..., n$, то данную систему (3) мы можем представить в виде равенства

$$(\bar{e}'_1, \cdots, \bar{e}'_n) = (\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n) * A \qquad (4)$$

Далее, поскольку (2) – также базис пространства L, то, рассуждая аналогичным образом, получаем равенство

$$(\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n) = (\bar{e}'_1, \cdots, \bar{e}'_n) * A', \qquad (4)^*$$

где A' – матрица перехода от базиса (2) к базису (1). Но тогда $\left(\bar{e}'_1, \cdots, \bar{e}'_n\right) = \left(\left(\bar{e}'_1, \cdots, \bar{e}'_n\right) * A'\right) * A = \left(\bar{e}'_1, \cdots, \bar{e}'_n\right) * \left(A'A\right)$. С другой стороны

$$\begin{cases} \bar{e}'_1 = 1 \cdot \bar{e}'_1 + 0 \cdot \bar{e}'_2 + \cdots + 0 \cdot \bar{e}'_n \\ \bar{e}'_2 = 0 \cdot \bar{e}'_1 + 1 \cdot \bar{e}'_2 + \cdots + 0 \cdot \bar{e}'_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{e}'_n = 0 \cdot \bar{e}'_1 + 0 \cdot \bar{e}'_2 + \cdots + 1 \cdot \bar{e}'_n \end{cases},$$

т.е. $\left(\bar{e}'_1,\bar{e}'_2,\cdots,\bar{e}'_n\right)=\left(\bar{e}'_1,\bar{e}'_2,\cdots,\bar{e}'_n\right)*E$, следовательно, $A'A=E$ в силу однозначности разложения векторов $\overline{e'}_i$ по базису.

Отсюда следует, что матрица A должна быть невырожденной, т.е. $|A|\neq 0$, а матрица A' является обратной для матрицы A.

Таким образом мы доказали справедливость следующего утверждения: *матрица перехода от нового базиса к старому является обратной для матрицы перехода от старого базиса к новому.*

Естественным образом возникает вопрос, сколько же существует различных базисов в n-мерном линейном пространстве. Ответ на данный вопрос дает следующая теорема.

Теорема. *Каждая невырожденная вещественная квадратная матрица n-го порядка может служить матрицей перехода от одного базиса к другому в n-мерном линейном пространстве.*

Доказательство.

Пусть A – невырожденная квадратная матрица n-го порядка,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

и система векторов $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_n$ образует базис линейного пространства L.

Рассмотрим упорядоченную систему векторов $\left(\bar{e}'_1,\bar{e}'_2,\cdots,\bar{e}'_n\right)=\left(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_n\right)*A$

Докажем, что система $\bar{e}'_1,\bar{e}'_2,\cdots,\bar{e}'_n$ линейно независима. Пусть система $\bar{e}'_1,\bar{e}'_2,\cdots,\bar{e}'_n$ является линейно зависимой, тогда найдется нетривиальный набор коэффициентов $\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)$ такой, что $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{e'}_i=\bar{0}$. В силу задания системы векторов $\bar{e}_1{}',\bar{e}_2{}',...,\bar{e}_n{}'$ будут выполняться следующие равенства:

$$\begin{cases} \bar{e}'_1=a_{11}\bar{e}_1+a_{21}\bar{e}_2+\cdots+a_{n1}\bar{e}_n \\ \bar{e}'_2=a_{12}\bar{e}_1+a_{22}\bar{e}_2+\cdots+a_{n2}\bar{e}_n \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{e}'_n=a_{1n}\bar{e}_1+a_{1n}\bar{e}_2+\cdots+a_{nn}\bar{e}_n \end{cases}$$

Используя данные равенства, получим $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\bar{e}_j\right)=\bar{0}$, откуда в силу дистрибутивности умножения $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(\alpha_i a_{ji})\bar{e}_j\right)=\bar{0}$. Меняя порядок суммирования в силу коммутативности сложения получим, что $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i a_{ji})\bar{e}_j\right)=\bar{0}$, и в силу дистрибутивности умножения $\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i a_{ji})\right)\bar{e}_j=\bar{0}$. Следовательно, поскольку $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_n$ – базис в L, то для каждого $j=\overline{1,n}$ выполняется равенство $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i a_{ji})=0$. Меняя индекс j от 1 до n, мы получаем, что между столбцами матрицы A существует нетривиальная линейная зависимость с коэффициентами $\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_n$, откуда следует, что определитель $|A|$ равен нулю, что противоречит условию. Теорема доказана.

Полученная теорема позволяет нам говорить, что между всеми невырожденными вещественными матрицами n-го порядка и всеми базисами n-мерного линейного пространства можно установить взаимно однозначное соответствие, зафиксировав один базис пространства в качестве исходного. При этом соответствии единичная матрица E определяет переход от исходного базиса к нему же самому: $\left(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_n\right)=\left(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_n\right)*E$.

14.2 Связь между координатами вектора в разных базисах.

Пусть вектор $\bar{x}$ в базисе (1) имеет координаты $(x_1, x_2, ..., x_n)$, т. е.

$$\bar{x} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n) * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i$$

а в базисе (2) данный вектор $\bar{x}$ имеет координаты $(x_1', x_2', ..., x_n')$, следовательно

$$\bar{x} = (\bar{e}_1', \bar{e}_2', ..., \bar{e}_n') * \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ . \\ . \\ . \\ x_n' \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \bar{e}_i' .$$

Пусть A – матрица перехода от базиса (1) к новому базису (2). Тогда в силу равенства (4)

$$\bar{x} = \left((\bar{e}_1, \bar{e}_2 ...., \bar{e}_n) * A\right) * \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ . \\ . \\ . \\ x_n' \end{pmatrix} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n) * \left(A \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ . \\ . \\ . \\ x_n' \end{pmatrix} \right)$$

откуда, в силу единственности координат вектора в данном базисе следует

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ . \\ . \\ . \\ x_n' \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

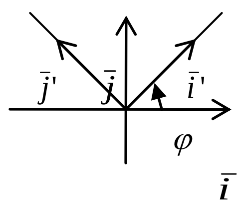
Полученная формула позволяет нам выразить *координаты вектора в исходном базисе через его координаты в новом базисе.*

Аналогично, учитывая, что A^{-1} – матрица перехода от нового базиса (2) к исходному базису (1), получим следующую формулу

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ . \\ . \\ . \\ x_n' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Данная формула позволяет находить *координаты вектора* $\bar{x}$ *в новом базисе* (2) *через его координаты в исходном базисе* (1).

Пример. Рассмотрим базис $\bar{i}, \bar{j}$ в линейном пространстве V_2 всех геометрических векторов



на плоскости, где $|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1$, и $\bar{i} \perp \bar{j}$.

Пусть базис $\bar{i}', \bar{j}'$ получается из исходного базиса $\bar{i}, \bar{j}$ поворотом его на угол φ. Тогда, выражая векторы $\bar{i}', \bar{j}'$ через исходный базис $\bar{i}, \bar{j}$, получим равенства:

$\bar{i}' = (\cos\varphi)\bar{i} + (\sin\varphi)\bar{j}$ и $\bar{j}' = (\cos(\varphi + \dfrac{\pi}{2}))\bar{i} + (\sin(\varphi + \dfrac{\pi}{2}))\bar{j}$, т.е. $\bar{j}' = (-\sin\varphi)\bar{i} + (\cos\varphi)\bar{j}$.

Тогда матрица перехода A от базиса $\bar{i}, \bar{j}$ к базису $\bar{i}', \bar{j}'$ определяется следующим образом: $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Отметим, что $|A| = 1$. Таким образом, если вектор $\bar{x}$ в исходном базисе $\bar{i}, \bar{j}$ имеет координаты (x_1, x_2), а в базисе $\bar{i}', \bar{j}'$ имеет координаты (x_1', x_2'), то справедливо равенство $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$, т.е. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$. Таким образом, связь между координатами вектора в данных базисах задается следующей системой

$$\begin{cases} x_1 = (\cos\varphi)x_1' - (\sin\varphi)x_2' \\ x_2 = (\sin\varphi)x_1' + (\cos\varphi)x_2' \end{cases} \qquad (7)$$

Так как матрица обратного перехода от базиса $\bar{i}', \bar{j}'$ к исходному базису $\bar{i}, \bar{j}$ имеет вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

то аналогично выражаются новые координаты вектора $\bar{x}$ через его старые координаты по следующим формулам:

$$\begin{cases} x_1' = (\cos\varphi)x_1 + (\sin\varphi)x_2 \\ x_2' = -(\sin\varphi)x_1 + (\cos\varphi)x_2 \end{cases}. \qquad (8)$$

§ 15. Изоморфизмы линейных пространств и их свойства.

Пусть линейные пространства L и L' изоморфны, и отображение $\varphi: L \xrightarrow{на} L'$ – изоморфизм. Операции сложения векторов в пространствах L и L' будем обозначать «+» и «$\oplus$», соответственно. Тогда справедливы следующие свойства.

Свойство 1. $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}'$, *и* $\varphi(-\bar{a}) = -\varphi(\bar{a})$, *т.е. нулевой элемент линейного пространства при изоморфизме переходит в нулевой, а обратный – в обратный для образа исходного.*

Доказательство. Поскольку $\varphi(\overline{0}) = \varphi(\overline{0} + \overline{0}) = \varphi(\overline{0}) \oplus \varphi(\overline{0})$, то, прибавляя к обеим частям данного равенства вектор $-\varphi(\overline{0})$, получим $\varphi(\overline{0}) = \overline{0}'$, и первая часть утверждения доказана. Далее, $\varphi(-\overline{a}) = \varphi((-1)\overline{a}) = (-1)\varphi(\overline{a}) = -\varphi(\overline{a})$.

Свойство 2. $\varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{a}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(\overline{a}_i)$, *т.е. образ линейной комбинации векторов равен линейной комбинации образов с теми же самыми коэффициентами.*

Непосредственным следствием первого и второго свойств является

Свойство 3. *Если система векторов* $\overline{a}_1,...,\overline{a}_m \in L$ *является линейно зависимой, то система их образов* $\varphi(\overline{a}_1),...,\varphi(\overline{a}_m)$ *также является линейно зависимой в пространстве* L'.

Свойство 4. *Для изоморфизма* φ *пространства* $L \xrightarrow{на} L'$ *обратное отображение* φ^{-1} *также является изоморфизмом пространства* $L' \xrightarrow{на} L$.

Доказательство. Заметим, что φ^{-1} взаимнооднозначно в силу того, что отображение φ является взаимнооднозначным. Покажем, что $\varphi^{-1}(\alpha\overline{y}) = \alpha\varphi^{-1}(\overline{y})$ для любого $\alpha \in R$ и каждого $\overline{y} \in L'$. Действительно, для любого вектора $\overline{y} \in L'$ найдется единственный вектор $\overline{x} \in L$ такой, что $\varphi(\overline{x}) = \overline{y}$, и, следовательно, $\overline{x} = \varphi^{-1}(\overline{y})$. Но тогда $\varphi(\alpha\overline{x}) = \alpha\varphi(\overline{x}) = \alpha\overline{y}$, и $\alpha\overline{x}$ является прообразом вектора $\alpha\overline{y}$ при данном отображении φ, т.е. $\alpha\overline{x} = \varphi^{-1}(\alpha\overline{y})$ и следовательно $\alpha\varphi^{-1}(\overline{y}) = \varphi^{-1}(\alpha\overline{y})$. Покажем, что для любых векторов $\overline{y}_1, \overline{y}_2 \in L'$ будет выполняться равенство: $\varphi^{-1}(\overline{y}_1 \oplus \overline{y}_2) = \varphi^{-1}(\overline{y}_1) + \varphi^{-1}(\overline{y}_2)$.

Пусть $\varphi^{-1}(\overline{y}_1) = \overline{x}_1$, и $\varphi^{-1}(\overline{y}_2) = \overline{x}_2$. Тогда $\overline{y_1} = \varphi(\overline{x_1})$ и $\overline{y_2} = \varphi(\overline{x_2})$, и значит $\varphi(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = \varphi(\overline{x}_1) \oplus \varphi(\overline{x}_2) = y_1 \oplus y_2$. Следовательно $x_1 + x_2 = \varphi^{-1}(y_1 \oplus y_2)$, и таким образом отображение φ действительно является изоморфизмом пространства L' на пространство L.

Свойство 5. *При изоморфизме* φ *пространства* L *на пространство* L' *базис переходит в базис.*

Доказательство. Пусть система векторов $\overline{e}_1,...,\overline{e}_n$ образует базис в пространстве L, и $\overline{e}_i' = \varphi(\overline{e}_i)$ для каждого $i = \overline{1,n}$. Покажем, что система векторов $\overline{e}_1',...,\overline{e}_n'$ линейно независима. Допустим, система $\overline{e}_1',...\overline{e}_n'$ линейно зависима, тогда обратное отображение φ^{-1} переводит её в линейно зависимую систему (в силу свойств 4 и 3). Но образами векторов $\overline{e}_1',...,\overline{e}_n'$ при отображении φ^{-1} являются векторы исходного базиса, получаем противоречие, следовательно, система $\overline{e}_1',...,\overline{e}_n'$ является линейно независимой. Пусть теперь $\overline{y} \in L'$, тогда существует вектор $\overline{x} \in L$ такой, что $\overline{x} = \varphi^{-1}(\overline{y})$. Тогда найдутся коэффициенты x_i для $i = \overline{1,n}$ такие, что $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e}_i$, при этом $\varphi(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(\overline{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e}_i'$. Заметим, что $\varphi(\overline{x}) = \overline{y}$, и таким образом любой вектор $\overline{y} \in L'$ представляется в виде линейной комбинации векторов системы $\overline{e}_1', \overline{e}_2' ... \overline{e}_n'$, следовательно, данная система является базисом в пространстве L_1'. Свойство 5 доказано.

Ранее отмечалось, что любое линейное пространство размерности n изоморфно пространству R^n. Покажем, что справедливо и более сильное утверждение.

Теорема. *Конечномерные линейные пространства* L *и* L' *изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.*

Доказательство. Если пространства L и L' изоморфны, то их размерности совпадают в силу того, что при изоморфизме базис переходит в базис. Обратно, пусть пространства L и L' имеют одинаковую размерность n. Пусть система векторов

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n \quad (1)$$

образует базис в пространстве L, а система векторов

$$\bar{e}_1{}', \bar{e}_2{}', ..., \bar{e}_n{}' \quad (2)$$

образует базис в L'. Определим отображение φ пространства L в L' следующим образом: положим $\varphi(\bar{e}_1) = \bar{e}_1{}', \varphi(\bar{e}_2) = \bar{e}_2{}', ..., \varphi(\bar{e}_n) = \bar{e}_n{}'$, и для любого вектора $\bar{x} \in L$ положим $\varphi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i{}'$, где упорядоченный набор $(x_1, x_2, ..., x_n)$ – координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$. Тогда φ – отображение L на L' в силу того, что система (2) является базисом в L', и значит для каждого вектора $\bar{y} \in L'$ найдутся коэффициенты $y_1, y_2, ..., y_n$ такие, что $\bar{y} = y_1 \bar{e}_1{}' + y_2 \bar{e}_2{}' + ... + y_n \bar{e}_n{}'$, и следовательно $\bar{y} = \varphi(\sum_{i=1}^{n} y_i \bar{e}_i)$. Заметим, что отображение φ взаимнооднозначно, поскольку если $\varphi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}')$, то векторы $\varphi(\bar{x})$ и $\varphi(\bar{x}')$ имеют одинаковые координаты в базисе (2), причем точно такие же, что и векторы $\bar{x}$ и $\bar{x}'$ в базисе (1), следовательно, векторы $\bar{x}$ и $\bar{x}'$ имеют одинаковые координаты в базисе (1) и значит совпадают.

Наконец, поскольку $\varphi(\alpha\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i) \bar{e}_i{}' = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i{}' = \alpha\varphi(\bar{x})$ и $\varphi(\bar{x} + \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \bar{e}_i{}' = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i{}' \oplus \sum_{i=1}^{n} y_i \bar{e}_i{}' = \varphi(\bar{x}) \oplus \varphi(\bar{y})$, то φ – изоморфизм линейных пространств L и L'. Теорема доказана.

Замечание. Можно было бы доказать изоморфизм пространств одинаковой размерности проще, исходя из того, что каждое *n*-мерное линейное пространство изоморфно пространству R^n, и произведение изоморфизмов также является изоморфизмом.

§ 16. Подпространство линейного пространства.

Рассмотрим линейное пространство V_3 всех геометрических векторов в пространстве. Тогда, зафиксировав некоторую плоскость γ, в данном линейном пространстве V_3 мы можем выделить все векторы, лежащие в плоскости γ, данное множество векторов также будет образовывать линейное пространство. Аналогично, в линейном пространстве $C[a,b]$ содержится линейное пространство $\{P_n(x)\}$ всех вещественных многочленов степени не более чем n. Подобные примеры приводят нас к следующему определению.

Определение. Пусть L – линейное пространство. Если L' – подмножество L, причем L' само является линейным пространством относительно операции сложения, заданной в пространстве L, и операции умножения векторов L' на действительные числа, то L' называется *подпространством линейного пространства* L.

Теорема. *Подмножество L' линейного пространства L образует в нем подпространство тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:*

1) *для любых векторов* $\bar{x}, \bar{y} \in L'$ *сумма* $\bar{x} + \bar{y} \in L'$;

2) *для каждого* $\alpha \in R$ *и для любого вектора* $\bar{x} \in L'$ *произведение* $\alpha\bar{x} \in L'$.

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность. Пусть выполняются указанные условия, тогда для каждого $\bar{x} \in L'$, вектор $-\bar{x} = (-1)\bar{x} \in L'$, и $0 \cdot \bar{x} = \bar{0} \in L'$, следовательно, L' образует коммутативную подгруппу группы L относительно исходной операции сложения векторов. Множество L' замкнуто относительно операции умножения векторов на числа в силу условия (2) , и все требуемые свойства операций над векторами в линейном пространстве L' выполнены в силу того, что они справедливы для векторов всего пространства L. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим систему $(1)'$, состоящую из m линейных однородных уравнений с n неизвестными (см. § 11). Пусть ранг матрицы системы $(1)'$ равен r. Тогда отметим, во-первых, что все решения данной системы образуют подпространство пространства R^n (в силу доказанной теоремы), а во-вторых, что фундаментальная система решений системы $(1)'$, состоящая из $(n-r)$ линейно независимых решений, образует базис указанного подпространства.

Данный пример приводит нас к определению *линейной оболочки системы векторов*.

Определение. Пусть L – линейное пространство, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, .., \bar{a}_m$ – некоторая система векторов в нем. Рассмотрим множество L' всевозможных линейных комбинаций векторов данной системы, т.е. $L' = \{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{a}_i \mid \forall \alpha_i \in R, \ \forall m \in N\}$. Тогда нетрудно видеть, что L' образует подпространство пространства L, которое называется *линейной оболочкой* данной системы векторов. Будем говорить в этом случае, что подпространство L' *порождается* системой векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, .., \bar{a}_m$.

Исходя из данного определения, заметим, например, что фундаментальная система решений системы $(1)'$ из приведенного выше примера, порождает подпространство всех решений системы однородных уравнений $(1)'$.

Отметим еще одно важное свойство конечномерных пространств.

Теорема. *Каждое подпространство L' конечномерного линейного пространства L является конечномерным, и размерность его не превышает размерности пространства L.*

Доказательство данной теоремы очевидно, и следует из того, что любая линейно независимая система векторов в подпространстве L' пространства L является также и линейно независимой системой векторов пространства L.

Отметим также еще одно достаточно очевидное свойство подпространств: *если L_1 и L_2 – линейные подпространства пространства L, то их пересечение $L' = L_1 \cap L_2$ также является подпространством пространства L.*

§ 17. Линейные операторы.

17.1. Определение и свойства линейного оператора.

Определение. Пусть дано n-мерное линейное пространство L. Отображение φ пространства L в себя называется *линейным преобразованием* пространства L (или *линейным оператором*), если выполняются следующие условия:

1) для любых векторов $\bar{x}, \bar{y} \in L$ $\quad \varphi(\bar{x} + \bar{y}) = \varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y})$;

2) для каждого $\alpha \in R$ и для любого $\bar{x} \in L$ $\quad \varphi(\alpha \bar{x}) = \alpha \varphi(\bar{x})$.

Простейшими примерами линейных операторов в пространстве L являются:

а) тождественное отображение L в себя: $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$ для всех $\bar{x} \in L$;

б) нулевое отображение: $\varphi(\bar{x}) = \bar{0}$ для всех $\bar{x} \in L$.

Отметим, что если линейное преобразование φ является взаимнооднозначным, то φ является изоморфизмом пространства L *на себя.*

Теорема. *Если φ – линейный оператор в линейном пространстве L, то для него справедливы следующие свойства:*

1) $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}$;

2) $\varphi(-\overline{x}) = -\varphi(\overline{x})$ для каждого $\overline{x} \in L$;

3) $\varphi(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i \overline{x}_i) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\varphi(\overline{x}_i)$ для всех $\alpha_i \in R$ и для любых $\overline{x}_i \in L$.

Доказательство. Заметим, что $\varphi(-\overline{x}) = \varphi((-1)\cdot\overline{x}) = (-1)\cdot\varphi(\overline{x}) = -\varphi(\overline{x})$, и таким образом свойство (2) выполняется. Далее, $\varphi(\overline{0}) = \varphi(\overline{x} + (-\overline{x})) = \varphi(\overline{x}) + (-\varphi(\overline{x})) = \overline{0}$, и свойство (1) также выполнено.

Наконец, справедливость свойства (3) вытекает из условий (1) и (2) определения линейного оператора. Теорема доказана.

Рассмотрим следующий вопрос: возможно ли описать множество всех линейных операторов в произвольном n-мерном линейном пространстве L? Для ответа на данный вопрос мы зафиксируем некоторый базис пространства L, пусть это будет система векторов

$$\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n, \qquad (1)$$

тогда обозначим: $\varphi(\overline{e}_1) = \overline{c}_1, \varphi(\overline{e}_2) = \overline{c}_2, ..., \varphi(\overline{e}_n) = \overline{c}_n$, и рассмотрим систему

$$\overline{c}_1, \overline{c}_2, ..., \overline{c}_n \qquad (2)$$

образов векторов базиса (1). Заметим, что система (2) не обязана быть линейно независимой. Очевидно, что данная система векторов (2) (при данном фиксированном базисе (1)) будет определяться однозначно данным линейным преобразованием φ. Верно и обратное: каждая система векторов (2) линейного пространства при некотором фиксированном базисе (1) пространства L будет однозначно определять некоторый линейный оператор (для которого заданная система (2) является системой образов базиса). Действительно, полагая, φ – отображение L в L такое, что $\varphi(\overline{e}_1) = \overline{c}_1, \varphi(\overline{e}_2) = \overline{c}_2, ..., \varphi(\overline{e}_n) = \overline{c}_n$ при данном фиксированном базисе (1), и определяя для каждого вектора $\overline{x} \in L$ $\varphi(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{c}_i$, где $(x_1, x_2, ..., x_n)$ – координаты вектора $\overline{x}$ в базисе (1), мы получим, что отображение φ является линейным преобразованием пространства L.

Таким образом, *при каждом фиксированном базисе n-мерного линейного пространства L, между всевозможными упорядоченными системами, состоящими из n векторов данного пространства, и всеми линейными преобразованиями пространства L существует взаимно однозначное соответствие.*

Рассмотрим далее разложение векторов системы (2) по базису (1), заданное следующей системой

$$\begin{cases} \overline{c}_1 = a_{11}\overline{e}_1 + a_{21}\overline{e}_2 + ... + a_{n1}\overline{e}_n \\ \overline{c}_2 = a_{12}\overline{e}_1 + a_{22}\overline{e}_2 + ... + a_{n2}\overline{e}_n \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \overline{c}_n = a_{1n}\overline{e}_1 + a_{2n}\overline{e}_2 + ... + a_{nn}\overline{e}_n \end{cases} \qquad (3)$$

Положим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

тогда систему (3) можно переписать в следующем виде:

$$(\varphi(\overline{e}_1) \;\; \varphi(\overline{e}_2) \;\; \dots \;\; \varphi(\overline{e}_n)) = (\overline{e}_1 \;\; \overline{e}_2 \;\; \dots \;\; \overline{e}_n) * A. \qquad (3)'$$

Определение. Матрицу A, составленную указанным выше способом из коэффициентов разложения системы образов базиса при линейном преобразовании φ, называют *матрицей линейного оператора φ в данном базисе* (1).

Отметим, что как упорядоченная система векторов (2) определяет единственным образом матрицу A линейного оператора, так и обратно, каждая вещественная квадратная матрица порядка n однозначно определяет упорядоченную систему (2) при помощи условия $(3)'$. Таким образом, *при некотором фиксированном базисе между всеми линейными операторами в n-мерном линейном пространстве L и всеми действительными квадратными матрицами n-ого порядка можно установить взаимно однозначное соответствие.*

17.2. Связь координат вектора и его образа при линейном преобразовании φ.

Пусть φ – линейный оператор в n-мерном линейном пространстве L, система векторов (1) образует базис в пространстве L, A – матрица линейного оператора φ в базисе (1). Пусть $\bar{x}$ – произвольный вектор пространства L и $(x_1, x_2, ..., x_n)$ – координаты вектора $\bar{x}$ в базисе (1). Положим $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$ – образ вектора $\bar{x}$ при отображении φ, и найдем координаты данного образа в базисе (1).

Поскольку $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i$, то $\varphi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(\bar{e}_i)$, или $\varphi(\bar{x}) = (\varphi(\bar{e}_1)\ \varphi(\bar{e}_2) \dots \varphi(\bar{e}_n)) * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ = (в силу равенства $(3')$) = $\left((\bar{e}_1 \bar{e}_2 ... \bar{e}_n) * A \right) * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\bar{e}_1 \bar{e}_2 ... \bar{e}_n) * \left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$.

С другой стороны $\varphi(\bar{x}) = \bar{y}$, и если $(y_1, y_2, ..., y_n)$ – координаты вектора $\bar{y}$, то $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \bar{e}_i$, и

$$\varphi(\bar{x}) = (\bar{e}_1 \bar{e}_2 .... \bar{e}_n) * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

В силу единственности разложения вектора по базису отсюда следует, что

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Формула (4) и *устанавливает связь между координатами вектора и его образа при линейном преобразовании φ.*

17.3. Связь между матрицами линейного оператора в различных базисах.

Пусть φ – линейный оператор в n-мерном линейном пространстве L, и квадратная матрица A является матрицей данного оператора в базисе (1). Это означает, что выполняется равенство

$$(\varphi(\bar{e}_1)\ \ \varphi(\bar{e}_2)\ \ \ldots\ \ \varphi(\bar{e}_n)) = (\bar{e}_1\ \ \bar{e}_2\ \ \ldots\ \ \bar{e}_n) * A. \qquad (3')$$

Пусть в линейном пространстве L задан также другой базис

$$\bar{e}_1{}', \bar{e}_2{}', ..., \bar{e}_n{}'. \qquad (1')$$

Пусть линейный оператор φ в базисе $(1')$ имеет матрицу A', тогда выполняется равенство

$$(\varphi(\bar{e}_1{}')\ \ \varphi(\bar{e}_2{}')\ldots\varphi(\bar{e}_n{}')) = (\bar{e}_1{}'\ \ \bar{e}_2{}'\ \ldots\bar{e}_n{}') * A'.$$

Пусть матрица B является матрицей перехода от базиса (1) к базису $(1')$, тогда

$$(\bar{e}_1{}'\ \ \bar{e}_2{}'\ \ldots\bar{e}_n{}') = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ ..\ \bar{e}_n) * B.$$

Отсюда следует, что $(\varphi(\bar{e}_1{}')\ \ \varphi(\bar{e}_2{}')\ldots\varphi(\bar{e}_n{}')) = (\bar{e}_1{}'\ \ \bar{e}_2{}'\ \ldots\bar{e}_n{}') * A' = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ldots\bar{e}_n) * (B\cdot A')$.

Далее, для каждого $i = \overline{1,n}$ представим вектор $\bar{e}_i{}'$ в виде: $\bar{e}_i{}' = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ki}\bar{e}_k$, где коэффициенты $b_{1i}, b_{2i}, ..., b_{ni}$ образуют i-й столбец матрицы B, тогда

$$\varphi(\bar{e}_i{}') = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\varphi(\bar{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}(\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\bar{e}_j) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(b_{ki}a_{jk})\bar{e}_j = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki})\bar{e}_j = \sum_{j=1}^{n} c_{ji}\bar{e}_j =$$

$$= c_{1i}\bar{e}_1 + ... + c_{ni}\bar{e}_n = (\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ldots\bar{e}_n) * \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix},$$ где c_{ji} - соответствующие элементы матрицы $C = AB$. Отсюда следует, что вся рассматриваемая система образов $(\varphi(\bar{e}_1{}')\ \ \varphi(\bar{e}_2{}')\ldots\varphi(\bar{e}_n{}'))$ представляется в виде $(\varphi(\bar{e}_1{}')\ \ \varphi(\bar{e}_2{}')\ldots\varphi(\bar{e}_n{}'))$ = $(\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \ldots\bar{e}_n)(AB)$.

Мы получили два представления одной системы векторов в данном базисе, следовательно, справедливо равенство $AB = BA'$. Поскольку B – матрица перехода от одного базиса к другому, то существует обратная для нее, и таким образом будет справедливо следующее равенство

$$A' = B^{-1}AB. \qquad (5)$$

Матрица B^{-1} является матрицей обратного перехода от базиса $(1')$ к исходному базису (1), следовательно, будет также справедливо равенство

$$A = BA'B^{-1}. \qquad (6)$$

Полученные формулы (4) и (5) устанавливают связь между матрицами линейного оператора в различных базисах.

Определение. Квадратная матрица B называется *подобной матрице* A, если существует невырожденная матрица Q такая, что $A = Q^{-1}BQ$.

Умножая данное равенство слева на матрицу Q, и справа на матрицу Q^{-1}, получим, что $B = QAQ^{-1}$, полагая тогда $Q_1 = Q^{-1}$, получим $B = Q_1^{-1}AQ_1$, т.е. мы установили, что *если матрица B подобна матрице A, то и матрица A подобна матрице B.*

Приведенные выше рассуждения позволяют нам сказать, *что матрицы линейного оператора в разных базисах являются подобными.*

Отметим также, что *если матрицы A и B подобны и $A = Q^{-1}BQ$, то матрицы A и B могут служить матрицами одного линейного оператора в разных базисах, для которых матрица Q является матрицей перехода от одного базиса к другому.*

17.4. Действия над линейными операторами.

Определение. Пусть φ_1 и φ_2 – линейные операторы в линейном пространстве L, тогда *суммой данных линейных операторов* мы назовем такой линейный оператор φ в пространстве L, что $\varphi(\overline{x}) = \varphi_1(\overline{x}) + \varphi_2(\overline{x})$ для каждого вектора $\overline{x} \in L$, *произведением линейного оператора* φ *на число* α для любого $\alpha \in R$ – оператор $\alpha\varphi$ такой, что $(\alpha\varphi)(\overline{x}) = \alpha\varphi(\overline{x})$ для каждого вектора $\overline{x} \in L$.

Произведение линейных операторов $\varphi_2\varphi_1$ мы определим как произведение (композицию) двух данных отображений пространства L в себя: $\varphi_2\varphi_1 = \varphi_2 \circ \varphi_1$, и $(\varphi_2\varphi_1)(\overline{x}) = \varphi_2(\varphi_1(\overline{x}))$ для каждого вектора $\overline{x} \in L$.

Нетрудно проверить, что данные операции над линейными операторами приводят к отображениям, которые действительно являются линейными операторами в пространстве L.

Свойства данных операций описывает следующая теорема.

Теорема. *Пусть линейный оператор* φ_1 *имеет матрицу* A_1 *в базисе (1), а линейный оператор* φ_2 *имеет матрицу* A_2 *в том же базисе. Тогда следующие линейные операторы:*

1) $\varphi_1 + \varphi_2$ *– имеет матрицу* $A_1 + A_2$*;*

2) $\alpha\varphi_1$ *– имеет матрицу* αA_1*;*

3) $\varphi_2\varphi_1$ *– имеет матрицу* A_2A_1 *в данном базисе (1).*

Доказательство. Доказательство пунктов (1) и (2) теоремы не составляет трудностей, докажем пункт (3). Пусть дан базис (1), составленный из векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$, и пусть A_1 и A_2 – матрицы линейных операторов φ_1 и φ_2 соответственно в данном базисе (1). Тогда будут выполняться следующие равенства:

$$(\varphi_1(\overline{e}_1)\ \varphi_1(\overline{e}_2) ... \varphi_1(\overline{e}_n)) = (\overline{e}_1\ \overline{e}_2 ... \overline{e}_n) * A_1, \quad (\varphi_2(\overline{e}_1)\ \varphi_2(\overline{e}_2) ... \varphi_2(\overline{e}_n)) = (\overline{e}_1\ \overline{e}_2 ... \overline{e}_n) * A_2.$$

Пусть матрицы $A_1 = (a_{ij}^{(1)})_{n \times n}$ и $A_2 = (a_{ij}^{(2)})_{n \times n}$.

Для каждого $i = \overline{1,n}$ рассмотрим образ $(\varphi_2\varphi_1)(\overline{e}_i) = \varphi_2(\varphi_1(\overline{e}_i)) = \varphi_2(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^{(1)} \overline{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^{(1)} \varphi_2(\overline{e}_k) =$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^{(1)} (\sum_{j=1}^{n} a_{jk}^{(2)} \overline{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} a_{jk}^{(2)} a_{ki}^{(1)}) \overline{e}_j = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} \overline{e}_j = (\overline{e}_1\ \overline{e}_2 ... \overline{e}_n) \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \dots \\ c_{ni} \end{pmatrix},$$

где c_{ji} являются соответствующими элементами матрицы $C = A_2A_1$. Теорема доказана.

Определение. Линейный оператор φ в *n*-мерном линейном пространстве L называется *невырожденным*, если в некотором базисе данного пространства он имеет невырожденную матрицу.

Заметим, что *все матрицы невырожденного линейного оператора являются невырожденными* в силу того, что для подобных матриц A' и A будет справедливо равенство $|A'| = |B^{-1}AB| = |B^{-1}|\,|A|\,|B| = |A|$.

Теорема. *Линейный оператор* φ *в n-мерном линейном пространстве* L *является невырожденным тогда и только тогда, когда он является изоморфизмом пространства* L *на себя.*

Доказательство. Пусть φ – линейный оператор. Отметим, что для того, чтобы линейный оператор φ в линейном пространстве являлся изоморфизмом, необходимо выполнение условия взаимной однозначности для отображения φ: если $\varphi(\overline{x}_1) = \varphi(\overline{x}_2)$, то $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$ для любых $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in L$. Отметим, что $\varphi(\overline{x}_1) = \varphi(\overline{x}_2) \Leftrightarrow \varphi(\overline{x}_1) - \varphi(\overline{x}_2) = \overline{0} \Leftrightarrow \varphi(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) = \overline{0}$. Тогда очевидно, что условие взаимной однозначности линейного оператора φ можно представить следующим образом: для каждого $\overline{x} \in L$, если $\varphi(\overline{x}) = \overline{0}$, то $\overline{x} = \overline{0}$.

Теперь перейдем к доказательству непосредственно утверждения теоремы. Пусть φ – линейный оператор в пространстве L и пусть он является изоморфизмом, следовательно, для него выполняется указанное выше условие.

Пусть A – матрица оператора φ в некотором базисе пространства L, тогда для произвольного вектора $\overline{x} \in L$ рассмотрим $\overline{y} = \varphi(\overline{x})$. При этом

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – координаты вектора $\overline{x}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ – координаты его образа.

Если матрица A является вырожденной, то уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

имело бы решения, отличные от нулевого, что противоречит условию взаимно однозначности оператора φ, следовательно, матрица A является невырожденной, и необходимость доказана.

Обратно, пусть оператор φ имеет невырожденную матрицу A в некотором базисе, тогда уравнение (*) будет иметь единственное решение, откуда и следует выполнение указанного условия, следовательно φ – взаимно однозначно. Отметим, что при этом линейный оператор φ является отображением «на», поскольку он переводит базис в базис. Теорема доказана.

§ 18. Характеристические корни и собственные векторы.

18.1 Характеристические корни матрицы.

Определение. Пусть A – вещественная квадратная матрица n-ого порядка,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пусть λ – некоторое неизвестное, определенное на множестве действительных (или комплексных) чисел. Тогда матрица

$$A - \lambda \mathrm{E} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \qquad (1)$$

называется *характеристической матрицей* матрицы A.

Определитель $|A - \lambda \mathrm{E}|$ называется *характеристическим многочленом* матрицы A, а уравнение

$$|A - \lambda \mathrm{E}| = 0 \qquad (2)$$

называется *характеристическим уравнением* для матрицы A. Корни характеристического уравнения называют *характеристическими корнями* матрицы A.

Докажем следующее свойство подобных матриц.

Теорема. *Если матрицы подобны, то они имеют одни и те же характеристические корни.*

Доказательство. Пусть матрицы A и B подобны. Тогда существует матрица Q такая, что $A = Q^{-1}BQ$. Покажем, что $|A-\lambda\text{E}| = |B-\lambda\text{E}|$. Действительно, $|A-\lambda\text{E}| = |Q^{-1}BQ-\lambda\text{E}| =$ $= |Q^{-1}BQ-\lambda Q^{-1}\text{E}Q| = |Q^{-1}(B-\lambda\text{E})Q| = |Q^{-1}||B-\lambda\text{E}||Q| = |Q^{-1}||Q||B-\lambda\text{E}| = 1\cdot|B-\lambda\text{E}| = |B-\lambda\text{E}|$, т.к. $Q\cdot Q^{-1} = \text{E}$ и $|Q||Q^{-1}| = |\text{E}| = 1$. Таким образом, подобные матрицы имеют одинаковые характеристические многочлены. Теорема доказана.

Определение. Если φ – линейный оператор в линейном пространстве L, A – матрица оператора φ в некотором базисе данного пространства, то характеристические корни матрицы A называются *характеристическими корнями* линейного оператора φ.

Данное определение корректно в силу подобия матриц линейного оператора φ в различных базисах и доказанной теоремы.

Определение. Все характеристические корни линейного оператора φ, взятые с учетом их кратности, называются *спектром линейного оператора* φ.

Если все характеристические корни линейного оператора – различные действительные числа, то говорят, что они *образуют простой спектр.*

18.2 Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Определение. Ненулевой вектор $\overline{x}$ линейного пространства L называется *собственным вектором* линейного оператора φ, если существует действительное число λ такое, что $\varphi(\overline{x}) = \lambda\overline{x}$. При этом λ называют *собственным значением* линейного оператора φ, соответствующим собственному вектору $\overline{x}$. Также, при этом, данный вектор $\overline{x}$ называется *собственным вектором, соответствующим собственному значению* λ.

Заметим, что для собственного вектора $\overline{x}$ собственное значение λ может быть только одно. Обратное неверно. Действительно, если $\overline{x}$ является собственным вектором, соответствующим собственному значению λ, то для любого $\alpha \in R,$ $\varphi(\alpha\overline{x}) = \alpha\varphi(\overline{x}) = \alpha(\lambda\overline{x}) = (\alpha\lambda)\overline{x} = \lambda(\alpha\overline{x})$.

Приведем некоторые примеры нахождения собственных векторов:

а) в линейном пространстве V_2 векторов, лежащих в данной плоскости, вращение всех векторов плоскости вокруг неподвижной точки на острый угол φ является линейным оператором: здесь нет ни одного собственного вектора;

б) в пространстве V_2 свободных векторов на плоскости будем каждому его вектору $\overline{x}$ ставить в соответствие вектор $3\overline{x}$, тогда все векторы пространства V_2 являются собственными при данном линейном преобразовании.

Теорема. *Действительные характеристические корни линейного оператора* φ *и только они служат собственными значениями данного линейного оператора.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть λ – собственное значение линейного оператора φ, тогда найдется вектор $\overline{x} \neq \overline{0}$ такой, что $\varphi(\overline{x}) = \lambda\overline{x}$. Пусть вектор $\overline{x}$ имеет координаты $(x_1, x_2, ..., x_n)$ в некотором базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ данного линейного пространства L, и пусть A – матрица линейного оператора φ в этом базисе. Тогда выполняется равенство

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, где $(y_1, y_2, ..., y_n)$ – координаты вектора $\overline{y} = \varphi(\overline{x})$, являющегося образом вектора $\overline{x}$. С другой стороны $\varphi(\overline{x}) = \lambda \overline{x}$, и значит $\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Данное равенство можно представить в виде системы

$$\begin{cases} \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ \lambda x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \lambda x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{cases}$$

или, перенося в каждом равенстве все члены в правую сторону, в виде системы

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Если в полученной системе (3) мы будем считать $x_1, x_2, ..., x_n$ переменными, то система (3) будет представлять собой однородную систему n линейных уравнений с n неизвестными. Поскольку полученная система (3) имеет ненулевое решение, то определитель матрицы системы (3) равен нулю, и, следовательно, λ является корнем характеристического многочлена матрицы A.

Достаточность. Пусть λ – характеристический корень матрицы A линейного оператора φ. Тогда справедливо равенство $|A - \lambda \mathrm{E}| = 0$, следовательно, система (3) при данном λ будет иметь ненулевые решения. Каждое из этих решений задает координаты собственного вектора, соответствующего данному собственному значению λ. Теорема доказана.

Замечание. Система (3) позволяет практическим образом находить координаты собственных векторов, соответствующих собственному значению λ.

Определение. Матрица $A_{n\times n}$ называется *диагональной*, если для всех i, j, $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Следующая теорема позволяет охарактеризовать линейные операторы с диагональной матрицей.

Теорема. *Линейный оператор φ имеет в некотором базисе диагональную матрицу тогда и только тогда, когда этот базис состоит из собственных векторов линейного оператора φ.*

Доказательство. Линейный оператор φ имеет матрицу A в некотором базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ пространства L, если выполняется равенство $(\varphi(\overline{e}_1)\, \varphi(\overline{e}_2) ... \varphi(\overline{e}_n)) = (\overline{e}_1\, \overline{e}_2 ... \overline{e}_n) * A$. Отсюда следует, что матрица A линейного оператора φ в данном базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ является диагональной тогда и только тогда, когда для каждого $i = \overline{1, n}$, $\varphi(\overline{e}_i) = a_{ii}\overline{e}_i$, а это равносильно тому, что векторы $\overline{e}_i$ являются собственными векторами линейного оператора φ, соответствующими собственным значениям a_{ii} при всех $i = \overline{1, n}$. Теорема доказана.

Для исследования дальнейших свойств линейных операторов нам понадобится следующее утверждение.

Лемма. *Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям линейного оператора φ, образуют линейно независимую систему.*

Доказательство. Будем проводить доказательство индукцией по числу m различных собственных значений оператора φ.

Пусть $m = 1$, тогда существует единственное собственное значение λ_1 линейного оператора φ, пусть ему соответствует $\overline{x}_1$ – собственный вектор линейного оператора φ, тогда вектор $\overline{x}_1$ сам по себе образует линейно независимую систему $\{\overline{x}_1\}$, поскольку если $\alpha\overline{x}_1 = \overline{0}$, то $\alpha = 0$.

Пусть утверждение верно для всех $m \le k-1$, покажем, что тогда оно будет выполняться и для $m = k$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ – это k различных собственных значений линейного оператора φ, а $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_k$ – соответствующие этим значениям собственные векторы линейного оператора φ. Предположим, что данные векторы образуют линейно зависимую систему, тогда существует нетривиальная нулевая линейная комбинация $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overline{x}_i = \overline{0}$. Отсюда $\varphi(\overline{0}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi(\overline{x}_i)$, следовательно $\overline{0} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \varphi(\overline{x}_i)$, а поскольку $\overline{x}_i$ являются собственными векторами оператора φ, соответствующими собственным значениям λ_i, то $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i \overline{x}_i = \overline{0}$.

Таким образом, справедливы следующие равенства:

$$\begin{cases} \alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + ... + \alpha_k \overline{x}_k = \overline{0} \\ \\ \alpha_1 \lambda_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \overline{x}_2 + ... + \alpha_k \lambda_k \overline{x}_k = \overline{0} \end{cases}$$

Умножив первое равенство на $(-\lambda_k)$ и сложив с ним второе, получим $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)\overline{x}_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)\overline{x}_2 + ... + \alpha_k(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\overline{x}_{k-1} = \overline{0}$. Среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}$ хотя бы одно отлично от нуля. (Если бы все они были равны нулю, то, поскольку по предположению $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overline{x}_i = \overline{0}$, получилось бы, что $\alpha_k \overline{x}_k = \overline{0}$, и, следовательно $\alpha_k = 0$, а значит тогда все коэффициенты $\alpha_i = 0$ для $i = 1,2,...,k$).

Таким образом, полученная линейная комбинация - нетривиальная, и векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_{k-1}$ образуют линейно зависимую систему, что противоречит предположению индукции. Лемма доказана.

Доказанная лемма позволяет нам получить следующую теорему.

Теорема. *Всякий линейный оператор с простым спектром может быть задан диагональной матрицей.*

Доказательство. Пусть φ – линейный оператор n-мерного линейного пространства L, и все его характеристические корни – различные действительные числа (их ровно n). Соответствующие этим корням собственные векторы линейного оператора φ по предыдущей лемме образуют линейно независимую систему, и, следовательно, базис. Тогда линейный оператор φ в этом базисе, состоящем из его собственных векторов, имеет диагональную матрицу по доказанной выше теореме о диагональной матрице линейного оператора. Теорема доказана.

Следствие. *Всякая вещественная квадратная матрица n-го порядка, имеющая n различных действительных характеристических корней, подобна диагональной матрице.*

Доказательство. Пусть матрица A имеет n различных действительных характеристических корней. Данная матрица может служить матрицей некоторого линейного оператора φ n-мерного линейного пространства L. Все характеристические корни матрицы A являются собственными значениями линейного оператора φ, следовательно, данный линейный оператор обладает простым спектром. По доказанной теореме, в некотором базисе линейный оператор φ обладает диагональной матрицей. Пусть это будет матрица B, тогда A и B – матрицы линейного оператора в разных базисах, а они подобны. Следствие доказано.

Глава 4. Евклидовы пространства.

§ 19. Евклидово пространство и его свойства. Ортогональные базисы.

Определение. Будем говорить, что в линейном пространстве L определена операция *скалярного умножения*, если для любых двух векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ пространства L определено действительное число, обозначаемое $\overline{x}\overline{y}$ и называемое *скалярным произведением данных векторов* таким образом, что выполняются следующие условия:

1) $\overline{x}\overline{y}=\overline{y}\overline{x}$ для всех $\overline{x},\overline{y}\in L$;

2) $\overline{x}(\overline{y}+\overline{z})=\overline{x}\overline{y}+\overline{x}\overline{z}$ для $\overline{x},\overline{y},\overline{z}\in L$;

3) $\alpha(\overline{x}\overline{y})=(\alpha\overline{x})\overline{y}$ для всех $\overline{x},\overline{y}\in L$ и для всех $\alpha\in R$;

4) для всех $\overline{x}\in L$, если $\overline{x}\neq\overline{0}$, то $\overline{x}^2>0$, где $\overline{x}^2=\overline{x}\overline{x}$.

Отметим, что операция скалярного умножения – внешняя, так как каждой паре векторов из пространства L мы ставим в соответствие некоторое действительное число, а не элемент L; она задается функцией: $f(\overline{x},\overline{y})=\overline{x}\overline{y}\in R$, как отображение $L\times L\to R$.

Линейное пространство L, с определенной на нем операцией скалярного умножения называется *евклидовым пространством*. Договоримся евклидово пространство обозначать E, а n-мерное евклидово пространство обозначать E_n. Приведем некоторые свойства евклидова пространства.

Свойство 1. *Для каждого вектора* $x\in E$, $\overline{0}\overline{x}=0$.

Данное свойство следует из условия 3 при $\alpha=0$. Действительно, $0\overline{y}=\overline{0}$, тогда $\overline{0}\overline{x}=(0\overline{y})\overline{x}=0(\overline{y}\overline{x})=0$.

Свойство 2. $(\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i\overline{x}_i)(\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j\overline{y}_j)=\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n}(\alpha_i\beta_j)\overline{x}_i\overline{y}_j$.

Данное свойство выполняется в силу того, что для каждого $i=\overline{1,k}$ из условий 2 и 3 определения скалярного произведения следует $\sum\limits_{j=1}^{n}(\alpha_i\overline{x}_i)(\beta_j\overline{y}_j)=\sum\limits_{j=1}^{n}(\alpha_i\beta_j)\overline{x}_i\overline{y}_j$.

Пример. Рассмотрим возможность определения операции скалярного произведения в произвольном n-мерном линейном пространстве L. Пусть $\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n$ – базис в L, и векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ пространства L в этом базисе заданы своими координатами: $(x_1,...,x_n)$ и $(y_1,...,y_n)$ соответственно. Тогда, если мы определим скалярное произведение $\overline{x}\overline{y}$, полагая $\overline{x}\overline{y}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$, то для определенной таким образом операции будут выполняться все четыре условия скалярного произведения.

Действительно, выполнимость условий (1),(3) и (4) очевидна, а выполнимость условия (2) легко проверяется следующим образом: $\overline{x}(\overline{y}+\overline{z})=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i(y_i+z_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum\limits_{i=1}^{n}x_iz_i=\overline{x}\overline{y}+\overline{x}\overline{z}$.

Таким образом, указанным выше способом мы можем каждое n-мерное линейное пространство превратить в евклидово.

Определение. Векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ евклидова пространства E_n называются *ортогональными*, если их скалярное произведение $\overline{x}\overline{y}=0$.

Система векторов $\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_m$ евклидова пространства E_n называется *ортогональной*, если все векторы этой системы попарно ортогональны.

Теорема. *Если система* $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_m$ *ненулевых векторов евклидова пространства* E_n *является ортогональной, то она линейно независима.*

Доказательство. Предположим, что система $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_m$, состоящая из ненулевых попарно ортогональных векторов, является линейно зависимой. Тогда найдутся коэффициенты $\alpha_1, ..., \alpha_m$ такие, что $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{x}_i = \bar{0}$, и при этом найдется $\alpha_j \neq 0$ для некоторого индекса j. Тогда $(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{x}_i)\bar{x}_j = \bar{0}\bar{x}_j = 0$, но с другой стороны $(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{x}_i)\bar{x}_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\bar{x}_i \bar{x}_j)$, а поскольку при $i \neq j$, $\bar{x}_i \bar{x}_j = 0$, то отсюда следует, что $\alpha_j \bar{x}_j^2 = 0$. Тогда, поскольку $\bar{x}_j^2 > 0$, то $\alpha_j = 0$, что противоречит нашему предположению. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема (о существовании ортогонального базиса). *В каждом евклидовом n-мерном пространстве* E_n *существует ортогональный базис. Более того, любой ненулевой вектор* $\bar{x}$ *пространства* E_n *содержится в некотором ортогональном базисе пространства* E_n.

Доказательство. Пусть E_n – евклидово *n*-мерное пространство, и пусть система векторов

(1) $$\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$$

образует базис в E_n. Построим новый базис $\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_n$, состоящий из векторов пространства E_n, каждый из которых будет являться линейной комбинацией векторов базиса (1), и который будет состоять из попарно ортогональных векторов. Для этого мы положим $\bar{b}_1 = \bar{a}_1$, $\bar{b}_2 = \alpha\bar{b}_1 + \bar{a}_2$, где число α выберем таким образом, чтобы $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$ были ортогональными. Поскольку $\bar{b}_1\bar{b}_2 = \bar{b}_1(\alpha\bar{b}_1 + \bar{a}_2) = \alpha\bar{b}_1^2 + \bar{b}_1\bar{a}_2$, условие ортогональности $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$ будет означать, что $\alpha\bar{b}_1^2 + \bar{b}_1\bar{a}_2 = 0$, или $\alpha\bar{b}_1^2 = -\bar{b}_1\bar{a}_2$, откуда $\alpha = -\frac{\bar{b}_1\bar{a}_2}{\bar{b}_1^2}$ в силу того, что $\bar{b}_1^2 > 0$. Нетрудно проверить, что найденное значение α действительно определяет вектор $\bar{b}_2$, удовлетворяющий условию $\bar{b}_1\bar{b}_2 = 0$. Заметим, что построенный вектор $\bar{b}_2$ отличен от нулевого. Далее продолжим построение остальных векторов базиса по индукции: предположим, что для всех $m \leq k-1$ (при $k \leq n$) мы уже построили ненулевые векторы $\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_m$, которые образуют ортогональную систему и линейно выражаются через первые m векторов системы (2).

Построим еще один ненулевой вектор $\bar{b}_k$ так, чтобы система $\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_k$ оставалась ортогональной. Мы положим $\bar{b}_k = \alpha_1'\bar{b}_1 + \alpha_2'\bar{b}_2 + ... + \alpha_{k-1}'\bar{b}_{k-1} + \bar{a}_k$, где числа $\alpha_1', \alpha_2', ..., \alpha_{k-1}'$ подберем таким образом, чтобы вектор $\bar{b}_k$ был ортогонален всем построенным уже векторам $\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_{k-1}$, т.е. чтобы выполнялось равенство $\bar{b}_k\bar{b}_j = 0$ для каждого $j = \overline{1, k-1}$.

Пусть j – произвольный такой индекс. Составим произведение:
$\bar{b}_k\bar{b}_j = \alpha_1'(\bar{b}_1\bar{b}_j) + \alpha_2'(\bar{b}_2\bar{b}_j) + ... + \alpha_{k-1}'(\bar{b}_{k-1}\bar{b}_j) + \bar{a}_k\bar{b}_j = \alpha_j'\bar{b}_j^2 + \bar{a}_k\bar{b}_j$ в силу того, что $\bar{b}_j$ ортогонален всем векторам $\bar{b}_i$, где $i = \overline{1, k-1}$, и $i \neq j$. Тогда, полагая $\alpha_j'\bar{b}_j^2 + \bar{a}_k\bar{b}_j = 0$, получим
$$\alpha_j' = -\frac{\bar{a}_k\bar{b}_j}{\bar{b}_j^2}.$$

Нетрудно увидеть, что найденное таким образом значение α_j' превращает равенство $\bar{b}_k\bar{b}_j = 0$ в тождество, так как $\bar{b}_k\bar{b}_j = \alpha_j'\bar{b}_j^2 + \bar{a}_k\bar{b}_j = -\frac{\bar{a}_k\bar{b}_j}{\bar{b}_j^2}\bar{b}_j^2 + \bar{a}_k\bar{b}_j = 0$. Придавая j значения от 1 до

$k-1$, находим все коэффициенты α_j', и найденный таким образом вектор $\bar{b}_k$ будет ортогонален всем данным векторам $\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_{k-1}$. Заметим, что вектор $\bar{b}_k$ является нетривиальной линейной комбинацией первых k векторов системы (1), и значит $\bar{b}_k \neq \bar{0}$.

Увеличивая k, строим систему векторов $\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_n$, которая является ортогональной; по предыдущей теореме она является линейно независимой, и, следовательно, образует базис в пространстве E_n, таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть $\bar{a}$ – произвольный ненулевой вектор пространства E_n, тогда покажем, что в E_n существует базис, содержащий данный вектор $\bar{a}$.

Вектор $\bar{a}$ сам образует линейно независимую систему, она не максимальная, значит, существует вектор $\bar{a}_2$, который с вектором $\bar{a}$ образует линейно независимую систему. Продолжая эти рассуждения дальше, мы получим линейно независимую систему, состоящую из n векторов, она будет максимальной, т.е. базисом в пространстве E_n.

Для этой системы положим, что $\bar{a}_1 = \bar{a}$, и, используя доказанную первую часть, завершаем доказательство теоремы.

Определение. Длиной вектора $\bar{a}$ евклидова пространства будем называть число $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}\bar{a}}$. Вектор $\bar{a}$ называется *нормированным*, если справедливо равенство: $|\bar{a}| = 1$, или иначе $\bar{a}^2 = 1$.

Любой вектор в евклидовом пространстве, кроме нулевого, можно нормировать, т.е. построить при помощи него нормированный вектор следующим образом: если $\bar{a} \neq \bar{0}$, то $\bar{a}^2 > 0$, следовательно существует число $\frac{1}{\bar{a}^2}$, тогда $\bar{b} = \frac{1}{\sqrt{\bar{a}^2}}\bar{a}$ – нормированный вектор, так как

$$\bar{b}\bar{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{a}^2}}\bar{a}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\bar{a}^2}}\bar{a}\right) = \frac{1}{\bar{a}^2}\bar{a}^2 = 1.$$

Определение. Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_k$ называется *ортонормированной*, если выполняется условие: $\bar{a}_i \bar{a}_j = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}$, *для всех* $i, j = \overline{1,k}$.

Теорема. *В евклидовом n-мерном пространстве E_n существует ортонормированный базис, т.е. базис, состоящий из нормированных попарно ортогональных векторов $\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_n$.*

Справедливость данной теоремы следует из предыдущей теоремы и из того, что, нормируя каждый вектор ортогонального базиса, мы сохраняем попарную ортогональность векторов получаемого базиса.

Теорема (о скалярном произведении в ортонормированном базисе). *Пусть E_n – n-мерное евклидово пространство, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ – базис данного пространства. Тогда для каждой пары векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ пространства E_n скалярное произведение $\bar{x}\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (где x_i, y_i, $i = \overline{1,n}$ – координаты данных векторов в указанном базисе) тогда и только тогда, когда базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ – ортонормированный.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть для каждой пары векторов $\bar{x}, \bar{y}$ из E_n, заданных координатами x_i, y_i, $i = \overline{1,n}$ в данном базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$, произведение $\bar{x}\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Тогда, поскольку $\bar{e}_i=(0\bar{e}_1+0\bar{e}_2+...+1\bar{e}_i+...+0\bar{e}_n)$, а $\bar{e}_j=(0\bar{e}_1+...+1\bar{e}_j+...+0\bar{e}_n)$, то $\bar{e}_i\bar{e}_j=\begin{cases}0, i\neq j\\ 1, i=j\end{cases}$, следовательно $\bar{e}_i$ и $\bar{e}_j$ – ортогональны между собой, и нормированы.

Достаточность. Пусть базис $\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n$ – ортонормированный, тогда если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – любые векторы E_n, то, представляя вектор $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{e}_i$, и вектор $\bar{y}=\sum_{j=1}^{n}y_j\bar{e}_j$, найдем их скалярное произведение $\bar{x}\bar{y}=(\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{e}_i)(\sum_{j=1}^{n}y_j\bar{e}_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_iy_j)(\bar{e}_i\bar{e}_j)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\bar{e}_i^{\,2}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$, и теорема доказана.

Пример. Рассмотрим *n*-мерное линейное пространство R^n. Система векторов

$$\bar{e}_1=(100...0),\quad \bar{e}_2=(010...0),\quad ....\quad ,\quad \bar{e}_n=(000...1)$$

данного пространства образует так называемый *канонический базис* в пространстве R^n. Тогда, если мы определим скалярное произведение в пространстве R^n, полагая для любых векторов $\bar{x}=(x_1,...,x_n)$ и $\bar{y}=(y_1,...,y_n)$ данного пространства $\bar{x}\bar{y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$, то пространство R^n превращается в n- мерное евклидово пространство, а канонический базис в нем является ортонормированным.

§ 20. Ортогональные матрицы. Ортогональные линейные операторы.

Определение. Квадратная вещественная матрица Q размерности n называется *ортогональной,* если выполняется условие:

$$Q^T=Q^{-1}. \tag{1}$$

Легко видеть, что условие (1) равносильно следующему условию

$$QQ^T=\mathrm{E}. \tag{2}$$

Теорема. *Квадратная вещественная матрица* Q *является ортогональной тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: сумма произведений элементов каждой ее строки на соответствующие элементы другой строки равна 0, а сумма квадратов элементов любой строки равна 1.*

Доказательство. Пусть $Q=(a_{ij})_{n\times n}$ – квадратная матрица n- го порядка. Возьмем i- ю строку матрицы Q и j- й столбец матрицы Q^T, и рассмотрим сумму произведений соответствующих элементов выбранных строки и столбца: $c_{ij}=(a_{i1}\ a_{i2}\ ...\ a_{in})\begin{pmatrix}a_{j1}\\ a_{j2}\\ \vdots\\ a_{jn}\end{pmatrix}=(a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+...+a_{in}a_{jn})$;

тогда выполнение указанного в теореме условия равносильно тому, что $c_{ij}=\begin{cases}0, i\neq j\\ 1, i=j\end{cases}$, что в свою очередь равносильно выполнению условия (2). Теорема доказана.

Примерами ортогональных матриц могут служить единичная матрица

$$\mathrm{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \text{а также матрицы}\quad \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\quad \text{и}\quad \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Приведем некоторые свойства ортогональных матриц.

Свойство 1. *Обратная матрица для ортогональной матрицы Q является ортогональной.*

Доказательство. Пусть матрица Q является ортогональной, тогда $Q^T = Q^{-1}$. Транспонируя каждую из матриц данного равенства, получим $(Q^{-1})^T = (Q^T)^T = Q = (Q^{-1})^{-1}$, и таким образом для матрицы Q^{-1} условие ортогональности также выполняется.

Очевидна справедливость следующего утверждения.

Свойство 2. *Транспонированная матрица Q^T для ортогональной матрицы Q также является ортогональной.*

Замечание. Из данного свойства следует, что в формулировке теоремы о равносильности определения ортогональной матрицы слово «строки» можно заменить словом «столбцы».

Свойство 3. *Произведение двух ортогональных матриц является ортогональной матрицей.*

Доказательство. Пусть Q_1 и Q_2 ортогональные матрицы.

Тогда $(Q_1Q_2)^T = Q_2^T Q_1^T = Q_2^{-1}Q_1^{-1} = (Q_1Q_2)^{-1}$, что и требовалось доказать.

Теорема. *Если Q – матрица перехода от ортонормированного базиса n - мерного евклидова пространства E_n к другому ортонормированному базису пространства E_n, то она является ортогональной.*

Доказательство. Пусть Q – матрица перехода от ортонормированного базиса $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$ пространства E_n к ортонормированному базису $\overline{e}_1', \overline{e}_2', ..., \overline{e}_n'$. Тогда справедливо равенство $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n) * Q = (\overline{e}_1', \overline{e}_2', ..., \overline{e}_n')$. Следовательно, для каждого $i = \overline{1,n}$ вектор $\overline{e}_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\overline{e}_k$, и для каждого $j = \overline{1,n}$ вектор $\overline{e}_j' = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}\overline{e}_s$. Используя данные представления, рассмотрим произведение: $\overline{e}_i'\overline{e}_j' = (\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\overline{e}_k)(\sum_{s=1}^{n} a_{si}\overline{e}_s) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$. С другой стороны, $\overline{e}_i'\overline{e}_j' = \begin{cases} 0, & при\ i \neq j \\ 1, & при\ i = j \end{cases}$, тогда $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \begin{cases} 0, & при\ i \neq j \\ 1, & при\ i = j \end{cases}$.

Последнее равенство говорит о том, что сумма произведений элементов, стоящих в разных столбцах матрицы Q равна нулю, а сумма квадратов элементов каждого столбца равна 1, следовательно, Q^T является ортогональной, тогда Q также является ортогональной. Теорема доказана.

Определение. Линейный оператор φ в евклидовом пространстве E называется *ортогональным*, если для любого вектора $\overline{x}$ из пространства E будет справедливо равенство: $(\varphi(\overline{x}))^2 = \overline{x}^2$.

Примером ортогонального линейного оператора может служить тождественный оператор: $\varphi(\overline{x}) = \overline{x}$ для каждого $\overline{x} \in E$.

Отметим, что для ортогонального линейного оператора будет справедливо также следующее свойство скалярного произведения.

Лемма. *Каждый ортогональный линейный оператор φ в пространстве E удовлетворяет свойству: для любых $\overline{x}, \overline{y} \in E$ $\varphi(\overline{x})\varphi(\overline{y}) = \overline{x}\overline{y}$.*

Доказательство. Поскольку φ ортогональный линейный оператор, то

$(\varphi(\overline{x}+\overline{y}))^2=(\varphi(\overline{x})+\varphi(\overline{y}))^2=(\varphi(\overline{x}))^2+2\varphi(\overline{x})\varphi(\overline{y})+(\varphi(\overline{y}))^2=\overline{x}^2+2\varphi(\overline{x})\varphi(\overline{y})+\overline{y}^2$. С другой стороны $(\varphi(\overline{x}+\overline{y}))^2=(\overline{x}+\overline{y})^2=\overline{x}^2+2\overline{x}\overline{y}+\overline{y}^2$, тогда, приравнивая правые части данных равенств, получим $\varphi(\overline{x})\varphi(\overline{y})=\overline{x}\overline{y}$. Лемма доказана.

Теорема. *Ортогональный линейный оператор φ в евклидовом пространстве E_n переводит каждый его ортонормированный базис в ортонормированный базис. Обратно, если линейный оператор φ в евклидовом пространстве E_n переводит некоторый его ортонормированный базис в ортонормированный базис, то данный оператор является ортогональным.*

Доказательство. Пусть линейный оператор φ в пространстве E_n является ортогональным, и пусть система векторов $\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n$ – ортонормированный базис в E_n. Покажем, что система $\varphi(\overline{e}_1),\varphi(\overline{e}_2),\dots,\varphi(\overline{e}_n)$ также образует ортонормированный базис. Рассмотрим $\varphi(\overline{e}_i)\,\varphi(\overline{e}_j)=\overline{e}_i\overline{e}_j=\begin{cases}0, & при\ i\neq j\\ 1, & при\ i=j\end{cases}$ (в силу леммы), таким образом, система $\varphi(\overline{e}_1),\varphi(\overline{e}_2),\dots,\varphi(\overline{e}_n)$ действительно образует ортонормированный базис в пространстве E_n.

Пусть теперь φ – линейный оператор евклидова пространства E_n, и пусть существует ортонормированный базис $\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n$ пространства E_n такой, что векторы $\varphi(\overline{e}_1),\varphi(\overline{e}_2),\dots,\varphi(\overline{e}_n)$ также образуют ортонормированный базис в пространстве E_n.

Пусть $\overline{x}\in E_n$, тогда $\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{e}_i$, где $(x_1,x_2,...,x_k)$ – координаты вектора $\overline{x}$ в базисе $\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n$. Поскольку φ линейный оператор, то $\varphi(\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i\varphi(\overline{e}_i)$, но замечая, что в ортонормированном базисе скалярный квадрат вектора будет равен сумме квадратов его координат, получаем, что $(\varphi(\overline{x}))^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$. Следовательно $(\varphi(\overline{x}))^2=\overline{x}^2$, и оператор φ является ортогональным. Теорема доказана.

Теорема. *Ортогональный линейный оператор φ евклидова пространства E_n в любом ортонормированном базисе данного пространства имеет ортогональную матрицу. Обратно, если в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства E_n линейный оператор φ задается ортогональной матрицей, то он является ортогональным.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть φ – ортогональный линейный оператор евклидова пространства E_n, и пусть $\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n$ – ортонормированный базис пространства E_n. Пусть A – матрица линейного оператора φ в данном базисе. Тогда $(\varphi(\overline{e}_1)\,\varphi(\overline{e}_2)\,...\,\varphi(\overline{e}_n))=(\overline{e}_1\ \overline{e}_2\ ...\ \overline{e}_n)*A$. На основании теоремы об ортогональном линейном операторе, система векторов $\varphi(\overline{e}_1),\varphi(\overline{e}_2),...,\varphi(\overline{e}_n)$ также образует ортонормированный базис в E_n. Заметим тогда, что матрица A служит матрицей перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному базису, и таким образом является ортогональной.

Достаточность. Пусть φ – линейный оператор и $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ – его матрица в ортонормированном базисе $\overline{e}_1,\overline{e}_2,...,\overline{e}_n$ евклидова пространства E_n. Пусть матрица A является ортогональной. Покажем, что линейный оператор φ в этом случае будет ортогональным.

Так как матрица A ортогональная, то и A^T также является ортогональной. Поскольку для каждого $i=\overline{1,n}$ $\varphi(\overline{e}_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\overline{e}_k$, и для каждого $j=\overline{1,n}$ $\varphi(\overline{e}_j)=\sum_{s=1}^{n}a_{kj}\overline{e}_k$, то скалярное произведение $\varphi(\bar{e}_i)\,\varphi(\bar{e}_j)=\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}=\begin{cases}0, & при\ i\neq j\\ 1, & при\ i=j\end{cases}$. Отсюда следует, что система векторов $\varphi(\bar{e}_1),\varphi(\bar{e}_2),...,\varphi(\bar{e}_n)$ является ортонормированным базисом. Тогда по предыдущей теореме оператор φ является ортогональным. Теорема доказана.

Следствие 1. *Произведение ортогональных линейных операторов евклидова пространства E_n является ортогональным линейным оператором.*

Следствие 2. *Обратное отображение для ортогонального линейного оператора евклидова пространства E_n является ортогональным линейным оператором.*

§ 21. Симметричный (самосопряженный) линейный оператор.

Определение. Линейный оператор φ в n-мерном евклидовом пространстве E называется *симметричным (самосопряженным)*, если для любых векторов $\bar{x},\bar{y}\in E$ выполняется условие: $\varphi(\bar{x})\bar{y}=\bar{x}\varphi(\bar{y})$.

Примерами симметричных линейных операторов могут служить

$а)$ нулевой оператор: $\varphi(\bar{x})=\bar{0}$ для каждого $\bar{x}\in E$;

$б)$ тождественный линейный оператор: $\varphi(\bar{x})=\bar{x}$ для каждого $\bar{x}\in E$;

$в)$ оператор $\varphi(\bar{x})=\alpha\bar{x}$ для каждого $\bar{x}\in E$, при фиксированном $\alpha\in R$.

Определение. Квадратная матрица $A=(a_{ij})_{n\times n}$ называется *симметричной*, если для всех индексов $i,j=\overline{1,n}$ выполняется условие: $a_{ij}=a_{ji}$, или, другими словами, все элементы матрицы A, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой.

Заметим, что матрица A тогда и только тогда является симметричной, когда она не меняется при транспонировании, т.е. когда $A=A^T$.

Следующая теорема устанавливает связь между симметричными линейными операторами и симметричными матрицами.

Теорема. *Симметричный линейный оператор в ортонормированном базисе евклидова пространства E_n задается симметричной матрицей. Обратно, если в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства E_n линейный оператор имеет симметричную матрицу, то он является симметричным.*

Доказательство. Пусть φ – симметричный линейный оператор, и система векторов $\bar{e}_1,\bar{e}_2,..,\bar{e}_n$ образует ортонормированный базис в евклидовом пространстве E_n. Пусть A – матрица линейного оператора φ в данном базисе, тогда $(\varphi(\bar{e}_1)\,\varphi(\bar{e}_2)\,...\,\varphi(\bar{e}_n))=(\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ ...\ \bar{e}_n)*A$. Отсюда следует, что для всех $i,j=\overline{1,n}$ $\varphi(\bar{e}_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\bar{e}_k$, $\varphi(\bar{e}_j)=\sum_{s=1}^{n}a_{sj}\bar{e}_s$. Тогда $\varphi(\bar{e}_i)\bar{e}_j=(\sum_{i=1}^{n}a_{ki}\bar{e}_k)\bar{e}_j=a_{ji}$, аналогично $\bar{e}_i\varphi(\bar{e}_j)=a_{ij}$, следовательно $a_{ij}=a_{ji}$, и матрица A является симметричной. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь φ – линейный оператор евклидова пространства E_n, и в некотором ортонормированном базисе $\bar{e}_1,\bar{e}_2,..,\bar{e}_n$ оператор φ задается симметричной матрицей A. Тогда $(\varphi(\bar{e}_1)\,\varphi(\bar{e}_2)\,...\,\varphi(\bar{e}_n))=(\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ ...\ \bar{e}_n)*A$. Пусть $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – произвольные векторы пространства

E_n, рассмотрим представление этих векторов в данном базисе: $\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{e_i}$, $\overline{y}=\sum_{i=1}^{n}y_i\overline{e_i}$. Тогда

$$\varphi(\overline{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i\varphi(\overline{e_i})=\sum_{i=1}^{n}x_i(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}\overline{e_k})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x_ia_{ki})\overline{e_k}=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}x_ia_{ki})\overline{e_k}.$$

Аналогично $\varphi(\overline{y})=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}y_ia_{ki})\overline{e_k}$. Из этого следует, что

$$\varphi(\overline{x})\overline{y}=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}x_ia_{ki})y_k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(x_ia_{ki}y_k),\quad \overline{x}\varphi(\overline{y})=\sum_{k=1}^{n}x_k(\sum_{i=1}^{n}y_ia_{ki})=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_ky_ia_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_ky_ia_{ik}$$

в силу симметричности матрицы A. Поменяем местами в последней сумме индексы i и k, и получим, что $\varphi(\overline{x})\overline{y}=\overline{x}\varphi(\overline{y})$, следовательно, оператор φ является симметричным. Теорема доказана.

Теорема. *Все характеристические корни вещественной симметричной матрицы являются действительными числами.*

Доказательство. Пусть λ – характеристический корень матрицы A, тогда λ является корнем уравнения $|A-\lambda E|=0$. Пусть λ – комплексное число, тогда система уравнений

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+...+a_{2n}x_n=0\\ ....\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+(a_{nn}-\lambda)x_n=0\end{cases}\qquad(*)$$

имеет ненулевые решения, состоящие из комплексных чисел, пусть упорядоченный набор $(c_1,c_2,...,c_n)$ образует одно из них. При подстановке данных значений переменных в каждое i-е уравнение системы мы получаем тождество: $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j=\lambda c_i$. Умножим обе части каждого такого равенства на $\overline{c_i}$, и просуммируем их, придавая i значения от 1 до n, получим $\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j)\overline{c_i}=\sum_{i=1}^{n}\lambda c_i\overline{c_i}$, или $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j\overline{c_i}=\lambda\sum_{i=1}^{n}c_i\overline{c_i}$. Заметим, что поскольку $c_i\overline{c_i}\in R$, то $\sum_{i=1}^{n}c_i\overline{c_i}$ является действительным числом, отличным от нуля. Покажем, что левая часть полученного равенства также является действительным числом. Для этого возьмем сопряженное для нее, и покажем, что оно совпадает с исходным значением. Действительно, $\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j\overline{c_i}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{ij}c_j\overline{c_i}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{ij}}\,\overline{c_j}\,\overline{\overline{c_i}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{c_j}c_i=$(в силу симметричности матрицы A) $=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ji}c_i\overline{c_j}$. Поменяв в последнем равенстве местами индексы i и j, придем к исходному выражению, таким образом, действительно, левая часть указанного равенства является вещественной. Тогда λ также является действительным числом, и теорема доказана.

Теорема. *Линейный оператор φ в n- мерном евклидовом пространстве E_n является симметричным тогда и только тогда, когда в пространстве E_n существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов линейного оператора φ.*

Доказательство. Пусть линейный оператор φ в пространстве E_n является симметричным, покажем, что в пространстве E_n существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов данного линейного оператора. Доказательство будем проводить индукцией по числу n размерности пространства E_n.

При $n=1$ каждый вектор пространства E_1 имеет вид $\alpha\bar{a}$, где $\bar{a}$ – ненулевой вектор пространства E_1, а $\alpha \in R$. В этом случае, каждый вектор пространства E_1 (кроме нулевого) является собственным для оператора φ, и утверждение выполняется. Пусть требуемый базис существует для каждого евклидова пространства размерности n, покажем, что тогда он будет существовать и для произвольного евклидова пространства размерности $(n+1)$.

Симметричный оператор φ в ортонормированном базисе пространства E_{n+1} имеет симметричную матрицу, тогда по предыдущей теореме он имеет действительные характеристические корни, следовательно, имеет действительное собственное значение λ. Пусть $\bar{a}$ – собственный вектор оператора φ, соответствующий значению λ. Поскольку $\bar{a} \neq \bar{0}$, то найдется ортогональный базис $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_{n+1}$ пространства E_{n+1}, содержащий вектор $\bar{a} = \bar{a}_1$.

Рассмотрим линейную оболочку векторов $\bar{a}_2, \bar{a}_3, ..., \bar{a}_{n+1}$, обозначим данное подпространство пространства E_{n+1} как L'. Отметим, что L' является n- мерным евклидовым пространством, так как для любых векторов L', которые являются и векторами E_{n+1}, определено скалярное произведение со всеми необходимыми свойствами. Отметим, что L' состоит из всех векторов пространства E_{n+1}, ортогональных вектору $\bar{a}$. Действительно, для каждого вектора $\bar{x} \in E_{n+1}$, если $(x_1, x_2, .., x_{n+1})$ – координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\bar{a}_1, \bar{a}_2, .., \bar{a}_{n+1}$, то $\bar{x} \cdot \bar{a} = (\sum_{i=1}^{n+1} x_i \bar{a}_i)\bar{a} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i (\bar{a}_i \bar{a}) = x_1 \bar{a}_1^2$ в силу ортогональности данного базиса, а тогда $\bar{x} \cdot \bar{a} = 0$, тогда и только тогда, когда $x_1 = 0$, что равносильно тому, что вектор $\bar{x} \in L'$.

Далее заметим, что $\varphi(\bar{x}) \in L'$ для каждого $\bar{x} \in L'$. Действительно $\varphi(\bar{x}) \cdot \bar{a} = \bar{x}\varphi(\bar{a})$ в силу симметричности φ, а поскольку вектор $\bar{a}$ является собственным для оператора φ, то $\varphi(\bar{x}) \cdot \bar{a} = \bar{x} \cdot (\lambda \bar{a}) = \lambda(\bar{x}\bar{a}) = 0$, и таким образом $\varphi(\bar{x}) \in L'$.

Тогда, ограничивая отображение φ на L', мы можем считать, что φ – симметричный линейный оператор в n- мерном евклидовом пространстве L', а тогда, по предположению индукции, в L' найдется ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов линейного оператора φ, пусть это будет $\bar{e}_2, \bar{e}_3, ..., \bar{e}_{n+1}$. Добавим к данному базису вектор $\bar{e}_1 = \dfrac{\bar{a}}{\sqrt{\bar{a}^2}}$, который также является собственным вектором оператора φ, и получим искомый ортонормированный базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_{n+1}$ пространства E_{n+1}. Таким образом необходимость доказана.

Докажем достаточность, пусть линейный оператор φ в пространстве E_n обладает собственными векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$, образующими ортонормированный базис в пространстве E_n. Тогда оператор φ в данном базисе имеет диагональную матрицу. В силу того, что диагональная матрица является симметричной, оператор φ будет симметричным, как оператор, имеющий симметрическую матрицу в ортонормированном базисе. Теорема доказана.

§ 22. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Определение. *Действительной квадратичной формой от* n *неизвестных* $x_1, x_2, ..., x_n$ мы будем называть функцию

$$f(x_1, x_2, .., x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad , \tag{1}$$

где для всех $i, j = 1,2,...,n$ выполняются равенства $a_{ij} = a_{ji}$. Матрицу $A = (a_{ij})_{n\times n}$, составленную из вещественных коэффициентов при неизвестных квадратичной формы, будем называть *матрицей квадратичной формы.* Отметим, что A – симметричная матрица, следовательно $A^T = A$.

Будем говорить, что квадратичная форма *имеет канонический вид,* если в формуле (1) все коэффициенты $a_{ij} = 0$ при всех $i \neq j$. Таким образом, квадратичная форма в каноническом виде представляется формулой

$$f(x_1, x_2,.., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 . \qquad (1)'$$

Напомним, что в n-мерном линейном пространстве L при переходе от одного базиса пространства к другому базису координаты каждого вектора пространства в исходном и новом базисах будут связаны соотношением:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ ... \\ x_n' \end{pmatrix},$$

где A – матрица перехода от исходного базиса к новому.

Определение. *Линейным преобразованием неизвестных* мы будем называть переход от системы n неизвестных $x_1, x_2,.., x_n$ к системе неизвестных $y_1, y_2,.., y_n$, при котором исходные неизвестные выражаются через новые линейно с действительными числовыми коэффициентами:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \\ .... \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n \end{cases}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

при этом называется матрицей линейного преобразования неизвестных.

Мы будем исследовать вопрос о возможности приведения квадратичной формы к каноническому виду при помощи линейного преобразования неизвестных.

Запишем квадратичную форму (1) в матричном виде

$$f(x_1, x_2,.., x_n) = (x_1 x_2 ... x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = (\sum_{i=1}^{n} x_i a_{i1}, \sum_{i=1}^{n} x_i a_{i2},..., \sum_{i=1}^{n} x_i a_{in}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}) x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad .$$

Если бы мы нашли линейное преобразование неизвестных, выражающее переменные $x_1, x_2,.., x_n$ через переменные $x_1', x_2',.., x_n'$, которое придаст квадратичной форме канонический вид, то данная форма стала бы представляться следующим образом:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1' x_2' ... x_n') A' \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ ... \\ x_n' \end{pmatrix},$$

где матрица A' имеет диагональный вид, т. е.

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11}' & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}' & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{nn}' \end{pmatrix}.$$

Основную роль в решении поставленного вопроса будет играть следующая теорема.

Теорема. *Для любой симметричной вещественной матрицы A существует такая ортогональная матрица Q, которая приводит матрицу A к диагональному виду, то есть выполняется равенство: $Q^{-1}AQ = A'$, где A' - диагональная матрица.*

Доказательство. Пусть E_n – евклидово n - мерное пространство, и система векторов

$$\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n \qquad (2)$$

образует ортонормированный базис в пространстве E_n. Используя данный базис, зададим в пространстве E_n при помощи матрицы A линейный оператор φ.

Поскольку данный оператор φ в ортонормированном базисе имеет симметричную матрицу, то оператор φ является симметричным. Тогда в пространстве E_n найдется ортонормированный базис

$$\bar{e}_1', \bar{e}_2', ..., \bar{e}_n' \qquad (2)'$$

состоящий из собственных векторов линейного оператора φ. В этом базисе оператор φ имеет матрицу A', имеющую диагональный вид (по теореме о диагональной матрице линейного оператора).

Матрицы A и A' подобны, как матрицы одного линейного оператора в разных базисах. Следовательно, существует такая матрица Q, что будет выполняться равенство $A' = Q^{-1}AQ^1$, причем Q будет являться матрицей перехода от базиса (2) к базису $(2)'$. Заметим, что Q является матрицей перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису, следовательно, является ортогональной. Теорема доказана.

Следствие. *Всякая действительная квадратичная форма от n неизвестных некоторым ортогональным линейным преобразованием неизвестных может быть приведена к каноническому виду.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, x_2, .., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ – действительная квадратичная форма, тогда ее матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ является вещественной и симметричной. Рассмотрим некоторое евклидово n - мерное пространство E_n, и пусть определенная выше система векторов (2) образует ортонормированный базис в пространстве E_n.

По доказанной выше теореме найдется ортогональная матрица Q такая, что произведение $Q^{-1}AQ = A'$ является диагональной матрицей, причем Q служит матрицей перехода от базиса (2) к ортонормированному базису $(2)'$ в пространстве E_n.

Будем рассматривать теперь упорядоченный набор неизвестных $(x_1, x_2, .., x_n)$ как координаты вектора $\bar{x}$ в базисе (2). Пусть $(x_1', x_2', .., x_n')$ – координаты данного вектора в базисе $(2)'$, тогда

$(x_1, x_2, .., x_n) = (x'_1, x'_2, .., x'_n)Q^T$. Используя данное равенство, произведем следующие преобразования квадратичной формы:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 x_2 ... x_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = ((x'_1 x'_2 ... x'_n)Q^T)A(Q\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}) = (x'_1 x'_2 ... x'_n)(Q^T AQ)\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix} =$$

$$= (x'_1 x'_2 ... x'_n)A'\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix} .$$

Полученное выражение

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (x'_1 x'_2 ... x'_n)A'\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}$$

и будет являться искомым представлением данной квадратичной формы в каноническом виде.

Отметим, что матрицу перехода Q при этом одновременно можно рассматривать как матрицу некоторого линейного преобразования ψ евклидова пространства R^n в каноническом базисе данного пространства, а поскольку матрица Q ортогональная, то данный оператор ψ является ортогональным.

Теорема доказана.

§ 23. Практический поиск канонического вида квадратичной формы.

Пусть исходная квадратичная форма имеет вид:

$$f(x) = (x_1 x_2 ... x_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ранее мы показали, что мы можем привести данную квадратичную форму к каноническому виду, используя некоторое ортогональное линейное преобразование n- мерного евклидова пространства R^n. Здесь мы изучим практические методы нахождения данного преобразования и канонического вида квадратичной формы.

Докажем следующую теорему, которая позволяет без нахождения конкретного преобразования неизвестных определить коэффициенты канонического вида нашей квадратичной формы.

Теорема. *Каково бы ни было ортогональное преобразование неизвестных, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, у полученной квадратичной формы в каноническом виде коэффициенты перед квадратами переменных всегда будут одни и те же числа, совпадающие с характеристическими корнями матрицы исходной квадратичной формы, взятыми с учетом их кратностей.*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы покажем, что если диагональная матрица A' подобна симметричной вещественной матрице A, то элементами a'_{ii}, стоящими на главной диагонали матрицы A', будут служить характеристические корни матрицы A, взятые с учетом их кратностей. Действительно, если матрица A симметричная, то она имеет n действительных корней (с учетом их кратностей). Рассмотрим характеристическое уравнение матрицы A': $|A'-\lambda E|=0$.

Заметим, что определитель

$$|A'-\lambda E|=\begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & a'_{22}-\lambda & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a'_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=(a'_{11}-\lambda)(a'_{22}-\lambda)\cdot ...\cdot(a'_{nn}-\lambda),$$

следовательно, элементы a'_{ii} являются характеристическими корнями матрицы A'. Но характеристические корни подобных матриц совпадают, и теорема доказана.

Теперь мы будем искать требуемое линейное преобразование неизвестных. Ранее, при доказательстве теоремы о приведении симметрической матрицы к диагональному виду, мы рассматривали произвольное евклидово пространство E_n. Теперь мы в качестве данного пространства возьмем пространство R^n, канонический базис в нем будем рассматривать как исходный. Из доказательства указанной выше теоремы следует, что для симметричной матрицы A и определенного с ее помощью в каноническом базисе пространства R^n линейного оператора φ найдется ортонормированный базис в R^n, состоящий из собственных векторов оператора φ, задающий диагональную матрицу данного оператора, подобную матрице A. Найдем такой базис, состоящий из собственных векторов оператора φ.

Матрица A симметричная, следовательно, она имеет n вещественных характеристических корней (с учетом их кратностей). Решая характеристическое уравнение $|A-\lambda E|=0$, найдем все характеристические корни матрицы A.

Пусть λ_0 является характеристическим корнем кратности k, тогда в ортонормированном базисе, состоящем из собственных векторов оператора φ, ему будут соответствовать ровно k собственных векторов.

Действительно, в каноническом базисе координаты всех собственных векторов оператора φ соответствующих собственному значению λ_0 будут находиться при решении системы уравнений $(A-\lambda_0 E)X=0$. В тоже время в новом базисе (из собственных векторов) координаты данных векторов будут находиться из уравнения $(A'-\lambda_0 E)X'=0$ (или из системы уравнений)

$$\begin{cases} (a'_{11}-\lambda_0)x_1+0\cdot x_2+...+0\cdot x_n=0 \\ 0\cdot x_1+(a'_{22}-\lambda_0)x_2+...+0\cdot x_n=0 \\ .... \\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2+...+(a'_{nn}-\lambda_0)x_n=0 \end{cases}$$

В силу теоремы о коэффициентах квадратичной формы в каноническом виде получим, что данная система содержит ровно $(n-k)$ нетривиальных уравнений, и ровно k неизвестных, таким образом, будут являться свободными. Тогда существует ровно k линейно независимых решений данной системы, которые и образуют k линейно независимых собственных векторов линейного оператора φ, соответствующих значению λ_0. Ну а тогда и уравнение $(A-\lambda_0 E)X=0$ должно иметь k линейно независимых решений.

Таким образом, решая данное уравнение, мы найдем k линейно независимых собственных векторов оператора φ, соответствующих λ_0, обозначим их $\bar{a}_1,\bar{a}_2,...,\bar{a}_k$.

Напомним при этом, что любой вектор $\bar{x}$ в пространстве R^n имеет очень простое разложение в каноническом базисе, а именно, если $\bar{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$, то $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{e}_i$, т.е. координатами вектора $\bar{x}$ служат соответствующие его компоненты.

Методом, изложенным в теореме о существовании ортогонального базиса, при помощи данной системы векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_k$ создадим ортогональную систему векторов и нормируем ее; получим ортонормированную систему векторов $\bar{c}_1, \bar{c}_2, ..., \bar{c}_k$, каждый из которых также является собственным вектором оператора φ, поскольку будет получен линейной комбинацией собственных векторов данного оператора, соответствующих одному и тому же собственному значению.

Далее, рассмотрим следующий характеристический корень λ_1 и построим соответствующую ему ортонормированную систему собственных векторов линейного оператора φ. Перебирая подобным образом все собственные значения λ, мы получим нормированную систему собственных векторов $\bar{c}_1, \bar{c}_2, ..., \bar{c}_n$ линейного оператора φ.

Отметим, что собственные векторы, которые относятся к разным собственным значениям, являются ортогональными. Действительно, пусть $\bar{c}_i$ и $\bar{c}_j$ собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям λ_i и λ_j оператора φ. Тогда $\varphi(\bar{c}_i)\bar{c}_j = (\lambda_i\bar{c}_i)\bar{c}_j = \lambda_i(\bar{c}_i\bar{c}_j)$, аналогично $\bar{c}_i\varphi(\bar{c}_j) = \bar{c}_i(\lambda_j\bar{c}_j) = \lambda_j(\bar{c}_i\bar{c}_j)$. В силу того, что линейный оператор φ является симметрическим, получаем равенство $\lambda_i(\bar{c}_i\bar{c}_j) = \lambda_j(\bar{c}_i\bar{c}_j)$. Поскольку $\lambda_i \neq \lambda_j$, то отсюда следует, что $\bar{c}_i\bar{c}_j = 0$.

Таким образом, построенная система векторов $\bar{c}_1, \bar{c}_2, ..., \bar{c}_n$ является ортонормированным базисом в пространстве R^n, состоящим из собственных векторов оператора φ.

Тогда, исходя из равенства $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, ..., \bar{c}_n) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n) * Q$, мы находим матрицу перехода Q от канонического базиса к полученному базису $\bar{c}_1, \bar{c}_2, ..., \bar{c}_n$ как матрицу, столбцами которой служат координаты векторов найденного базиса. Наконец, исходя из равенства $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix}$, мы делаем замену переменных в квадратичной форме, которая и приведет нашу квадратичную форму к каноническому виду, или находим матрицу A' из равенства $A' = Q^{-1}AQ$, учитывая при этом, что матрица $Q^{-1} = Q^T$.

Пример. Пусть $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 - 2x_1x_4$.

Составим матрицу A данной квадратичной формы, пусть она служит матрицей линейного оператора φ в каноническом базисе пространства R^n.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем характеристический многочлен матрицы A.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3).$$

Решаем характеристическое уравнение для матрицы A, получаем $\lambda_1 = 1$, $k = 3$ (кратность корня λ_1 равна 3), и $\lambda_2 = -3$.

Находим собственные векторы оператора φ, соответствующие значению $\lambda_1 = 1$. Для этого составим систему уравнений

$$(A-\lambda_1 E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Ранг данной системы равен единице, найдем три линейно независимых решения системы,

$$\bar{a}_1 = (1100),\quad \bar{a}_2 = (1010),\quad \bar{a}_3 = (-1001)\ .$$

Далее, используя данную систему векторов, построим ортогональную систему собственных векторов $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ линейного оператора φ.

Полагая $\bar{b}_1 = \bar{a}_1$, находим $\bar{b}_2 = \alpha_1 \bar{b}_1 + \bar{a}_2 = -\frac{1}{2}\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = (\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1;0)$, поскольку $\alpha_1 = -\frac{\bar{a}_2 \bar{b}_1}{\bar{b}_1^2} = -\frac{1}{2}$.

Тогда $\bar{b}_3 = \alpha_1' \bar{b}_1 + \alpha_2' \bar{b}_2 + \bar{a}_3$, где $\alpha_1' = \frac{-\bar{a}_3 \bar{b}_1}{\bar{b}_1^2} = \frac{1}{2}$, $\alpha_2' = \frac{-\bar{a}_3 \bar{b}_2}{\bar{b}_2^2} = \frac{1}{3}$, и, следовательно

$\bar{b}_3 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0) + (\frac{1}{6},-\frac{1}{6},\frac{1}{3},0) + (-1,0,0,1) = (-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},1)$. Нормируя полученные векторы $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$, получим систему векторов:

$$\bar{c}_1 = \frac{\bar{b}_1}{\sqrt{\bar{b}_1^2}} = (\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0),\ \bar{c}_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\sqrt{\frac{2}{3}},0),\ \bar{c}_3 = (-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Векторы $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ являются собственными для оператора φ, попарно ортогональны и нормированы.

Далее рассмотрим систему уравнений

$$(A-\lambda_2 E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\lambda_2 = -3$. Решая данную систему, находим собственный вектор $\bar{a}_4$ линейного оператора φ, соответствующий данному собственному значению $\lambda_2 = -3$. Легко проверить, что таковым является вектор $\bar{a}_4 = (1,-1,-1,1)$. Нормируя данный вектор, найдем вектор

$$\bar{c}_4 = \frac{\bar{a}_4}{\sqrt{a_4^2}} = (\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$$

Таким образом, система $\bar{c}_1,\bar{c}_2,\bar{c}_3,\bar{c}_4$ образует ортонормированный базис в R^n, состоящий из собственных векторов оператора φ. Матрица перехода Q от канонического базиса к полученному базису $\bar{c}_1,\bar{c}_2,\bar{c}_3,\bar{c}_4$ имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Тогда, совершив при помощи матрицы Q линейное преобразование неизвестных

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix},$$

мы получим представление нашей квадратичной формы в каноническом виде:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2 - 3(x_4')^2.$$

Заметим, что полученный вид мы могли бы определить сразу, после нахождения характеристических корней матрицы A.