УДК 621.319

***В.К. Клочко, Е.П. Чураков***

# ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ РЕКУРРЕНТНЫМ МЕТОДОМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

*В задаче восстановления радиолокационного изображения поверхности Земли предлагается использовать рекуррентный алгоритм решения систем линейных уравнений с помехами при фиксированном объеме выборки измерений. Дается модификация алгоритма для увеличивающегося объема выборки, позволяющая рекуррентно получать оценки при поступлении новых измерений.*

***Ключевые слова:*** *радиолокация, восстановление изображений, разрешающая способность РЛС.*

**Введение.** В работе [1] для матрицы радиолокационного изображения (РЛИ), полученной в координатах дальность – азимут в режиме наблюдения, смазывающего изображение по строкам (по азимуту), предложен рекуррентный алгоритм восстановления изображения по строкам, основанный на марковской (калмановской) модели смазывания. Моделирование работы алгоритма показало, что при числе измерительных каналов более одного алгоритм уступает по точности методу наименьших квадратов (МНК) решения систем уравнений. Также требуется настройка алгоритма по двум параметрам в зависимости от корреляционных свойств изображения. В статье как альтернативное решение предлагается для восстановления РЛИ по строке при фиксированном объеме выборки измерений использовать рекуррентный МНК решения систем уравнений (РМНК) и дается модификация РМНК для увеличивающегося объема выборки, позволяющая продолжить вычисления при поступлении новых измерений (при увеличении объема выборки).

**Модель измерений и постановка задачи.** Антенна радиолокационной станции (РЛС) сканирует участок земной поверхности, непрерывно смещаясь по азимуту. Съем данных по одному измерительному каналу РЛС в каждом элементе разрешения дальности осуществляется дискретно с шагом, равным n-й части ширины диаграммы направленности антенны (ДНА) на уровне 0,5 мощности. В результате формируется матрица амплитудного РЛИ поверхности в координатах дальность – азимут. Изображение в каждой строке матрицы РЛИ смазано интегральным характером наблюдений, и совокупность измерений, взятых по строке, описывается системой уравнений в векторно-матричной форме:

$$Y = A \cdot X + W, \qquad (1)$$

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(1) & \dots & \alpha(n) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(1) & \dots & \alpha(n) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \alpha(1) & \dots & \alpha(n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \dots \\ x(N+n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w(1) \\ w(2) \\ \dots \\ w(N) \end{bmatrix},$$

где $y(1),\dots,y(N)$ − измерения, собранные в $N$-векторе измерений $Y$; $\alpha(1),\dots,\alpha(n)$ − коэффициенты ДНА, представленные $N$x($N$+$n$-1)-матрицей $A$; $n$ – ширина ДНА в числе элементов дискретизации; $X = (x(1),\dots,x(N+n-1))^T$ − ($N$+n-1)-вектор искомого РЛИ по строке; $T$ – символ транспонирования; $W$ − вектор помех $w(1),\dots,w(N)$.

З а д а ч а заключается в нахождении оптимальных МНК-оценок $\hat{X}$ (вектора восстановленного изображения) в процессе поступления данных вначале для фиксированного объема выборки $N$ измерений и затем для увеличивающегося объема выборки.

При одном канале измерения ранг матрицы $A$ меньше числа неизвестных, и в силу вырожденности матрицы $A^T A$ оптимальное МНК-решение не существует. Однако находится псевдооптимальное решение с помощью процедур регуляризации, например по Тихонову А.Н. [2].

**Рекуррентные алгоритмы решения системы уравнений.** В соответствии с регулярным МНК решение системы (1) дает вектор МНК-оценок:

$$\hat{X} = (A^T A + \delta \cdot E)^{-1} A^T \cdot Y = H \cdot Y, \qquad (2)$$

где $\delta$ – параметр регуляризации [2]; $E$ – единичная матрица; $H$ − матрица весовых коэффициентов.

Вычисление $\hat{X}$ можно организовать рекуррентно в форме итерационного процесса при $k$ = 1, 2, …, $N$, где $k$ – номер итерации (номер измерения). Номер $k$ определяет число рассматриваемых уравнений системы (1), т.е. число строк матрицы $A$ и меняющийся при этом размер векторов $Y$, $W$ при неизменной размерности $N$+$n$-1 искомого вектора $X$:

$$k = 1 \;\Rightarrow\; Y_1 = A_1 X + W_1 ,$$

$$A_1 = (a_1^T), \quad Y_1 = (y(1)), \quad W_1 = (w(1)),$$

$$k = 2 \;\Rightarrow\; Y_2 = A_2 X + W_2 ,$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} w_1(1) \\ w(2) \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$k = N \;\Rightarrow\; Y = A \cdot X + W ,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \ldots \\ a_N^T \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y(1) \\ \ldots \\ y(N) \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w(1) \\ \ldots \\ w(N) \end{pmatrix},$$

где $a_1^T, a_2^T, \ldots, a_N^T$ – ($N$+$n$-1)-векторы-строки матрицы $A$.

На каждом $k$-м шаге итерации определяется $\hat{X}_k$ − промежуточная оценка вектора $X$. Известно (например, [3, 4]), что для модели (1) МНК-оценки $\hat{X}_k$ и $\hat{X}_{k-1}$ связаны между собой рекуррентным выражением:

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k-1} + B_k (y(k) - a_k^T \hat{X}_{k-1}), \quad B_k = D_k a_k , \quad (3)$$

при начальном условии $\hat{X}_0 = (0, 0, \ldots, 0)^T$, где $k = 1, 2, \ldots, N$; $B_k$ − векторный коэффициент; $y(k)$ – $k$-й элемент вектора измерений $Y$; $D_k = (\sum_{i=1}^{k} a_i a_i^T)^{-1}$ − обратная матрица, удовлетворяющая рекуррентному соотношению:

$$D_k = D_{k-1} - D_{k-1} a_k a_k^T D_{k-1}^T / (1 + a_k^T D_{k-1} a_k), \quad (4)$$

$$D_0 = (1/\delta) \cdot E , k = 1, 2, \ldots, N , \; D_N = (A^T A + \delta \cdot E)^{-1} .$$

Идея рекуррентного метода (4) заключается в представлении матрицы $D_k = (\sum_{i=1}^{k} a_i a_i^T)^{-1}$ в виде:

$$D_k = (\sum_{i=1}^{k-1} a_i a_i^T + a_k a_k^T)^{-1} = (D_{k-1}^{-1} + a_k a_k^T)^{-1}$$

и применении леммы об обращении матрицы [4].

Проследим преобразование $D_k$ по шагам:

$$D_1 = (D_o^{-1} + a_1 a_1^T)^{-1}, \ldots,$$

$$D_2 = (D_1^{-1} + a_2 a_2^T)^{-1} = (D_0^{-1} + a_1 a_1^T + a_2 a_2^T)^{-1}, \ldots,$$

$$D_N = (D_0^{-1} + \sum_{i=1}^{N} a_i a_i^T)^{-1} = (A^T A + \delta \cdot E)^{-1} .$$

На последней итерации $k = N$ алгоритма (3) вектор оценок $\hat{X}_N$ совпадает с вектором оценок $\hat{X}$ в (2). Элементы $\hat{x}_N(n), \hat{x}_N(n+1), \ldots, \hat{x}_N(N)$ вектора $\hat{X}_N$, обладающие наибольшей точностью оценивания, выводятся на экран индикатора и представляют собой восстановленное РЛИ по строке.

Алгоритм (3) имеет такой же недостаток, как и алгоритм (2) − при расширении вектора измерений $Y$ (поступлении новых измерений $y(N+1)$, $y(N+2)$... по строке) приходится пересчитывать матрицу весовых коэффициентов $H$ в (2) и повторять итерационную процедуру в (3).

Для устранения указанного недостатка алгоритм (3) модифицируется в РМНК решения системы уравнений с конечной эффективной памятью размером в $N$ последних измерений по типу калмановских алгоритмов, работающих в установившемся режиме (когда коэффициенты усиления практически не меняются). Модификация заключается в следующем.

При $k > N$ векторные коэффициенты $B_k$ в (3) фиксируются по последнему номеру $N$ измерений: $B_k = B_N \; \forall k \geq N$. Размерность вектора $\hat{X}_k$ при $k > N$ остается неизменной и равной $N$+$n$-1. После каждой $k$-й итерации, начиная с $k$=$N$, первый по счету элемент $\hat{x}_k(1)$ вектора $\hat{X}_k$ исключается из рассмотрения, на место $\hat{x}_k(1)$ записывается второй $\hat{x}_k(2)$, на место $\hat{x}_k(2)$ – третий и т.д., на место предпоследнего $\hat{x}_k(N+n-2)$ записывается последний $\hat{x}_k(N+n-1)$, а на месте последнего сохраняется сам последний элемент в качестве экстраполированной на один шаг оценки. Алгоритм (3) принимает следующий вид:

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k-1} + B_N (y(k) - a_N^T \hat{X}_{k-1}), \quad (5)$$

$$k = N+1, N+2, \ldots .$$

По мере поступления новых измерений $y(k)$, $k = N+1, N+2, \ldots$, на экран индикатора выводится элемент $\hat{x}_k(N)$ вектора $\hat{X}_k = (x_k(1), \ldots, x_k(N), \ldots, x_k(N+n-1))^T$.

Предусматривается нелинейное преобразование – взятие по модулю: $|\hat{x}_k(N)|$, обеспечивающее неотрицательность оценок.

Замечание. Алгоритм (3) также можно использовать в режиме возрастающего объема выборки, если расчет векторных коэффициентов $B_k, k = \overline{1, N_1}$, проводить для заведомо большого значения $N_1$ $(N_1 >> N)$. Так как характеристика ДНА $\alpha(1),...,\alpha(n)$ имеет вид решетчатой финитной функции, то с изменением номера *k* составляющие вектора $B_k$ меняются по типу бегущей волны длиной *n*. Соответственно в векторе $\hat{X}_k$ алгоритма (3) заметному изменению подлежат лишь последние *n* оценок, что делает (3) подобным алгоритму (5) в практическом применении. При этом увеличение числа строк матрицы $A$ до $N_1$ приводит к значительному увеличению числа операций при обращении матрицы $A^T A$ по формуле (4). Этого можно избежать, если заранее вычислить элементы вектора $B_N$ и на каждом шаге оценивания (3) смещать их в составе вектора $B_{N1}$ на одну позицию по типу бегущей волны (плавающего окна).

Алгоритмы (3) и (5) обобщаются на случай нескольких измерительных каналов РЛС. Для двух каналов модель измерений (1) принимает вид:

$$Y = A \cdot X + W,$$

$$\begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \\ y_1(2) \\ y_2(2) \\ ... \\ y_2(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1(1) & ... & \alpha_1(n) & 0 & 0 \\ \alpha_2(1) & ... & \alpha_2(n) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1(1) & ... & \alpha_1(n) & 0 \\ 0 & \alpha_2(1) & ... & \alpha_2(n) & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & \alpha_2(1) & ... & \alpha_2(n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ ... \\ ... \\ x(N+n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(1) \\ w_2(1) \\ w_1(2) \\ w_2(2) \\ ... \\ w_2(N) \end{bmatrix},$$

где $y_1(1), y_2(1),..., y_1(N), y_2(N)$ – измерения первого и второго каналов, собранные в 2*N*-векторе измерений $Y$ в порядке чередования; $\alpha_1(1),...,\alpha_1(n)$ и $\alpha_2(1),...,\alpha_2(n)$ – коэффициенты ДНА 1-го и 2-го каналов, представленные 2*N*x(*N*+n-1)-матрицей $A$; $w_1(1), w_2(1),...$ $..., w_1(N), w_2(N)$ – помехи в каналах, собранные в 2*N*-векторе *W* в указанном выше порядке.

В описании (3) и (4) число измерений *N* меняется на 2*N*, а измерения $y(k)$ в (3) берутся в чередовании 1-го и 2-го каналов. Формула (5) принимает следующий вид:

$$\hat{X}_{2k-1} = \hat{X}_{2k-2} + B_{2N-1}(y_1(k) - a_{2N-1}^T \hat{X}_{2k-2}),$$

$$\hat{X}_{2k} = \hat{X}_{2k-1} + B_{2N}(y_2(k) - a_{2N}^T \hat{X}_{2k-1}),$$

$$k = N+1, N+2, ...,$$

или в развернутом виде:

$$\hat{x}_{2k-1}(i) = |\hat{x}_{2k-2}(i) + b_{2N-1}(i)(y_1(k) - a_{2N-1}^T \hat{X}_{2k-2})|,$$

$$\hat{x}_{2k}(i) = |\hat{x}_{2k-1}(i) + b_{2N}(i)(y_2(k) - a_{2N}^T \hat{X}_{2k-1})|,$$

где $\hat{x}_{2k}(i)$ и $b_{2N}(i)$ – *i*-е элементы векторов $\hat{X}_{2k}$ и $B_{2N}$, $i = \overline{1, N+n-1}$, и предусматривается нелинейное преобразование – взятие по модулю правых частей. На каждом *k*-м шаге, $k = N+1, N+2,...$, из состава вектора оценок $\hat{X}_{2k} = (\hat{x}_{2k}(1),..., \hat{x}_{2k}(N),..., \hat{x}_{2k}(N+n-1))^T$ выделяется оценка $z_k = \hat{x}_{2k}(N)$, соответствующая последней паре принятых измерений $y_1(k), y_2(k)$. Последовательность $\{z_k\}$ дает расширенное изображение по строке.

**Результаты моделирования.** При моделировании работы алгоритмов (3) и (5) коэффициенты ДНА описывались экспоненциальной функцией с квадратичным показателем степени. Ширина ДНА $n = 5$. В отдельной строке матрицы изображения моделировалось истинное изображение $X$ амплитудного сигнала отражения от двух объектов формы колокола с максимальными амплитудами $A_1 = 10$ и $A_2 = 5$. Алгоритм (3) работал для выборки измерений объемом $N = 20$. Алгоритм (5) при первых $N = 10$ измерениях работал так же, как алгоритм (3), а при последующих измерениях *N*+1, *N*+2,…,20 работал с постоянным векторным коэффициентом $B_N$ в режиме эффективной памяти $N = 10$.

В таблице представлены СКО $\sigma_X$ ошибок оценок $\hat{x}(k)$, $k = \overline{1,20}$, полученные алгоритмами (3) и (5) в зависимости от СКО помехи $\sigma_P$ (гауссового белого шума). Данные таблицы показывают близкую точность работы алгоритмов.

**Таблица**

| СКО | Алгоритм (3) | | | Алгоритм (5) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_P$ | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,1 | 0,3 | 0,5 |
| $\sigma_X$ | 0,22 | 0,57 | 0,96 | 0,23 | 0,59 | 0,98 |

**Заключение.** Рекуррентные алгоритмы (3), (5) в отличие от регулярного алгоритма (2) позволяют восстанавливать одномерные изображения, смазанные интегральным преобразованием по строке, в процессе поступления данных. Они обобщаются на случай нескольких каналов с комплексными измерениями и применимы для восстановления двумерных изображений, смазанных по строке и столбцу, в координатах угол места – азимут для двухэтапной процедуры [5].

### *Библиографический список*


1. *Клочко В.К., Чураков Е.П., Фатьянов С.О.* Калмановский алгоритм восстановления смазанного радиоизображения // Известия вузов. Радиоэлектроника. 2004. Т. 47. № 9 - 10. С. 54 – 59.

2. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач: учеб. пособие. М.: Наука, 1986. 288 с.

3. *Альберт Л.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 224 с.

4. *Чураков Е.П.* Математические методы обработки экспериментальных данных в экономике: учеб. пособие. М.: Финансы и статистика, 2004. 240 с.

5. *Клочко В.К.* Методы оптимального восстановления радиолокационных изображений поверхности // Автометрия. 2005. Т. 41. № 6. С. 62 - 73.