УДК 510

Г.С. Орлов

ДИНАМИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ НАГРУЖЕННЫЕ ГРАФЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, СВОЙСТВА, ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ

Определяется новый математический объект – динамический вероятностный нагруженный граф (ДВНГ). Даются определения основных понятий, сопутствующих этому объекту. Описываются основные свойства ДВНГ, указываются области возможных применений. Обосновывается утверждение о том, что ДВНГ является обобщением таких понятий современной прикладной математики, как искусственный нейрон, нечёткое множество и нечёткий граф.

Ключевые слова: *математическое моделирование, ориентированный граф, нечёткое множество, искусственный нейрон, нечёткий граф, случайный граф, транспортная сеть.*

Введение. Цель работы – дать определение новому математическому объекту – ДВНГ. Описать его основные свойства. Указать области возможного применения. Дать определения сопутствующим понятиям. Провести возможные обобщения ДВНГ на предельные ситуации. Создать аксиоматическую базу для развития нового направления в прикладной математике – моделирование на базе ДВНГ.

Рассмотрим ориентированный граф $G=(X_G,P_G)$ $(|X_G|=n,|P_G|=m)$, у которого каждая вершина в каждое временное сечение может быть связана дугами со всеми остальными вершинами, а также может содержать петлю. Причём из одной вершины $x_i \in X_G$ в другую вершину $x_j \in X_G$ может быть проведена не одна, а несколько дуг $U_{ij}^{(1)},U_{ij}^{(2)},\ldots,U_{ij}^{(k_{ij})}$ (*верхний индекс – порядковый номер дуги*). Пусть x_i, x_j – две произвольные вершины графа $G=(X_G,P_G)$. Обозначим через $P_{ij}^{(l)}(t_k)$ вероятность того, что в момент времени t_k дуга $U_{ij}^{(l)}$ существует ($p_{ii}(t_k)$ - вероятность того, что в момент t_k существует петля в вершине x_i). Пусть с каждой дугой $U_{ij}^{(l)}$ графа связана действительная величина $C_{t_k}(U_{ij}^{(l)})$ - нагрузка этой дуги в момент t_k (*ясно, при условии, что в данный момент времени дуга существует с ненулевой вероятностью).*

<u>**Определение 1.**</u> ***Динамическим вероятностным нагруженным графом (ДВНГ) будем называть ориентированный граф $G=(X_G,P_G)$, $(|X_G|=n,|P_G|=m)$, у которого в любой момент времени $t\in T$, для любых вершин x_i, x_j из X_G $l-я$ дуга $U_{ij}^{(l)}\in P_G$ существует с вероятностью $p_{ij}^{(l)}(t)$. Если в данный момент времени t дуга $U_{ij}^{(l)}$ существует, то она характеризуется известной априори величиной $C_t(U_{ij}^{(l)})$ - нагрузкой дуги в момент времени t. Если t принимает только дискретные значения, то граф G будем называть динамическим вероятностным нагруженным графом с дискретным временем (ДВНГсДВ). Если t меняется непрерывно, то G- динамический вероятностный нагруженный граф с непрерывным временем (ДВНГсНВ).***

Из определения 1 следует, что в различные моменты времени (*в различных временных сечениях*) все основные характеристики графа $G=(X_G,P_G)$ могут существенным образом отличаться друг от друга. В частности: могут появляться и исчезать отдельные изолированные вершины, меняться нагрузка дуг, уменьшаться (*или увеличиваться*) число дуг из одной вершины в другую.

<u>**Определение 2.**</u> ***Матрицей смежности ДВНГ $A(G)_{[n\times n]}=\|a_{ij}\|$ будем называть квадратную матрицу размерностью***

$[n\times n], n=|X_G|$, ***каждый элемент*** a_{ij} ***которой равен количеству возможных дуг (петель при*** $i=j$***) из вершины*** $x_i \in X_G$ ***в вершину*** $x_j \in X_G$**.**

Замечание. Будем называть дугу $U_{ij}^{(l)}$ графа $G=(X_G,P_G)$ возможной дугой, если в течение некоторого достаточно длительного интервала времени Δt вероятность её существования отлична от нуля. Невозможные дуги рассматривать не будем.

Определение 3. ***Матрицей вероятностей ДВНГ*** $G=(X_G,P_G)$ ***будем называть матрицу*** $P_G(t)=\left\|\overline{p}_{ij}(t)\right\|$ ***размерностью*** $[n\times n]$, $n=|X_G|$, ***каждый элемент*** $\overline{p}_{ij}(t)=$ $=\left(p_{ij}^{(1)}(t), p_{ij}^{(2)}(t),..., p_{ij}^{(k_{ij})}(t)\right)$, ***которой есть вектор вероятностей существования соответствующей дуги из вершины*** $x_i \in X_G$ ***в вершину*** $x_j \in X_G$ ***в момент времени*** t (*подразумевается, что существует* k_{ij} *возможных дуг из вершины* $x_i \in X_G$ *в вершину* $x_j \in X_G$*).*

Наиболее естественными областями применения ДВНГ являются задачи логистики и искусственного интеллекта, основой решения которых служит модель, построенная на базе ДВНГ.

Рассмотрим, например, применение ДВНГ для моделирования транспортных сетей.

Определение 4. ***Динамической вероятностной транспортной сетью (ДВТС), будем называть ДВНГ, соответствующий некоторой вполне определённой транспортной сети.***

Замечание. Отметим, что транспортная сеть может быть ***автомобильной транспортной сетью***, ***железнодорожной транспортной сетью***, ***воздушной, морской***, а также ***смешанной*** (например, автомобильно-железнодорожной).

Если рассматривается динамическая вероятностная транспортная сеть, то в качестве нагрузок дуг $C_{t_k}\left(U_{ij}^{(l)}\right)$ можно брать время проезда по данной дуге, стоимость проезда (стоимость перевозки единицы груза) или её пропускную способность (максимальное количество машин или единиц груза за единицу времени).

Определение 5. ***Будем говорить, что упорядоченная последовательность дуг*** $\left(U_{i_1 i_2}^{(l_1)}, U_{i_2 i_3}^{(l_2)}, ..., U_{i_k i_{k+1}}^{(l_k)}\right)$ ***образует возможный путь*** $\mu_{(i_1, i_2, ..., i_{k+1})}^{(l_1, l_2, ..., l_k)}$ ***из вершины*** $x_{i_1} \in X_G$ ***в вершину*** $x_{i_{k+1}} \in X_G$***, если существует упорядоченная по возрастанию последовательность согласованных временных срезов*** $\left(t_{i_1}, t_{i_2}, ..., t_{i_k}\right)$ ***такая, что соответствующая ей упорядоченная последовательность вероятностей*** $\left(p_{i_1 i_2}^{(l_1)}\left(t_{i_1}\right), p_{i_2 i_3}^{(l_2)}\left(t_{i_2}\right), ..., p_{i_k i_{k+1}}^{(l_k)}\left(t_{i_k}\right)\right)$ ***не содержит нулевых элементов.***

В дальнейшем будем рассматривать только возможные пути.

Замечание. Временные срезы должны быть согласованными в том смысле, что время t_{i_j} выезда из пункта (вершины) $x_{i_j} \in X_G$ должно равняться сумме времени прибытия в эту вершину и времени проезда через данный пункт (времени движения по петле).

Определение 6. ***Надёжностью пути*** $\mu_{(i_1, i_2, ..., i_{k+1})}^{(l_1, l_2, ..., l_k)}$, ***соответствующей времени начала движения*** t_{i_1}***, будем называть величину***

$$\Xi = p_{i_1 i_2}^{(l_1)}\left(t_{i_1}\right) \cdot p_{i_2 i_3}^{(l_2)}\left(t_{i_2}\right) \cdot ... \cdot p_{i_k i_{k+1}}^{(l_k)}\left(t_{i_k}\right).$$

Определение 7. ***Риском пути*** $\mu_{(i_1, i_2, ..., i_{k+1})}^{(l_1, l_2, ..., l_k)}$, ***соответствующим времени начала движения*** t_{i_1}***, будем называть величину***

$$\Psi = \left(1 - p_{i_1 i_2}^{(l_1)}\left(t_{i_1}\right) \cdot p_{i_2 i_3}^{(l_2)}\left(t_{i_2}\right) \cdot ... \cdot p_{i_k i_{k+1}}^{(l_k)}\left(t_{i_k}\right)\right).$$

Так как надёжность (или риск) каждого конкретного возможного пути является функцией времени отправления t_{i_1}, то t_{i_1} имеет смысл выбирать таким, чтобы надёжность была максимально возможной (риск был минимальным).

Определение 8. ***Оптимальным време нем начала движения по пути*** $\mu_{(i_1, i_2, ..., i_{k+1})}^{(l_1, l_2, ..., l_k)}$ ***будем называть время*** $t_{i_1}^*$***, для которого надёжность данного пути максимальна (риск минимален).***

Рассмотрим две различные вершины ДВТС

x_{i_1} и $x_{i_{k+1}}$. Пусть $\mathrm{M}_{i_1 i_{k+1}} = \{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_s\}$ - множество всех возможных путей из x_{i_1} в $x_{i_{k+1}}$. Найдём для каждого пути оптимальное время начала движения и соответственно значение максимальной надёжности данного пути.

Определение 9. ***Путь из вершины x_{i_1} в вершину $x_{i_{k+1}}$ будем называть одним из наименее рискованных путей, если его максимальная надёжность не меньше, чем у других путей из $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_s\}$.***

Предположим далее, что в качестве нагрузок дуг выбрано время прохождения данной дуги. Если зафиксирован (выбран) конкретный путь из вершины x_{i_1} в вершину $x_{i_{k+1}}$, то сумма нагрузок дуг этого пути даст время проезда из x_{i_1} в $x_{i_{k+1}}$.

Определение 10. ***Временем проезда из x_{i_1} в $x_{i_{k+1}}$ по пути μ будем называть действительную неотрицательную величину $\Delta t^{\mu}_{i_1 i_{k+1}}(t_{i_1})$, равную сумме нагрузок всех дуг данного пути.***

Ясно, что время проезда зависит от времени начала движения (см. рисунок 1).

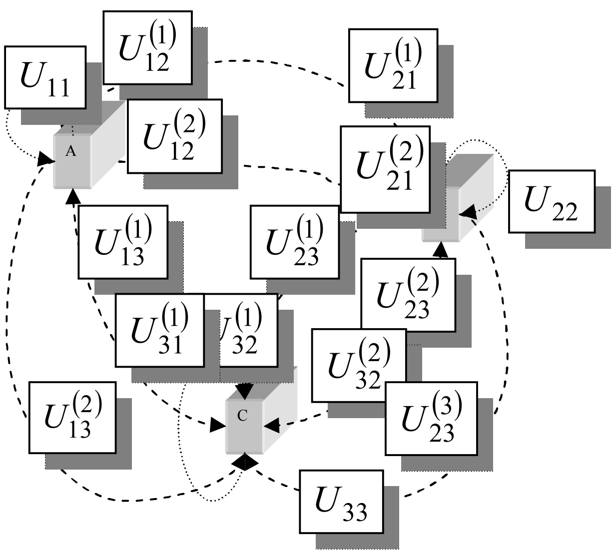

Рисунок 1 - Граф транспортной сети

Дальнейшие обобщения понятия динамического вероятностного нагруженного графа.

Из определения ДВНГ следует, что в каждый конкретный момент времени (в определённом временном сечении) любая возможная дуга ДВНГ существует с вероятностью от нуля до единицы. Пусть и вершины данного графа характеризуются аналогичной вероятностью существования в конкретное временное сечение. Обозначим через $P_t(x_j)$ вероятность того, что вершина $x_j \in X_G$ существует в момент времени t. Целесообразность введения вероятности существования вершины ДВНГ можно легко проиллюстрировать следующим примером. Пусть рассматривается некоторая динамическая вероятностная транспортная сеть (ДВТС). Предположим, что x_j - её некоторая вершина (населенный пункт), а $U_{kj}^{(s)}, U_{jr}^{(l)}$ - инцидентные этой вершине дуги (см. рисунок 2).

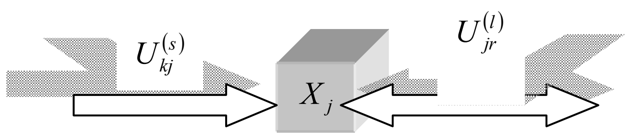

Рисунок 2 - Элемент транспортной сети

Если в некоторый момент времени $\widetilde{t}$ вероятности существования дуг $U_{kj}^{(s)}, U_{jr}^{(l)}$ отличны от нуля (то есть $p_{kj}^{(s)}(\widetilde{t}) \neq 0$ и $p_{jr}^{(l)}(\widetilde{t}) \neq 0$), то этого ещё недостаточно для возможности беспрепятственного проезда по пути $(U_{kj}^{(s)}, U_{jr}^{(l)})$, так как сам населённый пункт x_j в данный временной интервал $(\widetilde{t} - \Delta t, \widetilde{t} + \Delta t)$ может быть закрыт на карантин.

Определение 11. ***Обобщённым ДВНГ (ОДВНГ) будем называть ДВНГ, у которого для каждого момента времени $t \in T$ определены вероятности существования всех вершин.***

Замечание. В данном случае T - анализируемый временной интервал (*например, год, квартал, неделя или день*).

Определение 12. ***Пусть задан ОДВНГ $G = (X_G, P_G), (|X_G| = n, |P_G| = m)$. Назовём вершину $x_j \in X_G$ доступной в момент времени $\widetilde{t} \in T$, если $P_{\widetilde{t}}(x_j) \neq 0$.***

<u>Определение 13.</u> ***Будем говорить, что вершина $x_j \in X_G$ является доступной на интервале $[t_1, t_2] \subseteq T$, если она доступна для любого $t \in [t_1, t_2]$.***

<u>Определение 14.</u> ***Назовём дугу $U_{ij}^{(l)} \in P_G$ замкнутой в момент времени $\widetilde{t} \in T$, если обе вершины, ей инцидентные, имеют ненулевую вероятность существования в этом временном сечении*** (*то есть* $P_{\widetilde{t}}(x_i) \neq 0$ *и* $P_{\widetilde{t}}(x_j) \neq 0$).

<u>Определение 15.</u> ***ОДВНГ будем называть замкнутым, если существует такое временное сечение $\widetilde{t} \in T$, в котором все возможные дуги графа являются замкнутыми.***

<u>Замечание.</u> Отметим, что в определениях 14 и 15 петли графа не учитываются.

ДВНГ с бесконечным числом дуг. Рассмотрим вначале плоский граф (*у которого все вершины и дуги принадлежат одной и той же плоскости π*). Пусть точка плоскости $M(x_M, y_M)$ является вершиной графа. Выделим на плоскости некоторую область $S \subseteq \pi$ и будем априори считать, что для любой точки $K(x_K, y_K)$ области S существует возможная дуга $U_{MK}^{(l)}$, инцидентная точкам M, K (см. рисунок 3). Ясно, что область S содержит бесконечное множество точек. Следовательно, и число возможных дуг будет бесконечным.

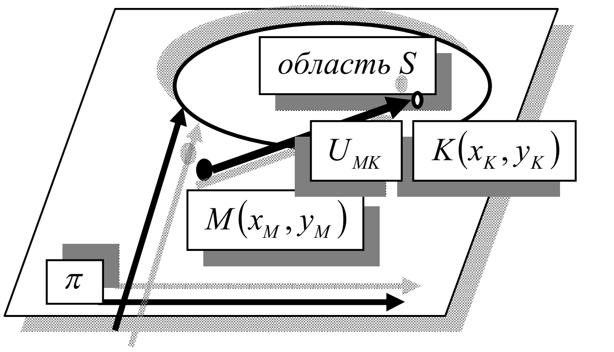

Рисунок 3 - Задание плоского ДВНГ с бесконечным числом дуг

<u>Определение 16.</u> ***Если по каким-либо соображениям в ДВНГ выделена одна из его вершин, то будем называть эту вершину центром ДВНГ.***

<u>Определение 17.</u> ***Если в ДВНГ выделен центр, то такой граф будем называть ДВНГ с центром.***

<u>Определение 18.</u> ***Если в ДВНГ с центром каждая возможная дуга инцидентна центру графа, то такой ДВНГ будем называть сферическим ДВНГ (СфДВНГ).***

Вероятности существования дуг в конкретные временные сечения можно задавать различными способами. Приведём тривиальные способы задания вероятностей.

<u>Способ 1.</u> Будем считать, что в моменты времени $t \in [t_1, t_2]$ все дуги $U_{MK}^{(l)}$ существуют с одинаковой вероятностью $p_{[t_1, t_2]}$; в моменты времени $t \in [t_3, t_4]$ все дуги существуют с одинаковой вероятностью $p_{[t_3, t_4]}$ и так далее. Причём $\bigcup [t_j, t_{j+1}] = T$.

<u>Способ 2.</u> Вероятность существования дуги $U_{MK}^{(l)}$ зададим в зависимости от расстояния между центром графа (начальной точкой M дуги) и конечной (точкой K) точками дуги (см. рисунок 3). Например, чем больше расстояние, тем меньше вероятность. *В качестве расстояния между вершинами можно использовать обычную Евклидову метрику, а можно – соответствующие нагрузки дуг.* Ясно, что при таком определении вероятностей они не будут зависеть от времени.

Аналогичным образом можно поступить и в случае пространственного графа.

Пусть в пространстве $\Re^3$ в некоторой системе координат (см. рисунок 4) зафиксирована точка $M(x_M, y_M, z_M)$ - центр графа. Выделим в $\Re^3$ какую-либо ограниченную область $V \subseteq \Re^3$. Будем считать, что для любой точки $K(x_K, y_K, z_K) \in V$ существует возможная дуга $U_{MK}^{(l)}$, инцидентная точкам M и K. Ясно, что число дуг – бесконечно, а вероятности их существования можно задавать различными способами.

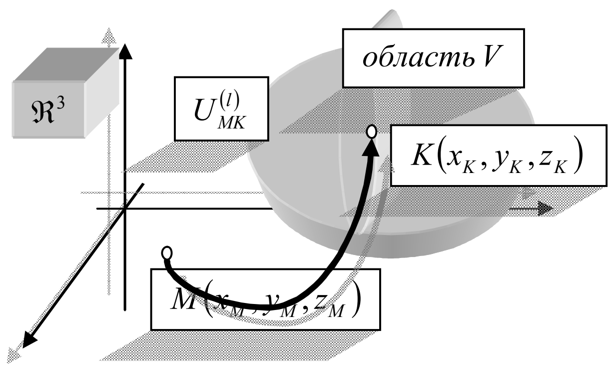

Рисунок 4 - Задание пространственного ДВНГ с бесконечным числом дуг

ДВНГ с бесконечным числом дуг и вершин. Предположим теперь, что и число вершин графа может быть бесконечным. Пусть, например, каждая точка некоторой области $V_1 \subseteq \Re^3$ может быть соединена дугой (*или дугами*) с любой точкой области $V_2 \subseteq \Re^3$ (см. рисунок 5). В такой модели и число дуг, и число вершин – бесконечно.

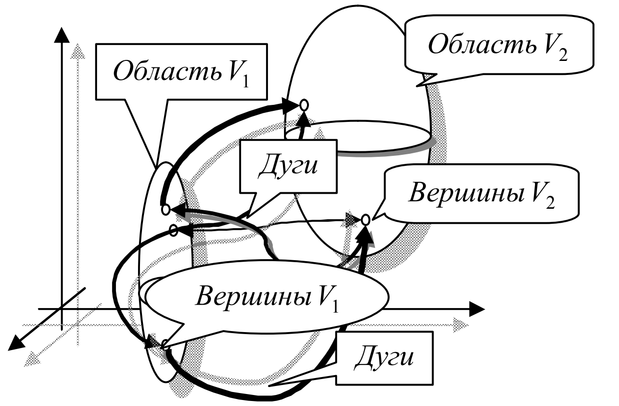

Рисунок 5 - ДВНГ с бесконечным числом дуг и вершин

ДВНГ со сферической вероятностью существования дуг.

__Определение 19.__ ***Будем говорить, что на ДВНГ определена сферическая вероятность существования дуг, если вероятность существования каждой возможной дуги графа не зависит от момента времени, а зависит только от расстояния между вершинами графа*** *(в некоторой вполне определённой метрике)*, ***инцидентными этой дуге.***

__Замечание.__ Отметим, что если на ДВНГ определена сферическая вероятность дуг, то это автоматически подразумевает, что на множестве вершин данного графа определена некоторая метрика. Заметим также, что если определена длина какой-либо дуги графа (*например, как её нагрузка*), то эта длина не обязана равняться расстоянию между вершинами (*в определённой ранее метрике*), инцидентными данной дуге.

Очевидно, что в том случае, когда имеется СфДВНГ с введённой на нём сферической вероятностью существования дуг, вероятность существования каждой дуги будет функцией расстояния до центра графа.

ДВНГ как обобщение понятий искусственного нейрона, нечёткого множества и нечёткого графа. Напомним (см. например [1], [2]), что под *искусственным нейроном* [1] (*персептроном* [2]) принято понимать «процессорный элемент, на основе которого строятся искусственные нейронные сети» [2]. Его основными элементами являются [2] (см.рисунок 6):

а) набор входных связей (*синапсов*) x_i с взвешенными весами w_i. Причём значения весов могут быть как положительными, так и отрицательными;
б) сумматор для суммирования входных сигналов;
в) активационная функция $f(S)$, выполняющая преобразование значений с выхода сумматора.

Каждое значение x_i, поступающее по $i-й$ синапсической связи, умножается на вес данной связи w_i. Взвешенная сумма входов искусственного нейрона будет $S=\sum w_j \cdot x_j$.

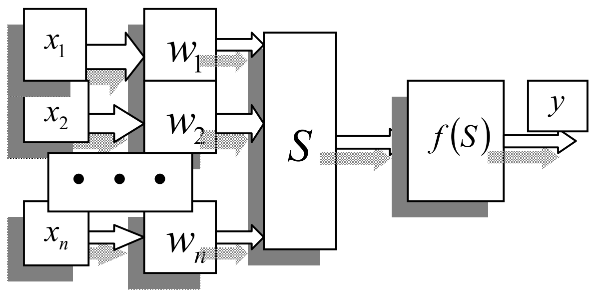

Рисунок 6 - Принципиальная схема искусственного нейрона

После того, как полученная сумма будет преобразована посредством активационной функции, на выходе искусственного нейрона будем иметь величину $y = f(S)$. При построении нейронных сетей можно использовать различные активационные функции (см. [2]). Конкретный вид функции зависит от предназначения создаваемой нейронной сети (и в некоторых случаях от типа метода обучения).

Построим ДВНГ, обладающий теми же свойствами, что и персептрон. Очевидно, что в данном случае роль входных связей (*синапсов*) будут играть пары дуг $U_{j0}^{(1)}$ и $U_{j0}^{(2)}$, причём по первой дуге будет передаваться положительное воздействие, а по второй – отрицательное. Величину воздействия зададим как нагрузку соответствующей дуги $x_j = C\left(U_{j0}^{(l)}\right), (l = 1,2)$, а роль взвешенных весов будут играть вероятности существования соответствующих дуг $w_j = p_{j0}^{(l)}(t), \left(j = \overline{1,n}; l = 1,2\right)$ (см. рисунок 7).

Тогда в вершине X_0 ДВНГ взвешенная сумма входов будет иметь значение $S(t) = \sum p_{j0}^{(1)}(t) \cdot C\left(U_{j0}^{(1)}\right) + \sum p_{j0}^{(2)}(t) \cdot C\left(U_{j0}^{(2)}\right)$, причём первая сумма определяет величину положительного воздействия в момент времени

$t \in T$, а вторая сумма – величину отрицательного воздействия.

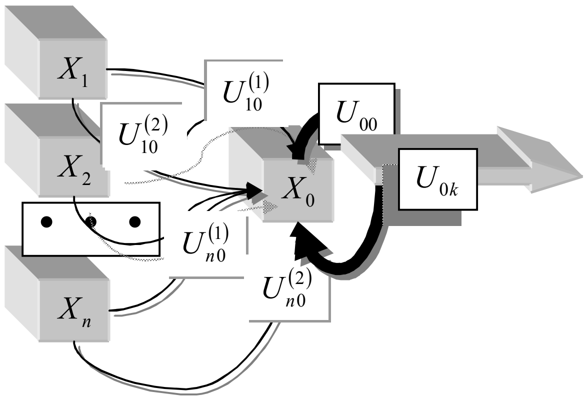

Рисунок 7 - ДВНГ со свойствами персептрона

Петля U_{00} играет роль активационной функции искусственного нейрона, то есть проводит сравнение суммарного входного воздействия с априори заданным пороговым значением. Зададим её нагрузку следующим образом: $C_t(U_{00}) = S(t)$, а её вероятность существования - как функцию аргумента $C_t(U_{00})$: $p_{00}(t) = F[C_t(U_{00})]$. Если в сечении $t = \tilde{t}$ $p_{00}(\tilde{t})$ превышает априори заданное пороговое значение $p_{актив} = const$ (уровень активации) (см. рисунок 8), то $S(t) = \sum p_{j0}^{(1)}(t) \cdot C\left(U_{j0}^{(1)}\right) + \sum p_{j0}^{(2)}(t) \cdot C\left(U_{j0}^{(2)}\right)$ передаётся по петле U_{00} со входа вершины X_0 на её выход и далее по дуге $U_{0k}^{(l)}$.

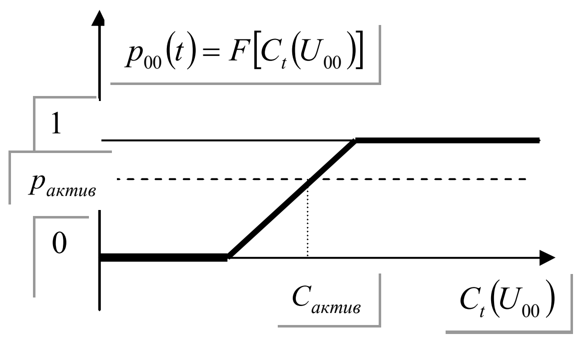

Рисунок 8 - График функции вероятности существования петли и уровень активации

Причём вероятность существования этой дуги $p_{0k}^{(l)}(t)$ снова играет роль весового коэффициента при нагрузке этой дуги $C_t\left(U_{0k}^{(l)}\right) = p_{0k}^{(l)}(t) \cdot S(t)$ (то есть определяет уровень передаваемого значения).

Теперь рассмотрим понятие нечёткого множества (см. [1], [3]). Напомним, что под нечётким множеством A в некотором непустом пространстве X, в соответствии с определением [1], принято понимать множество пар $\{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}$, где $\mu_A : X \to [0,1]$ - так называемая функция принадлежности нечёткого множества A. Функция принадлежности определяет для любого элемента множества X степень его принадлежности к множеству A. Так, если $\mu_A(\tilde{x}) = 1$, то делают вывод, что $\tilde{x} \in A$. Если же $\mu_A(\tilde{x}) = 0$, то $\tilde{x} \notin A$. Промежуточное между нулём и единицей значение $\mu_A(\tilde{x})$ говорит о частичной принадлежности (в определённой степени) элемента $\tilde{x}$ к множеству A. Отметим очевидное совпадение: функция принадлежности, как и вероятность, принимает все свои значения на отрезке $[0,1]$. Поэтому в случае конечного (и, очевидно, счётного) множества X никаких сложностей с заменой нечёткого множества ДВНГ не возникает. Действительно, пусть $X = \{x_j\}_{j=1,2,...}$. Предположим, что нечёткое множество $A \subseteq X$ является нормальным (см. [1]) (*в противном случае его можно нормализовать*). Тогда существует элемент $x_k \in X$, такой что $\mu_A(x_k) = 1$, то есть $x_k \in A$. Сопоставим этому элементу вершину X_0 ДВНГ $G = (X_G, P_G)$. Остальным элементам $x_j\ (j \neq k)$ множества X сопоставим вершины $X_j \in X_G$. Пусть множество $P_G = \{U_{j0}\}$ содержит дуги, соединяющие каждую из вершин $X_j\ (j \neq k)$ с вершиной X_0. В качестве соответствующей вероятности существования дуги $p_{j0}(t)$ возьмём значение функции принадлежности множеству A на элементе $x_j : p_{j0}(t) = \mu_A(x_j)$. Таким образом, чем больше вероятность существования дуги U_{j0}, тем больше степень принадлежности вершины $X_j\ (j \neq k)$ (элемента $x_j\ (j \neq k)$) к множеству A. Отметим полезное дополнительное свойство ДВНГ по сравнению с нечётким множеством. С помощью задания соответствующих нагрузок дуг $C(U_{j0})$ можно ввести дополнительные условия принадлежности элементов множеству A. Например, если $X = \{x_j\}_{j=1,2,...}$ - множество точек плоскости, на которой определена система координат, то в качестве нагрузок дуг можно взять весовые коэффициенты, увеличивающие вероятности существования дуг пропорционально расстоянию от соответствующей точки $x_j \left(j \neq k\right)$ до точки x_k (то есть чем ближе точка плоскости к точке $x_k \in A$, тем больше вероятность, что эта точка также принадлежит множеству A). Можно показать, что никаких принципиальных затруднений не возникает и в том случае, когда множество X является бесконечным.

В соответствии с [4] различают нечёткие (ориентированные и неориентированные) графы двух видов. Напомним их определения [4].

Нечётким неориентированным графом первого рода называется и через $\widetilde{G} = \left(X, \widetilde{U}\right)$ обозначается двойка множеств, у которой $X = \{x_i\}, i \in I = \{1, 2, ..., n\}$ - чёткое множество вершин, а $\widetilde{U} = \left\{\left\langle \mu_U \left(x_i, x_k\right) / \left(x_i, x_k\right)\right\rangle\right\}$ - нечёткое множество рёбер, где $x_i, x_k \in X$, $\mu_U \left(x_i, x_k\right)$ - значение функции принадлежности μ_U для ребра $\left(x_i, x_k\right)$.

Аналогичным образом определяется [4] нечёткий ориентированный граф первого рода $\widetilde{G} = \left(X, \widetilde{U}\right)$. При этом $X = \{x_i\}, i \in I = \{1, 2, ..., n\}$, а $\widetilde{U} = \left\{\left\langle \mu_U \left\langle x_i, x_k\right\rangle / \left\langle x_i, x_k\right\rangle\right\rangle\right\}$, где $\left\langle x_i, x_k\right\rangle \in X^2$, $\mu_U \left\langle x_i, x_k\right\rangle$ - степень принадлежности ориентированного ребра $\left\langle x_i, x_k\right\rangle$ нечёткому множеству ориентированных рёбер $\widetilde{U}$. Ко второму виду относят [4] графы $\widetilde{G} = \left(\widetilde{X}, \widetilde{U}\right)$, имеющие, кроме того, нечёткое множество вершин, то есть графы, у которых $\widetilde{X} = \left\{\left\langle \mu_X \left(x\right) / x\right\rangle\right\}$.

Ясно, что непосредственно из *определения 1* ДВНГ, *определения 11* ОДВНГ и приведённых определений нечётких графов следует, что ДВНГ является обобщением понятия нечёткого графа, так как в каждом конкретном временном сечении ДВНГ является нечётким графом первого рода, роль функции принадлежности дуги в котором играет соответствующая вероятность существования дуги. Аналогично при любом фиксированном $t \in T$ ОДВНГ является нечётким графом второго рода. Заметим, что подобные «временные срезы» ДВНГ и ОДВНГ будут обладать дополнительными полезными свойствами за счёт возможных нагрузок дуг и возможности рассматривать бесконечные множества вершин и дуг.

Пространственно-временные ДВНГ. Определения, свойства, операции над ними

Определение 20. ***ДВНГ*** $G = \left(X_G, P_G\right)$, $\left(\left|X_G\right| = n, \left|P_G\right| = m\right)$ ***будем называть пространственно-временным ДВНГ (П-В ДВНГ), если задана некоторая система координат (в пространстве*** $\Re^s$***), в которой однозначно определены координаты любой из вершин*** $x_j \in X_G \left(j = \overline{1,n}\right)$ ***ДВНГ:*** $x_j = x_j \left(\xi_1^{(j)}, \xi_2^{(j)}, ..., \xi_s^{(j)}\right)$.

Замечание. Определение остаётся в силе и для обобщённых ДВНГ с бесконечным (*счётным или несчётным*) числом вершин.

Определение 21. ***Два П-В ДВНГ*** $G^{(1)} = \left(X_{G^{(1)}}, P_{G^{(1)}}\right)$ ***и*** $G^{(2)} = \left(X_{G^{(2)}}, P_{G^{(2)}}\right)$ ***назовём изоморфными в пространстве, если***

а) $\left|X_{G^{(1)}}\right| = \left|X_{G^{(2)}}\right|$***, то есть мощности множеств вершин этих графов совпадают;***

б) $\left|P_{G^{(1)}}\right| = \left|P_{G^{(2)}}\right|$***, то есть мощности множеств дуг этих графов совпадают;***

в) между элементами множеств $X_{G^{(1)}}$ ***и*** $X_{G^{(2)}}$ ***можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию)*** $\phi : x_j^{(1)} \to x_j^{(2)}$, $\left(x_j^{(1)} \in X_{G^{(1)}}, x_j^{(2)} \in X_{G^{(2)}}\right)$***, при котором возникает взаимно однозначное соответствие между элементами множеств дуг*** $\psi : P_{G^{(1)}} \to P_{G^{(2)}}$***. Причём существует такое преобразование системы координат (поворот осей и смещение центра системы), при котором пространственные координаты соответствующих вершин переходят друг в друга (совпадают с точностью до выбора системы координат).***

Замечание. Отметим, что у изоморфных в

пространстве графов соответствующие дуги могут иметь различные характеристики (то есть в одном и том же временном сечении иметь различные вероятности существования и различные нагрузки).

<u>Определение 22.</u> ***Будем говорить, что два изоморфных в пространстве ДВНГ являются также и изоморфными во времени, если их соответствующие дуги в любое временное сечение имеют одинаковые вероятности существования и одинаковые нагрузки.***

<u>Определение 23.</u> ***Два П-В ДВНГ*** $G^{(1)} = \left(X_{G^{(1)}}, P_{G^{(1)}}\right)$ ***и*** $G^{(2)} = \left(X_{G^{(2)}}, P_{G^{(2)}}\right)$ ***назовём изоморфными во времени, если***

а) $\left|X_{G^{(1)}}\right| = \left|X_{G^{(2)}}\right|$***, то есть мощности множеств вершин этих графов совпадают;***

б) $\left|P_{G^{(1)}}\right| = \left|P_{G^{(2)}}\right|$***, то есть мощности множеств дуг этих графов совпадают;***

в) между элементами множеств $X_{G^{(1)}}$ ***и*** $X_{G^{(2)}}$ ***можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию)*** $\phi : x_j^{(1)} \to x_j^{(2)}$, $\left(x_j^{(1)} \in X_{G^{(1)}}, x_j^{(2)} \in X_{G^{(2)}}\right)$ ***при котором возникает взаимно однозначное соответствие между элементами множеств дуг*** $\psi : P_{G^{(1)}} \to P_{G^{(2)}}$ ***такое, что вероятности существования соответствующих дуг и их нагрузки в любом временном сечении совпадают.***

<u>Замечание</u>. Подчеркнём, что в последнем определении не требуется совпадения координат соответствующих вершин (с точностью до выбора системы координат).

<u>Определение 24.</u> ***Под универсальным множеством П-В ДВНГ*** $\Im$ ***будем понимать множество всех мыслимых П-В ДВНГ.***

Очевидно, что бинарные отношения «быть изоморфными в пространстве», «быть изоморфными во времени» и «быть изоморфными и в пространстве и во времени» разбивают $\Im$ на классы эквивалентности. В дальнейшем мы не будем различать П-В ДВНГ, относящиеся к одному и тому же классу эквивалентности. То есть будем рассматривать абстрактные П-В ДВНГ.

<u>Определение 25.</u> ***П-В ДВНГ*** $G = \left(X_G, P_G\right)$ ***будем называть объединением двух П-В ДВНГ*** $G^{(1)} = \left(X_{G^{(1)}}, P_{G^{(1)}}\right)$ ***и*** $G^{(2)} = \left(X_{G^{(2)}}, P_{G^{(2)}}\right)$ ***и обозначать следующим образом:*** $G = G^{(1)} \cup G^{(2)}$, ***если*** $X_G = X_{G^{(1)}} \cup X_{G^{(2)}}$ ***и*** $P_G = P_{G^{(1)}} \cup P_{G^{(2)}}$.

<u>Определение 26.</u> ***П-В ДВНГ*** $G = \left(X_{\tilde{G}}, P_{\tilde{G}}\right)$ ***будем называть разностью двух П-В ДВНГ*** $G^{(1)} = \left(X_{G^{(1)}}, P_{G^{(1)}}\right)$ ***и*** $G^{(2)} = \left(X_{G^{(2)}}, P_{G^{(2)}}\right)$ ***и обозначать следующим образом:*** $G = G^{(1)} \setminus G^{(2)}$, ***если*** $G^{(1)} = G \cup G^{(2)}$.

<u>Определение 27.</u> ***П-В ДВНГ*** $G = \left(X_{\tilde{G}}, P_{\tilde{G}}\right)$ ***будем называть пространственным пересечением двух П-В ДВНГ*** $G^{(1)} = \left(X_{G^{(1)}}, P_{G^{(1)}}\right)$ ***и*** $G^{(2)} = \left(X_{G^{(2)}}, P_{G^{(2)}}\right)$ ***и обозначать следующим образом:*** $G = G^{(1)} \bigcap\limits_{простр.} G^{(2)}$, ***если***

$$X_G = \left\{ \begin{array}{l} x_k\left(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}\right) \\ \mid (x_k \in X_{G^{(1)}}) \wedge (x_k \in X_{G^{(2)}}) \end{array} \right\} \text{ и}$$

$$P_G = \left\{ \begin{array}{l} U_{ij}^{(l)} \mid \left(x_i \in X_G, x_j \in X_G\right) \wedge \\ \wedge \left(\exists \tilde{t} \in T, \exists U_{ij}^{(\tilde{l})} \in P_{G^{(1)}} : p_{ij}^{(\tilde{l})}(\tilde{t}) > 0\right) \wedge \\ \wedge \left(\exists \hat{t} \in T, \exists U_{ij}^{(\hat{l})} \in P_{G^{(2)}} : p_{ij}^{(\hat{l})}(\hat{t}) > 0\right) \end{array} \right\}.$$

Причём

$$\forall\, U_{ij}^{(l)} \in P_G : \forall\, t \in T :$$
$$\left(p_{ij}^{(l)}(t) = \min\left\{p_{ij}^{(\tilde{l})}(t), p_{ij}^{(\hat{l})}(t)\right\}\right) \wedge$$
$$\wedge \left(C_t\left(U_{ij}^{(l)}\right) = \min\left\{C_t\left(U_{ij}^{(\tilde{l})}\right), C_t\left(U_{ij}^{(\hat{l})}\right)\right\}\right).$$

<u>Определение 28.</u> ***П-В ДВНГ*** $G = \left(X_{\tilde{G}}, P_{\tilde{G}}\right)$ ***будем называть пространственно-временным пересечением двух П-В ДВНГ*** $G^{(1)} = \left(X_{G^{(1)}}, P_{G^{(1)}}\right)$ ***и*** $G^{(2)} = \left(X_{G^{(2)}}, P_{G^{(2)}}\right)$ ***и обозначать***

следующим образом: $G = G^{(1)} \bigcap_{простр-врем} G^{(2)}$***, если***

$$X_G = \left\{ x_k \,\middle|\, (x_k \in X_{G^{(1)}}) \wedge (x_k \in X_{G^{(2)}}) \right\}$$

и

$$P_G = \left\{ \begin{array}{l} U_{ij}^{(l)} \mid \left(x_i \in X_G, x_j \in X_G\right) \wedge \\ \wedge \left(\exists t \in T\right): \\ \left(\exists U_{ij}^{(\tilde{l})} \in P_{G^{(1)}} : p_{ij}^{(\tilde{l})}(t) > 0\right) \wedge \\ \wedge \left(\exists U_{ij}^{(\hat{l})} \in P_{G^{(2)}} : p_{ij}^{(\hat{l})}(t) > 0\right) \end{array} \right\}.$$

Причём

$$\forall U_{ij}^{(l)} \in P_G : \forall t \in T :$$
$$\left(p_{ij}^{(l)}(t) = \min\left\{p_{ij}^{(\tilde{l})}(t), p_{ij}^{(\hat{l})}(t)\right\}\right) \wedge$$
$$\wedge \left(C_t\left(U_{ij}^{(l)}\right) = \min\left\{C_t\left(U_{ij}^{(\tilde{l})}\right), C_t\left(U_{ij}^{(\hat{l})}\right)\right\}\right).$$

Замечание. Отметим, что, вообще говоря, результат пересечения двух П-В ДВНГ $G^{(1)} = \left(X_{G^{(1)}}, P_{G^{(1)}}\right)$ и $G^{(2)} = \left(X_{G^{(2)}}, P_{G^{(2)}}\right)$ зависит от выбора преобразования системы координат одного из этих графов, так как при различных преобразованиях будут отождествляться разные пары вершин графов $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$.

Определение 29. ***П-В ДВНГ*** $\tilde{G} = \left(X_{\tilde{G}}, P_{\tilde{G}}\right)$ ***будем называть подграфом П-В ДВНГ*** $G = \left(X_G, P_G\right)$, ***если*** $\forall x_j \in X_{\hat{G}} : \exists t \in T : x_j(t) \in X_G$ ***и*** $\forall U_{ij}^{(l)} \in P_{\hat{G}} : \exists t \in T : (U_{ij}^{(l)} \in P_G) \wedge (p_{ij}^{(l)}(t) > 0)$.

Определение 30. ***П-В ДВНГ*** $\tilde{G} = \left(X_{\tilde{G}}, P_{\tilde{G}}\right)$ ***будем называть базовым (остовным) подграфом П-В ДВНГ*** $G = \left(X_G, P_G\right)$, ***если*** $\forall t \in T : \forall x_j \in X_{\tilde{G}} \Rightarrow x_j \in X_G$ ***и одновременно*** $\forall t \in T$: $\forall U_{ij}^{(l)} \in P_{\tilde{G}} \Rightarrow \left(U_{ij}^{(l)} \in P_G\right) \wedge \left(p_{ij}^{(l)}(t) \neq 0\right)$.

Определение 31. ***П-В ДВНГ*** $G_{\tilde{t}} = \left(X_G(\tilde{t}), P_G(\tilde{t})\right)$ ***будем называть временным сечением графа*** $G = \left(X_G, P_G\right)$ ***в момент*** $\tilde{t} \in T$***, если множество его вершин*** $X_G(\tilde{t})$ ***содержит те и только те вершины графа*** $G = \left(X_G, P_G\right)$ ***(элементы множества*** X_G***), вероятность существования которых в момент времени*** $\tilde{t} \in T$ ***отлична от нуля. Аналогично множество дуг*** $P_G(\tilde{t})$ ***содержит те, и только те элементы множества*** P_G***, вероятность существования которых в момент*** $\tilde{t}$ ***отлична от нуля.***

Заключение. В статье введено новое математическое понятие – динамический вероятностный нагруженный граф. Рассмотрены его основные свойства. Показано, что ДВНГ является обобщением понятий нечёткого множества, искусственного нейрона и нечёткого графа. Проведено обобщение данного понятия на предельные случаи бесконечного числа дуг и вершин.

Библиографический список

1. *Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечёткие системы: пер. с польск. И.Д.Рудинского. – М.: Горячая линия – Телеком, 2006. – 452 с.

2. *Паклин Н.Б., Орешков В.И.* Бизнес-аналитика: от данных к знаниям. – СПб.: Питер, 2009. – 624 с.

3. *Ярушкина Н.Г.* Основы теории нечётких множеств и гибридных систем. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 320 с.

4. *Бернштейн Л.С., Боженюк А.А.* Нечёткие графы и гиперграфы. – М.: Научный мир, 2005. – 256 с.